गणित

छठवीं कक्षा

शिक्षक शिक्षा निर्देशालय एवं
राज्य शिक्षा गवेषणा और प्रशिक्षण परिषद
ओड़िशा, भुवनेश्वर

ओड़िशा प्राथमिक शिक्षा कार्यक्रम प्राधिकरण
ओड़िशा, भुवनेश्वर

गणित

छठवीं कक्षा

संपादक मंडली :
प्रो. दयानिधि परिड़ा
डा. नलिनीकान्त मिश्र
श्री नगेन्द्र कुमार मिश्र
श्री तापस कुमार नायक
श्री प्रसन्न कुमार साहु
श्री चतुर्भुज प्रधान

पुनरीक्षक मंडली :
श्री मदन मोहन महांति
श्री तापस कुमार नायक
डॉ. वामदेव त्रिपाठी

संयोजना :
डॉ. प्रीतिलता जेना
डॉ. तिलोत्तमा सेनापति
डॉ. सविता साहू

अनुवादक मंडली :
प्रो. डॉ. राधाकान्त मिश्र
प्रो. डॉ. स्मरप्रिया मिश्र
डॉ. लक्ष्मीधर दाश
डॉ. स्नेहलता दास
डॉ. सनातन बेहेरा (अनुवादक)
डॉ. अजित प्रसाद महापात्र
डॉ. अमूल्य रत्न महांति (पुनरीक्षक)

संयोजना :
डॉ. सबिता साहू

प्रकाशक :
विद्यालय और गणशिक्षा विभाग, ओड़िश सरकार

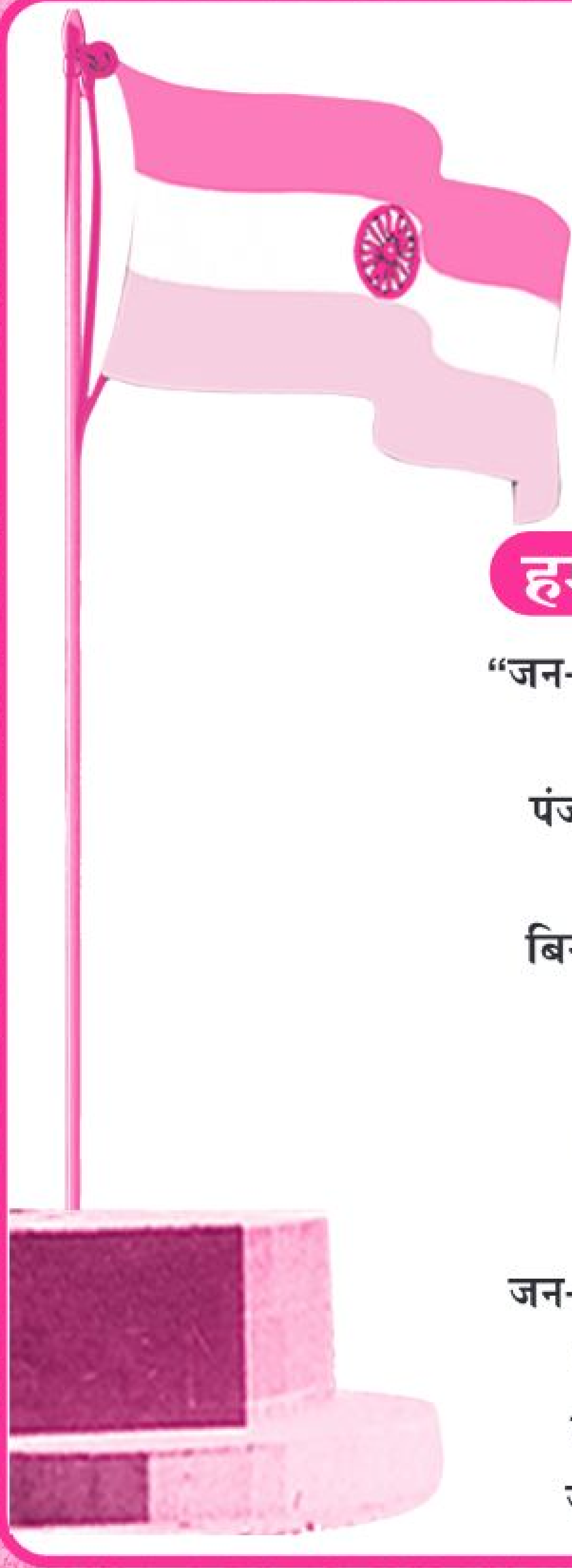
मुद्रण वर्ष : २०२३

प्रस्तुति : शिक्षक शिक्षा निर्देशालय और राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, ओड़िशा, भुवनेश्वर
और
राज्य पाठ्य पुस्तक प्रणयन और प्रकाशन संस्थान, भुवनेश्वर

मुद्रण : पाठ्य पुस्तक उत्पादन और विक्रय, ओडिशा, भुवनेश्वर

जगतमाता के चरणों में अब तक मैं जो-जो भेंट देता हूँ, उनमें से मौलिक शिक्षा मुझे सबसे अधिक क्रान्तिकारी और महत्वपूर्ण लगती है। इससे अधिक महत्वपूर्ण और मूल्यवान भेंट मैं जगत के सामने रख सकूंगा, इसकी मुझे उम्मीद नहीं। इसमें मेरे सारे रचनात्मक कार्यक्रमों को अनुप्रयोगात्मक करने की चावी है। जिस नई दुनिया के लिए मुझमें घरपटाहर है। वह इसमें से ही प्रकट हो सके। यह मेरी अन्तिम अभिलाषा है।

-महात्मा गान्धी



हमारा राष्ट्र गान

"जन-गण-मन-अधिनायक जय हे
भारत-भाग्य-विधाता
पंजाब-सिंधु-गुजरात-मराठा
द्राविड़-उत्कल-बंग
बिन्ध्य-हिमाचल-यमुनां-गंगा
उच्छल जलधि तरंग
तब शुभ नामे जागे
तब शुभ आशिष मागे
गाहे तब जय गाथा
जन-गण-मङ्गल दायक जय हे,
भारत-भाग्य-विधाता,
जय हे, जय है, जय हे,
जय जय जय, जय हे।"

भारत का संविधान

प्रस्तावना

हम भारतवासी भारत को एक सार्वभौम, समाजवादी धर्म निरपेक्ष, गणतान्त्रिक साधारण तन्त्र का रूप देने के लिए दृढ़ संकल्प ले कर और यहाँ के नागरिकों को -

- ★ सामाजिक अर्थनैतिक और राजनैतिक न्याय;
- ★ चिन्तन-सोच, अभिव्यक्ति, प्रत्यय, धर्मीय विश्वास और उपासना की स्वतन्त्रता;
- ★ स्थिति और सुविधा देने में समानता की सुरक्षा प्रदान करना तथा;
- ★ व्यक्ति मर्यादा और राष्ट्र की एकता व्यक्य तथा संहति निश्चित कर उनके बीच भाईचारे का भाव जगाना।

इस १९४९ ई के नवंबर २६ तारीख के दिन हम अपनी संविधान प्रणयन सभा में इस संविधान को ग्रहण एवं प्रणयन करते हैं। हम अपने आप को समर्पित करते हैं।

विषय सूची

अध्याय	विषय	
पहला	संख्याओं की जानकारी	1
दूसरा	संख्याओं के बारे में अधिक जानकारी	12
तीसरा	ज्यामिति में बुनियादी अवधारणाएँ	34
चौथा	प्राकृत संख्या	57
पांचवां	भिन्न संख्या	86
छठवां	दशमलव संख्या	109
सातवां	व्यावसायिक गणित	121
आठवां	पूर्ण संख्याएँ	138
नौवां	समतल पर ज्यामितीय आकृतियाँ	158
दसवां	बीजगणित से परिचय	177
गारहवां	परिमाप	197
बारहवां	आँकड़ों का प्रबंधन और संरचना	209
तेरहवां	ज्यामितीय रचना	220

संख्याओं की जानकारी

1.1 हम जो जानते हैं

हम इससे पहले संख्याओं से परिचित हो चुके हैं । वस्तुओं को गिनने में हम संख्याओं का व्यवहार करते हैं । वैसे ही दो डलियों में स्थित चीजों में किसमें ज्यादा और किसमें कम परिमाण की चीजें हैं, जानने के लिए भी हम संख्याओं का व्यवहार करते हैं, तुम किस-किस परिस्थिति में संख्याओं का प्रयोग करते हो, उसके दो उदाहरण दो ।

अधिक संख्याओं वाली चीजों को गिनते समय अकसर हम बड़ी संख्याओं का व्यवहार करते हैं। जैसे कि घर बनाने के लिए जरूरी ईंटों की संख्या, एक ट्रक में लादे गए संतरो की संख्या, तुम्हारे ब्लॉक और जिले की जनसंख्या आदि । आओ, उन सबको याद करें ।

- नीचे दिए गए उदाहरण को देखो ।

  पाँच आदमियों ने अपने जमाखातों में कितने-कितने रुपए रखे थे, नीचे दिए गए हैं ।

महेश	सुखविंदर	सरिता	रंकनाथ	जमिल
100000	456349	280593	350000	187532

अब नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखो ।

- किसके पास कितने रुपए हैं, बताओ । हरेक के पास जो रुपए हैं उन्हें अल्प विराम (,) का व्यवहार करते हुए लिखो । जैसे - 1,00,000
- किसके जमाखाते में सबसे ज्यादा रुपए हैं ?
- किसके जमाखाते में सबसे कम रुपए हैं ?
- पाँच आदमियों के पास जो रुपये हैं उनके परिमाण को बड़े से छोटे क्रम में सजाकर लिखो ।

  हम जानते हैं

  1 लाख= 10 अयुत
  = 100 हजार

1.2.एक करोड़ तक संख्याओं से परिचय

ध्यान दो :

- चार अंकों वाली सबसे बड़ी संख्या है = 9999

  9999 + 1 = 10,000

  9999 में 1 जोड़ने से योगफल है पाँच अंको वाली सबसे छोटी संख्या ।

- वैसे ही पाँच अंकों वाली सबसे बड़ी संख्या से 1 जोड़ने से योगफल कितना होगा ?

  99,999 + 1 = 1,00,000 (छह अंकों वाली सबसे छोटी संख्या)

खुद करके देखो :

छह अंकोंवाली सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ने से योगफल कितना हुआ, बताओ । क्या मिली हुई संख्या सात अंकोवाली क्षुद्रतम संख्या है ?

नीचे दिए गए उदाहरणों की तरह तुम अपनी कॉपी में लिखकर खाली स्थानों में उत्तर लिखो ।

एक अंकों वाली वृहत्तम संख्या 9	+1 = 10	(दो अंकों वाली क्षुद्रतम संख्या)
दो अंकों वाली वृहत्तम संख्या (99)	+1 = 100	(तीन अंकों वाली क्षुद्रतम संख्या)
तीन अंकों वाली वृहत्तम संख्या (999)	+1 = 1000	(चार अंकों वाली क्षुद्रतम संख्या)
चार अंकों वाली वृहत्तम संख्या (9999)	+1 = ------	(पाँच अंकों वाली क्षुद्रतम संख्या)
पाँच अंकों वाली वृहत्तम संख्या (-----)	+1 = -----------	(छह अंकों वाली क्षुद्रतम संख्या)
छह अंकों वाली वृहत्तम संख्या (------)	+1 = ------	(सात अंकों वाली क्षुद्रतम संख्या)
सात अंकों वाली वृहत्तम संख्या (-------)	+1 = 10000000	(आठ अंकों वाली क्षुद्रतम संख्या)

अल्प विराम (,) का व्यवहार करते हुए, एक करोड़ (10000000) को 1,00,00,000 की तरह लिखा जाता है ।

विविध स्थितियों में हम एक करोड़ से बड़ी संख्यों का व्यवहार करते हैं । जैसे - हमारे राज्य की जनसंख्या एक करोड़ के साथ संख्याओं के नाम-पठन में व्यवहृत दुसरी इकाइयों का संपर्क दिया गया हैं, ध्यान दो ।

1 सौ = 10 दस

1 हजार = 10 सौ या 100 दस

1 लाख = 100 हजार या 1000 सौ

1 करोड़ = 100 लाख या 10,000 हजार

बताओ :

1 की दायीं और सात शून्य लिखने से 1 करोड़ होगा । 1 की दायीं और आठ शून्य लिखने से कौन सी संख्या होगी ?

अभ्यास 1.1

1. आठ अंकों वाली सबसे छोटी संख्या से शुरू करते हुए परवर्त्ती पाँच संख्याओं को सही स्थानों में अल्प विराम का व्यवहार करके लिखो और उन्हें पढ़ो ।

2.

1	0	2
5	6	3
7	4	8

पास वाले अंकग्रीड़ से पाँच आठ अंकों वाली संख्याएँ बनाओ और उन संख्याओं का संख्या नाम लिखो ।

(निर्देश : 15 का संख्या नाम हैं पंद्रह)

3. ऐसी आठ अंकों वाली संख्या बनाओं जिसका हरके अंक समान हो । ऐसी जितनी संख्याएँ संभव हैं, उन्हें लिखो ।

4. (क) सिर्फ दो अंकों का व्यवहार करते हुए एक आठ अंकों वाली संख्या लिखो, जिसके अंकों का विपरीत क्रम में लिखने से प्राप्त संख्या मूल संख्या के बराबर होगी ।

(ख) तीन अंकों का व्यवहार करते हुए ऐसी एक आठ अंकों वाली संख्या लिखो । जिसके अंकों का योगफल आठ होगा । ऐसी ही और कई संख्याएँ लिखो ।

1.3 बड़ी संख्याओं का स्थानीय मान

सकीना ने बड़ी संख्याओं को लिखने और पढ़ने के लिए एक रास्ता निकाला । 253 को लिखने के लिए उसने एक, दस और सौ का व्यवहार करते हुए कैसे लिखा, वह नीचे दिखाया गया है । ध्यान दो -

सौ	दस	एक
2	5	3

प्रसारित रूप में कैसे लिखा गया है देखो ।

$2 \times 100 + 5 \times 10 + 3$

वैसे, 3904 को कैसे लिखा जाएगा ?

हजार	सौ	दस	एक
3	9	0	4

प्रसारित रूप में,

$3 \times 1000 + 9 \times 100 + 0 \times 10 + 4$

इसी तरह छठी अंकों वाली संख्याओं को लिखने के लिए कैसे इकाई सारणी का व्यवहार किया जा पाएगा, वह उदाहरण 1 में दिखाया गया है ।

उदाहरण -1

370659 को प्रसारित रूप में लिखो ।

हल

लाख	अयुत (दस हजार)	हजार	सौ	दस	एक
3	7	0	6	5	9

उपर्युक्त संख्या को प्रसारित रूप में इस तरह लिखा जा सकेगा -

3x100000 + 7x10000 + 0x1000 + 6x100 + 5x10 + 9

उदाहरण -2

43513098 को प्रसारित रूप में लिखो ।

हल

पहले 43513098 को स्थानीयमान सारणी में लिखेंगे ।

करोड़	नियुत (दस लाख)	लाख	अयुत (दस हजार)	हजार	सौ	दस	एक
4	3	5	1	3	0	9	8

इसे प्रसारित रूप में उस प्रकार लिखा जाएगा ।

4x10000000 + 3x1000000 + 5x100000 + 1x10000 + 3x1000 + 0x100 + 9x10 + 8

ध्यान दो,

43513098 के करोड़ स्थान में 4 है, इसलिए 4 का स्थानीयमान 4 करोड़ है,
नियुत (दस लाख) स्थान में 3 है, इसलिए 3 का स्थानीयमान 3 नियुत यानी ३० लाख है,
लाख के स्थान में 5 है, इसलिए 5 का स्थानीयमान 5 लाख है ।

वैसे ही,

1 का स्थानीयमान 1 अयुत यानी १० हजार है
3 का स्थानीयमान 3 हजार है,
0 का स्थानीयमान 0 सौ यानी 0 है,
9 का स्थानीयमान 9 दस यानी ९० है,
8 का स्थानीयमान 8 एक यानी 8 है ।

क्या तुम जानते हो ?
43513098 में
इकाई स्थानीय अंक 8 है,
दहाई स्थानीय अंक 9 है
सैकड़ा स्थानीय अंक 0 है ।

संख्याओं के पढ़ने और लिखने में अल्प विराम का व्यवहार :

तुमने जरूर ही लक्ष्य किया होगा कि बड़ी संख्याओं को लिखते समय अल्प विराम का व्यवहार किया जाता है । अल्प विराम का व्यवहार करते हुए तुम आसानी से बड़ी-बड़ी संख्याओं को पढ-लिख पाते हो, भारतीय संख्यांकन पद्धति में हजार, लाख और करोड़ स्थानों को सूचित करने के लिए अल्प विराम का प्रयोग किया जाता है । ध्यान दो-

32579864 को अल्प विराम के प्रयोग से 3, 25, 79, 864 के रूप में लिखा जाता हैं । यहाँ पहले अल्प विराम का प्रयोग दायीं और से तीन अंको को छोड़कर किया गया है । वैसे ही, दूसरे अल्प विराम का प्रयोग और दो अंको को छोड़कर यानी दायीं और से पाँच अंकों को छोड़कर किया गया है । तीसरे अल्पविराम का प्रयोग और दो अंकों को छोड़कर किया गया हैं । इस संख्या 3, 25, 79, 864 को 3 करोड़ 25 लाख 79 हजार 8 सौ 64 के रूप में पढ़ा जाता है ।

तुम ऐसी ही पाँच आठ अंकों वाली संख्याएँ लिखकर उन्हें पढ़ने की कोशिश करो ।

परंतु अंतर्राष्टीय संख्यांकन पद्धति में हजार और नियुत स्थानों के उपरांत अल्प विराम का प्रयोग किया जाता है । जैसे :

50801792, को अल्प विराम के प्रयोग से अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति में 50,801,792 के रूप में लिखा जाता है, परंतु भारतीय संख्यांकन पद्धति में 5,08,01,791 के रूप में लिखा जाता है । इस कक्षा की संख्या से जुड़ी सारी अलोचनाओं में भारतीय संख्यांकन पद्धति का प्रयोग किया गया है ।

> **क्या तुम जानते हो ?**
> किसी संख्या-नाम लिखते समय अल्प विराम का व्यवहार नहीं किया जाता है ।

अभ्यास कार्य 1.2

1. सही स्थानों में अल्पविराम का प्रयोग करते हुए नीचे दी गई संख्याओं को लिखो और हरेक का संख्या नाम लिखो ।

   320418, 7538425, 13247819, 10702000, 53214803

2. तुम सिर्फ 3, 4, 0 और 7 अंकों का प्रयोग करते हुए पाँच-पाँच छह अंकों वाली और आठ अंकों वाली संख्याएँ बनाओ ।

   (क) हर संख्या को आसानी से पढ़ने के लिए अल्पविराम का प्रयोग करो ।

   (ख) संख्याओं को बड़े से छोटे क्रम में सजाकर लिखो ।

3. सिर्फ, 1, 0, 8 और 4 का प्रयोग करते हुए आठ अंको वाली सबसे बड़ी संख्या और आठ अंको वाली सबसे छोटी संख्या बनाओ (हर संख्या में चारों अंको का प्रयोग होना चाहिए ।) तुमसे बनाई गई दोनों संख्याओं को प्रसारित रूप में लिखो ।

4. बैंक में एक हफ्ते के किस दिन कितने रुपए जामा किए गए थे, उसका विवरण दिया गया है । उसे देखते हुए नीच के प्रश्नों के उत्तर दो ।

सोमवार 1,23,64,072	मंगलवार 86,92,945
बुधवार 89,80,001	बृहस्पतिवार 1,08,72,666
शुक्रवार 90,72,709	शनिवार 60,12,010

(क) किस दिन कितना रुपया जमा किया गया था, उसे अक्षरों में लिखो ।

(ख) किस दिन सर्वाधिक रुपए जमा किए गए थे ?

(ग) किस दिन सबसे कम रुपए जमा किए गए थे ?

(घ) किस-किस दिनों में 90 लाख से ज्यादा रुपए जमा किए गए थे ?

5. (क) एक संख्या के लाख के स्थान में 4, अयुत (10,000) के स्थान में 7, हजार के स्थान में 2, सौ के स्थान में 0, दशकके स्थान में 8 और एकक के स्थान में 5 है । उस संख्या को लिखो ।

(ख) सविता ने कागज पर एक संख्या लिखी । उस संख्या की इकाई के स्थान में 5, हजार के स्थान में ,2 सैकड़े के स्थान में 2, लाख के स्थान में 5, अयुत (दस हजार) के स्थान में 3, करोड़ के स्थान में 1, नियुत (दस लाख) स्थान में 7 और दहाई (दशक) के स्थान में 4 था । सविता ने कौन-सी संख्या लिखी थी ?

(ग) जोशेफ ने एक आठ अंकीय संख्या लिखी थी । इसकें हजार के स्थान में 3, करोड़ के स्थान में 7, दहाई और इकाई-दोनो स्थानों में 4 और दूसरे स्थानों में 0 लिखा था । उसने कौन-सी संख्या लिखी थी ? उस संख्या को पलटकर लिखने से कौन-सी संख्या मिलेगी ?

6. (क) 32759084 में 2, 9, 8, 4 का स्थानीय मान लिखो ।

(ख) 375248 में हरेक अंक का स्थानीय मान लिखो ।

इस संख्या को पलटकर लिखने से जो संख्या मिली,

उसके हरेक अंक के स्थानीय मान कितने होंगे ?

(ग) अपने मन से एक आठ अंकीय संख्या लिखो ।

उस सख्या के प्रत्येक अंक का स्थानीय मान लिखो ।

(घ) आठ अंकों वाली वृहत्तम और क्षुद्रतम संख्याएँ लिखो ।

संख्या में मजा

11111111 में अंकों का योगफल है 8,
22222222 में अंकां का योगफल है 16,
33333333 में अंकां का योगफल है 24,
44444444 में अंकां का योगफल है 32
55555555 में अंकां का योगफल है 40
नीचेवाली संख्याओं के अंकों का योगफल कितना होगा, जोड़ न करते हुए बताओ ।
66666666, 77777777,
88888888, 99999999

1.4 कौन आगे, कौन पीछे

शिक्षक ने अन्य पृष्ठ की कोठरियों में स्थित संख्याओं को श्यामपट पर लिखा था । लिखी हुई संख्याओं में से तीन-तीन करके क्रम संख्यारओं को चुनकर एक-एक पंक्ति में लिखने के लिए शिक्षक ने बच्चों से कहा । हरेक पंक्ति की तीन-तीन संख्याएँ छोटे से बड़े क्रम में होनी जरूरी हैं।

532121	421969	6355971	800001
6355970	421970	481717	800000
481716	532122	799999	6355972
532123	421971	481715	

- शिक्षक के निर्देशानुसार तुम संख्याओं को सजाओ ।
- शिक्षक ने कितनी संख्याएँ लिखी थीं ?
- तुमने उन संख्याओं को कितनी पंक्तियों में सजाया ?
- तुमने जरूर एक ही पंक्ति में 532121, 532122, 532123 लिखा होगा । इन तीन संख्याओं में से बीचवाली संख्या कितनी है ? उसकी पूर्ववर्ती और परवर्ती संख्याएँ क्या-क्या हैं ?
- तुम हर पंक्ति में लिखी संख्याओं की बीचवाली संख्या को बताओ । उस संख्या की पूर्ववर्त्ती और परवर्त्ती संख्याओं को लिखो ।

हमने सीखा-

किसी संख्या में 1 जोड़ने से उसकी परवर्त्ती संख्या पाते हैं और किसी संख्या से 1 घटाने से उसकी पूर्ववर्त्ती संख्या पाते हैं ।

खुद करके देखो :

1,23,456 और 1,23,460 की बीचवाली संख्याएँ हैं 1,23,457, 1,23,458, 1,23,459

98,76,539 और 98,76,549 की बीचवाली संख्याएँ हैं ....

46,89,432 और 46,89,437 की बीचवाली संख्याएँ हैं ....

80,04,315 और 80,04,320 की बीचवाली संख्याएँ हैं ....

76,55,458 और 76,55,463 की बीचवाली संख्याएँ हैं ....

79,99,998 और 80,00,003 की बीचवाली संख्याएँ हैं ....

अभ्यास कार्य 1.3

1. उदाहरण में दिखाए जाने की भाँति हर पंक्ति की बीचवाली कोठरी में स्थित संख्या की पूर्ववर्त्ती और परवर्त्ती संख्याएँ लिखो ।

पूर्ववर्त्ती संख्या	संख्या	परवर्त्ती संख्या
9999	10,000	10,001
	10090	
	29999	
	586452	
	358610	
	555555	
	708000	
	999999	

2. (क) किसी संख्या की ठीक परवर्त्ती संख्या और ठीक पूर्ववर्त्ती संख्या के बीच फर्क कितना है ?

(ख) क्या किसी विषम संख्या की परवर्त्ती और पूर्ववर्त्ती संख्याएँ सम होंगी ? एक उदाहरण लेकर देखो ।

(ग) एक करोड़ की पूर्ववर्त्ती और परवर्त्ती संख्याएँ लिखो ।

(घ) अपने मन से पाँच आठ अंकीय संख्याएँ लिखो । हरेक संख्या की पूर्ववर्त्ती और परवर्त्ती संख्याएँ लिखो ।

3. एक तीन अंकीय संख्या लो । उस संख्या की पूर्ववर्त्ती और परवर्त्ती संख्याएँ लिखो । पूर्ववर्त्ती और परवर्त्ती संख्याओं को जोड़ने हुए योगफल को 2 से भाग करो । क्या मिला ? और एक छह अंकीय संख्या लेकर ऐसा कार्य करो ।

1.5 कौन बड़ा, कौन छोटा

पाँच शहरों की जनसंख्याएँ क्रमश: 89392, 72503, 124250, 120878, 210740 हैं। इन शहरों की जनसंख्याओं को बड़े से छोटे क्रम में सजाएँगे ।

- आओ, पहले दो शहरों की जनसंख्याओं की तुलना करेंगे ।

पहले शहर की जनसंख्या = 89392

दूसरे शहर की जनसंख्या = 72503

यहाँ दोनों संख्याएँ पाँच अंकीय हैं । पहली संख्या के अयुत (दस हजार) स्थान के अंक और दूसरी संख्या के अयुत स्थान के अंक कीतुलना करेंगे । $8 > 7$

इसलिए $89392 > 72503$

- अब 89392 और 124250 में तुलना करेंगे ।

यहाँ $124250 > 89392$ (क्यो)

हमने देखा, $124250 > 89392$

और $89392 > 72503$

यदि तीसरी संख्या पहले मिली बड़ी संख्या से छोटे हो, तो उसे पहले मिली छोटी संख्या से तुलना करनी पड़ेगी ।

तीनों संख्याएँ (89392, 72503, 124250) को छोटें से बड़े क्रम में सजाकर लिखने से $72503 < 89392 < 124250$ लिखा जाएगा ।

फिर उन्हें बड़े से छोटे क्रम में सजाकर लिखने से $124250 < 89392 < 72503$ लिखा जाएगा ।

क्या तुम जानते हो ?

- दो संख्याओं के अंकों की संख्या बराबर न होने से जिसके अंकों की संख्या ज्यादा है, वही-बड़ी संख्या है ।
- दो संख्याओं के अंक बराबर होने पर-

(क) दो संख्याओं में से जिसकी बायीं ओर का अंक बड़ा है वह बड़ी है ।

(ख) यदि दो संख्याओं की बायीं ओर के अंक बराबर हों, तो उसके परवर्त्ती दो अंकों की तुलना करते हुए दोनों संख्याओं में बड़ी और छोटी चुनी जाएगी ।

इसी तरह पहले दी गई संख्याओं से दो-दो संख्याओं की लेकर तुलना करो और संख्याओं को बड़े से छोटे क्रम में सजाकर लिखो ।

अभ्यास कार्य 1.4

1. **>, <** और **=** में से सही चिह्न का प्रयोग कीजिए ।

(क)	34587	10000	(ङ)	965842	965742
(ख)	100000	99999	(च)	1278942	999985-2
(ग)	548421+2	548121	(छ)	478007+2	478010-1
(घ)	875600`	915840	(ज)	488007	4880002

2. दो संख्याओं में बड़ी / छोटी पहचानने के लिए निम्नलिखित कौन-सी उक्तियाँ सही हैं ?

(क) दो संख्याओं के अंकों की संख्या बराबर न होने पर जिस संख्या के अंकों की संख्या ज्यादा है, वही संख्या बड़ी है ।

(ख) यदि दो संख्याओं के अंकों की संख्या बराबर है, तब दो संख्याओं की बाईं ओर के दो अंकों में से जिस संख्या की बाईं ओर का अंक बड़ा है, वही बड़ी संख्या है ।

(ग) यदि दो संख्याओं के अंकों की संख्या बराबर है, तो सिर्फ दाईं ओर के दो अंकों की तुलना करके बड़ी और छोटी संख्या चुनी जा सकेगी ।

(घ) यदि दो संख्याओं के अंकों की संख्या बराबर न हो, तो सिर्फ दाईं ओर के घर वाले अंकों की तुलना करके बड़ी संख्या और छोटी संख्या का निर्णय किया जाएगा ।

3. सिर्फ 1 और 0 का व्यवहार करके पाँच आठ अंकीय संख्या बताओ और उन्हें बड़े से छोटे क्रम में सजाकर लिखो ।

1.6 बड़ी संख्याओं में विविध गणितीय संक्रिया :

नीचे दिए गए उदाहरण को देखो -

उदाहरण -1 :

सन 2001 ई. की जनगणना के अनुसार ओड़िशा की जनसंख्या का विवरण नीचे दिया गया है ।

ओड़िशा की जनसंख्या-	=	3,68,04,660
पुरुषों की संख्या-	=	1,86,60,570
महिलाओं की संख्या-	=	1,81,44,090
अनुसूचित जाति की जनसंख्या-	=	60,82,063
अनुसूचित जनजाति की जनसंख्या-	=	81,45,081
शहरांचल में रहने वाली जनसंख्या-	=	55,17,238
ग्रामांचल में रहने वाली जनसंख्या-	=	3,12,87,422

(क) 2001 ई. की जनगणना के अनुसार पुरुषों की संख्या महिलाओं की संख्या से कितनी ज्यादा है ?

उत्तर : पुरुषों की संख्या - = 1,86,60,570

महिलाओं की संख्या- = 1,81,44,090

पुरुषों की संख्या और महिलाओं की संख्या में अंतर = 1,86,60,570 – 1,81,44,090 = 5,16,480

∴ 2001 ई की जनगणना के अनुसार ओड़िशा में पुरुषों की संख्या महिलाओं की संख्या से 5,16,480 ज्यादा है ।

(ख) ओड़िशा के शहरांचल में ग्रामांचल की अपेक्षा कितने कम लोग रहते है ?

ओड़िशा के शहरांचल में रह रहे लोगा की संख्या = 55,17,238

ग्रामांचल में रह रहे लोगों की संख्या = 3,12,87,422

ग्रामांचल और शहरांचल लोगों की संख्या में अंतर =3,12,87,422 – 55,17,238 = 2,57,70,184

∴ ओड़िशा के शहरांचल में ग्रामांचल की तुलना में 2,57,70,184 कम लोग रहते हैं ।

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखो :

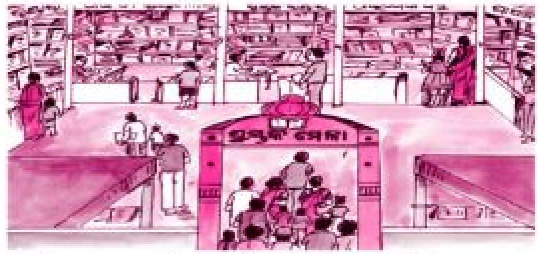
(क) सन् 2001 ई. की जनगणन के अनुसार ओड़िशा की जनसंख्या चार करोड़ से कितनी कम है ?

(ख) सन् 2001 ई. की जनगणना के अनुसार ओड़िशा में अनुसूचित जाति और अनुसुचित जनजाति लोगों में से किनकी संख्या ज्यादा है और कितनी ज्यादा ?

अभ्यास कार्य 1.5

1. पुस्तक मेले में पाँच दिनों में कितने रुपयों की पुस्तकों की बिक्री हुई थी, वह नीचे दी गई है ।

पहला दिन	47,22,780 रुपए
दूसरा दिन	41,01,524 रुपए
तीसरा दिन	72,24,218 रुपए
चौथा दिन	76,55,320 रुपए
पाँचवा दिन	92,70,148 रुपए



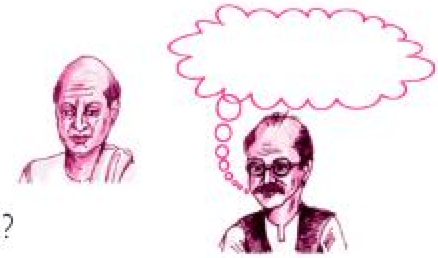
(क) किस दिन सबसे ज्यादा दाम की और किस दिन सबसे कम दाम की पुस्तकों की बिक्री हुई थी ?

(ख) चौथे दिन की तुलना में पाँचवें दिन कितने अधिक रुपए की पुस्तकों की बिक्री हुई थी ?

(ग) पुस्तक मेले में कुल कितने रुपए की पुस्तकों की बिक्री हुई थी ?

(घ) पहले और अंतिम दिनों में से किस दिन कम रुपए की पुस्तकों की बिक्री हुई थी और कितने कम रुपए की पुस्तकों की बिक्री हुई थी ?

2. एक लोकसभा चुनाव में एक विजयी उम्मीदवार ने 5,45,200 वोट पाकर अपने निकटतम उम्मीदार को 1,78,298 वोटों से हराया था । उनके निकटतम उम्मीदवार ने कितने वोट पाए थे ?



3. महेश को 22721 में 18 गुणा करने को कहा गया था । परंतु गलती से उसने 22721 में 81 गुणा कर दिया । उसके पाए उत्तर असली उत्तर से कितना ज्यादा या कम होगा ?

4. एक कील बनानेवाले कारखाने में हर दिन 62,736 कीलों का उत्पादन किया जाता है ।

(क) उस कारखाने में एक हफ्ते में कितनी कीलें उत्पादित होंगी ? (हर हफ्ते में सिर्फ इतवार को कारखाना बंद रहता है ।)

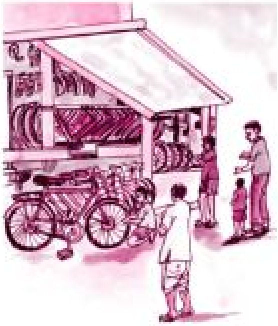
(ख) जुलाई महीने में उसी कारखाने में कितनी कीलें बनेंगी ? (यदि उसी महीने में चार इतवार पड़ते हों)

(ग) 24 कीलों को एक पैकेट में भरकर बेचने के लिए बाहर भेजा जाता था । तो एक हफ्ते में उत्पादित हुई कीलों के कितने पैकेट किए जाएँगे ?

दूसरा अध्याय

संख्याओं के बारे में अधिक जानकारी

पहले अध्याय में हम बड़ी-बड़ी संख्याओं को पढ़ने और लिखने के बारे में जान चुके हैं । संख्याओं में विविध गणितीय संक्रिया (जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग) का व्यवहार करते हुए गणितीय समस्याओं का हल किया है। इस अध्याय में संख्याओं के बारे में और अधिक चर्चा करेंगे ।



2.1 कोष्ठक का व्यवहार

एक साइकिल दुकान में १५ साइकिलें थीं । तीन दिनों में क्रमश: 3, 2 और 4 साइकिल बिक गईं। उसके पास और कितनी साइकिलें बचीं ?

इस प्रश्न का हल दो विधियों में किया गया है । ध्यान दो -

पहली विधि

- कितनी साइकिलें थीं ?
- पहले दिन के बाद कितनी बचीं ?
- दूसरे दिन के बाद कितनी बचीं ?
- तीसरे दिन के बाद कितनी बचीं ?

दूसरी विधि

- किस दिन कितनी साइकिलें बेची गईं?
- तीन दिनों में कुल कितनी साइकिलें बेची गईं ?
- तीन दिनों के उपरांत और कितनी साइकिलें बचीं ?

इन दो विधियों में क्या फर्क है ?

ध्यान दो, पहली विधि में कुल साइकिल-संख्या से पहले दिन बेची गई साइकिल संख्या का घटाव किया गया । प्राप्त वियोगफल से दूसरे दिन में बेची गई साइकिल-संख्या का घटाव किया गया । फिर उस वियोगफल (घटावफल) से तीसरे दिन में बेची गई साइकिल-संख्या का घटाव किया गया ।

परंतु, दूसरी विधि में तीन दिना में बेची गई कुल साइकिल की संख्या का निर्णय करने के बाद उसे पहलीवाली साइकिल-संख्या से घटाव किया गया ।

देखें, प्रश्न को दोनों विधियों में हल किया गया है?

पहली विधि

पहले दिन के बाद बची साइकिल की संख्या	=	15 – 3 = 12
दूसरे दिन के बाद बची साइकिल की संख्या	=	12 – 2 = 10
तीसरी दिन के बाद बची साइकिल की संख्या	=	10 – 4 = 6

तीन दिनों में बेची गई कुल साइकिल संख्या	= 3 + 2 + 4 = 9
तीन दिनों के उपरांत बची साइकिल की संख्या	= 15 – 9 = 6

दूसरी विधि

दूसरी विधि में तीन दिनों में बेची गई कुल साइकिल संख्या को पहले एक संख्या में व्यक्त किया गया है और बाद में पहलीवाली साइकिल संख्या से उसका घटाव किया गया है ।

बची साइकिल संख्या को दूसरे ढंग से 15 – (3+2+4) लिखा जा पाएगा

यहाँ 3, 2 और 4 को इकट्ठा करने के लिए 'कोष्ठक' ( ) चिह्न का प्रयोग किया गया है ।

अब और एक स्थिति की चर्चा करेंगे -

एक कॉपी को 10 रुपए के हिसाब में गीना ने दुकान से 7 कॉपियाँ खरीदीं । उसके भाई शोभन ने उस प्रकार की कॉपियों से 5 कॉपियों खरीदीं । वे दोनों कुल मिलाकर दुकानदार को कितने रुपए देंगे ? इस प्रश्न का उत्तर पाने के लिए सरोज और मीना ने निम्न विधियों से इसका हल किया ।

सरोज का हिसाब

कुल देय = 7 x 10 + 5 x 10
= 70 + 50 = 120

मीना का हिसाब

दोनों से खरीदी गई कुल कॉपियों की संख्या =7+5=112

कुल देय = 12 x 10 = 120

सरोज और मीना-दोनों के हिसाब को लक्ष्य करो । दोनों के उत्तर समान हो ।

लिपि ने कहा - 'मेरा हिसाब देखो । 7 + 5 x 10 रू = 7 + 50 रू = 57 रू

मेरा उत्तर तो उनके उत्तरों से मल नहीं खा रहा है ।

सब संकट में पड़ गए । असल में कौन-सा सही उत्तर है ?

सरोज और मीना को मिले उत्तर सही है ।

बताओ तो सही :

लिपि का हिसाब क्यों गलत हुआ ?

ऐसी स्थिति में प्रश्न को समाधान के लिए कोष्ठक का प्रयोग करने से कार्य अधिक साफ और संक्षिप्त होता है । 7 और 5 के योग को कोष्ठक में रखकर एक संख्या के रुप में लिया जाता है। यह खरीदी गई कुल कॉपियों की संख्या है । कॉपियों की संख्या में १० रु गुणा गया है । इसे भिन्न रुप से लिखेंगे ।

कुल देय = (7 + 5) x 10 रू = 12 x 10 रू= 120 रूपए

हमने क्या सीखा ?

पहले कोष्ठक की सभी गणितीय संक्रियाओं को सरल बनाया जाएगा और बाद में कोष्ठक के बाहर की गणितीय संक्रिया का कार्य किया जाएगा ।

आओ, नीचे दी गई हरेक उक्ति को कोष्ठक के प्रयोग से व्यक्त करेंगे ।

(क) 27 से 2, 5 और 4 के योगफल का घटाव करेंगे ।

(ख) पंद्रह और तीन के योगफल को छह से गुणा करेंगे ।

(ग) दस से तीन कम करते हुए, मिली संख्या को छह से गुणा करेंगे ।

(घ) सात को चार और तीन के योगफल के दो गुणा से भाग करेंगे ।

- नीचे तीन संख्याओं वाली अभिव्यक्ति को ध्यान से देखो ।

$(3+4) \times 7$

कोष्ठक में 3 को 4 से योग किया गया है और योगफल का 7 से गुणा किया गया है ।

हमारे दैनंदिन जीवन की घटनाओं से इसे जुड़ेंगे, जैसे

- रीता सुबह तीन घंटे और रात को चार घंटे पढ़ाई करती है । वह सात दिनों में कितने घंटे पढ़ाई करेगी ?
- एक कोठरी में 3 बस्ते चावल और 4 बस्ते धान थे । सात कोठरियों में कुल बस्तों की संख्या कितनी है ?

ऐसी दो स्थितियों का उदाहरण दो, जिस में $7 \times (8-3)$ का प्रयोग किया जाएगा ।

2.1.1 चार आधारभूत क्रियाओं से एक परिप्रकाश (अभिव्यक्ति) का सरलीकरण ।

नीचेवाली चार संक्रियावाले परिप्रकाश की सरलीकरण विधि को देखो ।

उदाहरण - 1

$$\begin{aligned} 15 \times 10 \div 2 + 9 - 3 &= 15 \times 5 + 9 - 3 \\ &= 75 + 9 - 3 \\ &= 84 - 3 \\ &= 81 \end{aligned}$$

ऊपर दिए गए उदाहरण को देखते हुए निम्न प्रश्नों के उत्तर दो ।

- यहाँ किस गणितीय परिप्रकाश को सरल बनाने को कहा गया है ?
- उस गणितीय परिप्रकाश में किस-किस संख्या और किस-किस गणितीय संक्रिया का प्रयोग हुआ है ?
- सरलीकरण के पहले चरण में किस गणितीय संक्रिया का कार्य किया गया है ?

- दूसरे चरण में किस गणितीय संक्रिया का कार्य किया गया है ?
- गुणन संक्रिया का कार्य खत्म होने के उपरांत किस संक्रिया का कार्य किया गया है ?
- अंत में किस संक्रिया का कार्य किया गया है और उत्तर कितना मिला ?

इससे हमने सीखा कि एकाधिक संक्रियाओं वाले परिप्रकाश को सरल बनाते समय क्रम से भाग, गुणा, भोग और घटाव कार्य किया जाता है,

तुम खुद सरल बनाओं

(क) $14 - 4 \div 2 \times 3$ (ख) $81 \div 9 \times 3 + 4 - 2$

परंतु किसी सरलीकृत प्रक्रिया में यदि कोष्ठक का व्यवहार किया गया हो, तो कोष्ठक वाली प्रक्रिया पहले करनी होती है ।

सरल करो

(क) $15 + (10 \div 5) \times 3 - 3$ (ख) $12 \div (4 \div 2) \times 3$

(ग) $18 \div 3 - (4 - 2)$ (ख) $(6 \times 3) - 9 + (2 \times 3)$

कोष्ठक चार प्रकार के होते हैं।

जैसे - रेखा-कोष्ठक ———

छोटा कोष्ठक ( )

मध्यम कोष्ठक { }

बड़ा कोष्ठक [ ]

क्या तुम जानते हो ?
कई संख्याओं के एक परिप्रकाश में एकाधिक कोष्ठकों का प्रयोग होने पर पहले सबसे अंदरवाले कोष्ठक की संख्याओं का हिसाब किया जाकर क्रमश: सारे कोष्ठकों को हटा दिया जाता है ।

आम तौर पर कोष्ठकों का क्रम निम्न रूप से होता है ।

[{(———)}]

- जिस परिप्रकाश में एक कोष्ठक जरूरी है, वहाँ छोटे कोष्ठक ( ) का प्रयोग किया जाता है ।
- दो कोष्ठकों की जरूरत होने पर छोटे कोष्ठक ( ) और मध्यम कोष्ठक { } का प्रयोग किया जाता है ।
- तीन कोष्ठकों की जरूरत होने पर छोटे कोष्ठक, मध्यम कोष्ठक और बड़े कोष्ठक [ ] का प्रयोग किया जाता है।
- चारों कोष्ठकों की जरूरत की स्थिति में रेखा ——— कोष्ठक, छोटे कोष्ठक, मध्यम कोष्ठक और बड़े कोष्ठक का प्रयोग किया जाता है ।

आओ, निम्नलिखित उदाहरणों में कोष्ठकों का प्रयोग सीखें

उदाहरण-1

$72 \div \{19-(3+7)\}$

निचे प्रश्नों के उत्तर लिखो-

- यहाँ पर किन-किन कोष्ठक का प्रयोग किया गया है ?
- सबसे अंदर कौन-सा कोष्ठक है ?
- इस कोष्ठक में किस गणितीय संक्रिया की गई है और उसका परिणाम कितना है ?

$72 \div \{19-(3+7)\} = 72 \div \{19-10\}$

- परवर्त्ती सरलीकृत कार्य के लिए और कौन-सा कोष्ठक बचा ?
- अब कोष्ठक में स्थित 19 – 10 सरल बनाओ ।

$72 \div \{19-10\} = 72 \div 9$

$= 8$

उदाहरण - 2

सरल बताओ- $20 - [13 - \{7 \div 7 \times 5 - (2-1)\}]$

हल : $20 - [13 - \{7 \div 7 \times 5 - (2-1)\}] = 20 - [13 - \{7 \div 7 \times 5 - 1\}]$

$= 20 - [13 - \{1 \times 5 - 1\}]$

$= 20 - [13 - \{5 - 1\}]$

$= 20 - [13 - 4]$

$= 20 - 9$

$= 11$

अभ्यास कार्य 2.1

1. कोष्ठक का प्रयोग करते हुए लिखो :

(क) 5 और 7 के योगफल को 12 से भाग करो।

(ख) 12 को 5 और 3 के वियोगफल (घटावफल) से भाग करो ।

(ग) 15 से 12 के वियोगफल से 1 अधिक संख्या से 10 का गुणा करो ।

(घ) 133 को 4 और 5 के गुणाफल से 1 कम वाली संख्या से भाग करो।

2. यदि गलती हो तो सही करके लिखो :

(क) $12 \div 4 - 1$ को सरल बनाते समय पहले 12 को 4 द्वारा भाग करना होगा ।

(ख) $(6-3) \times 2$ सरलीकृत करने समय पहले $6-3$ का वियोगफल (घटाव फल) निर्णय करेंगे ।

(ग) $12 - \{8 \div (3 - 1)\}$ को सरल बनाते समय पहले 12 से 8 का घटाव किया जाएगा ।

(घ) $20 \times \{6 \div (3 - 2)\}$ को सरल बनाते समय पहले $6 \div 3$ का किया जाएगा ।

3. **सरल बनाओ :**

(क) $[9 \times \{7 - (2 + 3)\}]$

(ख) $1 - [1 - \{1 - (1 - \overline{1 - 1})\}]$

(ग) $5 - [5 - \{5 - (5 - \overline{5 - 5})\}]$

(घ) $[\{3 \times 2 - (2 \times \overline{6 - 3})\} - \{(15 \div \overline{8 - 3}) + (12 \div \overline{4 - 2})\}]$

2.2 विभाज्याता का नियम

हमने पहले सीखा है कि एक संख्या को किसी दूसरी छोटी संख्या से भाग करने पर एक भागफल मिलता है और एक शेषफल रहता है या फिर कोई शेषफल नहीं रहता है । नीचे दो उदाहरण दिए गए हैं-

$124 \div 2 = 62$ $83 \div 10 =$ भागफल 8 और शेषफल 3 ।

पहली भाग-क्रिया में शेषफल नहीं हैं यानी शून्य है, परंतु दूसरी भाग-क्रिया में शेषफल 3 । हम कहते हैं 124, 2 से विभाज्य है ।

भाग करते हुए कोई संख्या 2 या 3 से पूर्णत: विभाज्य है या नहीं, जान पाते हैं। किंतु बड़ी-बड़ी संख्याओं को 2 या 3 जैसी संख्या से भाग करते हुए वह 'भाजक' से पूर्णत: विभाज्य है कि नहीं, जानने के लिए ज्यादा समय लगता है । इसलिए कोई सख्या 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, या 11 से विभाज्य है या नहीं, जानने के लिए कई नियम है । आओ, उनकी चर्चा करें ।

(क) 2 द्वारा विभाज्यता के नियम

निचली संख्याओं को 2 द्वारा भाग करो । जो संख्याएँ 2 से विभाज्य है, उन्हें स्पष्ट करो ।

20, 32, 33, 44, 55, 59, 76, 48, 91, 37, 95

जो संख्याएँ 2 से विभाज्य हुईं, उनके इकाई घर में कौन-कौन अंक है, बताओ ।

हमने देखा -

जिस संख्या के इकाई स्थान में, 0, 2, 4, 6 या 8 हो वह 2 से विभाज्य है ।

क्या तुम जानते हो ?

जो पूर्ण संख्या 2 से विभाज्य है, उसे सम संख्या कहा जाता है और जो संख्या 2 से विभाज्य नहीं है, वह विषम है ।

खुद करके देखो

- अपनी कॉपी में नीचे की संख्याओं को जैसे दो पंक्तियों में लिखा गया है, वैसे लिखो ।

11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,
21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,	30

- जो संख्याएँ 2 से विभाज्य है, उन पर घेरा घुमाओ ।
- 2 से विभाज्य कोई संख्या और उसकी परवर्त्ती 2 से विभाज्य संख्या में कितना अंतर रहता है, ध्यान दो ।
- 5 और 6 अंकीय दो सम संख्याएँ लेकर ऊपरवाला सिद्धांत सही है या नहीं, परख कर देखा ।

निचले प्रश्नों के उत्तर लिखो :

1. भाग क्रिया न करते हुए निचली संख्याओं में से जो सम संख्याएँ हैं, उन्हें लिखो ।

   120, 497, 6179, 1429, 1689, 18179, 24492, 2988,
   20000, 92723, 4872, 579871, 94700, 4444, 654324

2. (क) ऐसी पाँच और छह अंकीय संख्याएँ लिखो, जो 2 से विभाज्य हों ।

   (ख) 2 से विभाज्य न हो रही पाँच छह अंकीय संख्याएँ लिखो ।

(ख) 3 द्वारा विभाज्यता के नियम

नीचे दी गई हरेक संख्या को 3 से भाग करो-

24, 30, 32, 65, 70, 72, 10, 213, 21, 219, 300
जिन संख्याओं को 3 से भाग करने के बाद कोई शेषफल नहीं रहता है, उन्हें सूचित करो ।

3 से विभाज्य हो रही हरेक संख्या के अंकों का योगफल निर्णय करो ।

3 से विभाज्य न हो रही हरेक संख्या के अंकों का योगफल निर्णय करो ।

अब बताओ, भाग क्रिया न करते हुए कोई 3 से विभाज्य है, कैसे जानोगे ?

हमने सीखा : **जिस संख्या के अंकों का योगफल 3 से विभाज्य है, वह संख्या 3 से विभाज्य है ।**

नीचे प्रश्नों के उत्तर लिखो :

3. (क) 15342, 21304, 30000, 12401 में से कौन-सी संख्याएँ 3 से विभाज्य है, भाजक्रिया न करते हुए बताओ ।

   (ख) 135*27 में स्थित तारे चिह्नित स्थान में कौन-सा अंक लिखने से संख्या 3 से विभाज्य होगी ?

   (ग) 357024 में स्थित शून्य के स्थान पर कौन-सा अंक लिखने से संख्या 3 से विभाज्य नहीं होगी ?

   (घ) तीन आठ अंकीय सख्याओं का उदाहरण दो, जो 3 से विभाज्य होगी ।

   (ङ) तीन आठ अंकीय संख्याएँ लिखो, जो 3 से विभाज्य नहीं होगी ।

   (च) पूर्ववर्त्ती (ग) और (घ) हरेक प्रश्न के लिए कितने उत्तर मुमकिन हैं, पता करो ।

(ग) 4 से विभाज्यता के नियम

120, 125, 310, 312, 318, 410, 416, 515, 600, 620

ऊपर दी गई हरेक संख्या को 4 से भाग करो । कौन-कौन सी संख्याएँ 4 से विभाज्य हुईं ? कौन-कौन सी संख्याएँ 4 से विभाज्य नहीं हुईं?

4 से विभाज्य हरेक संख्या के दशक (दहाई) और एकक (इकाई) अंकों को लेकर बनी संख्याओं की सूची बनाओ ।

4 से विभाज्य न हो रही हरेक संख्या के दशक और एकक अंकों को लेकर बनी संख्याओं को लिखो ।

ध्यान दो,

जिस संख्या के दशक और एकक स्थानवाले अंको से बनी संख्या 4 से विभाज्य है, वही संख्या 4 से विभाज्य है ।

212 के दशक स्थान में 1 और एकक (इकाई) स्थान में 2 है । इन दो स्थानों के अंकों से बनी संख्या 12 है । 12, 4 से विभाज्य है, इसलिए 212 भी 4 से विभाज्य है ।

निम्न प्रश्नों के उत्तर दो :

4. (क) तुम अपने मन से चार चार अंकीय संख्याओं के उदाहरण दो, जो 4 से विभाज्य होंगी ।

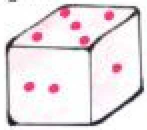
(ख) खाली स्थान में क्या लिखने से संख्या 4 से विभाज्य होगी ?

3142—2, 21343—4, 40036—, 2458342—

क्या तुम्हें पता है ?
जिस संख्या की दाईं ओर दो या दो से अधिक शून्य होते हैं, वे संख्याएँ चार से विभाग हैं।
जैसे :- 300, 500, 800 को लेकर आओ ऊपर दिए गये उस नियम की सत्यता की परीक्षा करें।

(घ) 5 से विभाज्यता के नियम

लूडो खेल में एक बच्चा लूडो का पासा डालते समय आठ बार सिर्फ 5 संख्या आई । यदि लूडो का दाना 0 पर हो, तो हर बार लूडो का पासा डालते समय दाना किस-किस संख्या देकर जाएगा और अंत में कहाँ पहुँचेगा ?



क्या वे संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं ?

इन संख्याओं के इकाई घर में कौन-कौन सी संख्या है ? इकाई घर में 0 और 5 न होनेवाली कई दो या तीन अंकीय संख्याएँ लेकर उन्हें 5 से भाग करो, क्या संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं ? कोई संख्या 5 से विभाज्य हो रही है, कैसे जानेंगे ?

जिस संख्या के इकाई घर का अंक 0 या 5 है, वही संख्या 5 से विभाज्य है ।

ध्यान दो :

$5 \times 1 = 5$
$5 \times 2 = 10$
$5 \times 3 = 15$
$5 \times 4 = 20$ आदि

क्या जानते हो ?
किसी संख्या को 5 से गुणा करने पर गुणनफल का इकाई अंक 5 या 0 होता है ।

निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखो :

5. (क) 5 से विभाज्य हो रही 4 पाँच अंकीय संख्याएँ लिखो ।

(ख) 5 से विभाज्य हो रही 3 संख्याएँ लिखो, जिन संख्याओं को उल्टा लिखने से बन रही संख्या भी 5 से विभाज्य होगी । (उदाहरण - 5386450)

(ङ) 6 द्वारा विभाज्यता के नियम

खुद करके देखो

- उभय 2 और 3 हरेक से विभाज्य हो रही पाँच 3 अंकीय संख्याएँ लिखो, हरेक संख्या को 6 से भाग करो और वे 6 से विभाज्य हुई कि नहीं, देखो ।
- 3 तीन अंकीय संख्याएँ लिखो जो 2 से विभाज्य है परंतु उसे वह विभाज्य नहीं हो रही होंगी ।
- 3 तीन अंकीय संख्याएँ लिखो जो 3 से विभाज्य है परंतु 2 से विभाज्य नहीं हो रही होंगी ।
- निम्न सारणी की तरह तुम अपनी कॉपी में एक सारणी बनाओ । तुम से ऊपर लिखी गई संख्याओं की सारणी के बायीं ओर वाले घरों के नीचे लिखकर सारणी के दूसरे घरों को भरो ।

संख्या	क्या 2 से विभाज्य है ?	क्या 3 से विभाज्य है ?	क्या 6 से विभाज्य है ?

हमने सीखा,

जो संख्या उभय 2 और 3 से विभाज्य है,

वही संख्या 6 से विभाज्य होगी ।

बताओ :
6 से विभाज्य हो रही एक संख्या के किसी भी स्थान में 6 लिखने से जो नई संख्या पाओगे । क्या वह 6 से विभाज्य होगी ?

निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखो :

6. दो छह अंकीय संख्याएँ लिखो जो 6 से विभाज्य हैं।

(च) 8 द्वारा विभाज्यता के नियम

क्या 1808, 3104, 3424 संख्याएँ 8 से विभाज्य हैं ? हरेक संख्या को 8 द्वारा भाग करने के बाद तुम देखोगे कि हरेक संख्या 8 द्वारा विभाज्य है। आओ, इन संख्याओं की विशेषताओं को खोज निकाले ।

इन संख्याओं के सैकड़ो (शतक), दहाई (दशक) और इकाई (एकक) स्थानों वाले अंकों से बनी संख्याओं को ध्यान से देखो। ऐसी संख्याएँ 808, 104 और 242 हैं। ये संख्याएँ भी 8 से विभाज्य हैं ।

अब तुम दो संख्याएँ बनाओ जिनके सैकड़ा, दहाई और इकाई घरों के अंकों को लेकर बनी संख्याएँ 8 से विभाज्य होंगी ।

क्या तुम जानते हो ?

एक, दो, और तीन अंकीय संख्याएँ 8 से विभाज्य हैं या नहीं, जानने के लिए भाग (विभाजन) प्रक्रिया का प्रयोग किया जाता है ।

जिस चार अंकीय या उससे अधिक अंकीय संख्या के सैकड़े, दहाई और इकाई अंकों से बनी संख्याएँ 8 द्वारा विभाज्य है, वही संख्या 8 द्वारा विभाज्य है ।

निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखो ।

7. (क) ५१८, 8 से विभाज्य है । इसकी बायीं ओर दो अंक लिखकर जो नई संख्याएँ पाओगे, क्या वे 8 से विभाज्य होंगी ? परख कर देखो ।

(ख) 3 चार अंकीय संख्याएँ लिखो, जो 8 से विमाज्य होंगी ।

(छ) 9 द्वारा विभाज्यता के नियम :

9 के गुणन है 9,18, 27,36,45, 54, 63 आदि । वैसे ही 5211, 31014, 2232 आदि संख्याएँ भी 9 द्वारा विभाज्य हैं । (परख कर देखो)

ऊपर लिखी गई प्रत्येक संख्या के अंकों के योगफलू की विशेषता पर ध्यान दो ।

1+8=9, 2+7=9, 3+6=9, 4+5=9, 5+4=9, 6+3=9

हरेक संख्या के अंकों का योगफल भी 9 से विभाज्य है ।

निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखो :

8. (क) चार पांच अंकीय संख्याएँ लिखो, जो 9 से विभाज्य होंगी ।

(ख) ऐसी दो चार अंकीय संख्याएँ लिखो जो उभय 6 और 9 से विभाज्य होंगी ।

9. **विभिन्न संख्याओं को लेकर परख कर देखो ।**

क्या 9 द्वारा विभाज्य कोई भी संख्या 3 से विभाज्य है ?

क्या 3 द्वारा विभाज्य प्रत्येक संख्या 9 द्वारा विभाज्य है ?

(ज) 11 द्वारा विभाज्यता के नियम :

121, 308, 1331, 61809, 251130 को 11 द्वारा भाग करो । और ध्यान दो कि क्या ये संख्याएँ 11 से विभाज्य हैं । नीचे दी गई सारणी से इन संख्याओं के अंकों में निहति रिस्ते को ध्यान देंगे और उसकी विशेषता को जानेंगे ।

संख्या	दायीं ओर विषम स्थान में स्थित अंकों का योगफल	दायीं ओर सम स्थान में स्थित अंकों का योगफल	पहले दो घरों में मिले योगफल का अंतर ।
121	1+1= 2	2	2-2=0
308	8+3=11	0	11-0=11
1331	1+3=4	3+1=4	4-4=0
61809	9+8+6=23	0+1=1	23-1=22
251130	0+1+5=6	3+1+2=6	6-6=0

हमने देखा कि हरेक क्षेत्र में अंतर है 0 या 11 के गुणज है । ये सारी संख्याएँ 11 से विभाज्य है ।

अब 89244 को लेंगे । इस संख्या की दायीं ओर से बायीं ओर जाने पर पहले, दूसरे और तीसरे स्थानों के अंक क्रमश: 4, 2 और 8 होंगे; उनका योगफल हुआ 4+2+8=14 । वैसे दूसरे और चौथे स्थान वाले दो अंक हैं 4 और 9, उनका योगफल है 4+9=13।

यहाँ अंतर है 14-13=1, यह संख्या 11 से विभाज्य है या नहीं, परख कर देखो ।

हमने सीखा-

जिस संख्या की दायीं ओर से विषम स्थान वाले अंकों का योगफल और सम स्थान वाले अंकों के योगफल का अंतर शून्य (0) है या 11 के एक गुणान से बराबर है, वह संख्या 11 से विभाज्य है ।

अभ्यास कार्य 2.2

1. विभाज्यता कि नियम प्रयोग करते हुए नीचे दी गई संख्याएँ 2 से, 3 से, 4 से, 5 से, 6 से, 8 से, 9 से, 11 से विभाज्य हैं या नहीं, परख कर देखो और जिस संख्या से विभाज्य हैं, उस संख्या के नीचेवाले घर में सही (√) चिह्न लगाओ।

संख्या	किससे विभाज्य है ?							
	2	3	4	5	6	8	9	11
990								
1586								
400								
6666								
639210								
429714								
2856								
900000								
999999								

2.3 गुणनखंड और गुणज :

तुमने गुणनखंड और गुणज के बारे में पिछली कक्षा में पढ़ा है । आओ, उन्हें याद करें-

- 12 को दो संख्याओं के गुणन के रुप में व्यक्त कर पाएँगे ।

जैसे कि - 12 = 1 x 12

= 2 x 6

= 3 x 4

12 के गुणन खंड हुए - 1, 2, 3, 4, 6 और 12 ।

वैसे ही 18 के गुणन खंड निर्णय करने से पाएँगे - 1, 2, 3, 6, 9 और 18

अब बताओ, कौन सी संख्याएँ 12 और 18 के सार्व गुणनखंड है ।

- अब 8 और 9 के सार्वगुणनखंड निर्णय करेंगे ।

8 के गुणन खंड हुए- 1, 2, 4 और 8, उसी प्रकार 9 के गुणनखंड है- 1, 3 और 9

8और 9 के सार्वगुणनखंड कौन-सी संख्या है?

यहाँ सिर्फ '1' 8 और 9 के सार्व गुणनखंड है ।

ऐसी संख्या-जोड़ा को सह अभाज्य संख्या कहा जाता है ।

8 और 9 दोनों सह अभाज्य संख्याएँ हैं ।

बताओं तो :
तुम दो जोडी परस्पर अभाज्य संख्या बताओ।

- कई संख्याएँ है जिनके सिर्फ दो गुणनखंड है ।

जैसे - 7 के गुणनखंड है 1 और 7 11 के गुणनखंड है 1 और 11

- ऐसे सिर्फ दो ही गुणनखंड वाली संख्या को 'अभाज्य संख्या' कहा जाता है । ऐसे ही तुम और पाँच अभाज्य संख्याओं के उदाहरण दो ।

- जिन संख्याओं के दो से ज्यादा गुणनखंड हैं, उन्हें 'भाज्य संख्या' कहते हैं।

15 के गुणनखंड हैं 1, 3, 5 और 15 । इसलिए 15 एक भाज्य संख्या है । ऐसे ही तुम और चार भाज्य संख्याओं के उदारहरण दो ।

- 4 x 1 = 4, 4 x 2 = 8, 4 x 3 = 12, 4 x 4 = 16......

यहाँ 4, 8, 12, 16........ के 4 एक-एक गुणन हैं ।

वैसे ही 6 के गुणनों का निर्णय कर पाएँगे 6 के गुणज हैं 6, 12, 18, 24.... ।

बताओ तो :
एक संख्या के कितने गुणज हैं ?
एक संख्या का सबसे छोटा गुणज कितना है ?
एक संख्या का सबसे बड़ा गुणज कितना है ?

◆ 3 के गुणज हैं - 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24......

4 के गुणज हैं - 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 ......

3 और 4 के सार्वगुणज हैं - 12, 24 ...... आदि ।

खुद करके देखो

- 6 के गुणन खंडों को लिखो ।
- 6 के गुणनखंडों का योगफल कितना है ?
- 6 का दो गुना कितना है, बताओ ।
- 6 के गुणन खंडों का योगफल और 6 के दो गुणा के बीच क्या संपर्क देखा ?

जिस संख्या के गुणन खंडों का योगफल उसी संख्या के दो गुणा के बराबर है, उसे **संपूर्ण संख्या** कहा जाता है ।

1 से 30 के बीच वाली संख्याओं को लेकर परखो एवं और कौन सी संख्या एक संपूर्ण संख्या है, निर्णय करो ।

गोल्डबाक् तथ्य

4 से बड़ी हरेक मुख्य संख्या को दो अभाज्य संख्याओ के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा पाएगा ।

यथा - 6 = 3 + 3

18 =7+11 आदि

गोल्डबाक नामक एक गणितज्ञ ने सबसे पहले इसे लक्ष्य किया था ।

अभ्यास कार्य 2.3

1. 10 और 30 के बीच वाली 'अभाज्य संख्याओं' को लिखो ।
2. 3, 4, और 5 के तीन सार्व गुणज लिखो ।
3. 60 और 75 के सार्व गुणनखंडों को लिखो ।
4. नीचे दिये गए हरेक कथन को पढ़कर बताओ कि वह सही है या गलत ।

   (सही कारण देकर तुम अपने उत्तर की सार्थकता प्रतिपादित करो)

   (क) किसी संख्या के असीम गुणनखंड हाते हैं।

   (ख) 4 और 9 परस्पर सह अभाज्य संख्याएँ हैं ।

बताओ तो :
1 से 20 के बीच कितनी अभाज्य संख्या हैं।

(ग) कोई संख्या उसी संख्या का क्षुद्रतम गुणनखंड है ।

(घ) 9 और 13 का कोई सार्व गुणनखंड नहीं है ।

(ङ) किसी संख्या के सीमित गुणनखंड होते हैं ।

(च) 12 एक संपूर्ण संख्या है ।

2.4 अभाज्य गुणनखंड

किसी भाज्य संख्या को अनेक प्रकार से गुणनखंडों के गुणाफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है । उदाहरण के रूप में संख्या 60 के गुणनखंडो को हम बस इस तरह लिखते हैं।

(क) 2 x 30	(ख) 3 x 20	(ग) 4 x 15
(घ) 5 x 12	(ङ) 6 x 10	(च) 2 x 2 x 3 x 5

ये गुणनखंड कई प्रकार के होते हैं। पहली, दूसरी और चौथी स्थितियों में गुणनखंडो में से हरेक में एक गुणनखंड अभाज्य है और दूसरा भाज्य; तीसरी और पाँचवीं स्थितियों वाले गुणनखंडों में उभय गुणनखंड भाज्य हैं। परंतु छठी स्थिति वाले गुणनखंडो में हरेक गुणनखंड अभाज्य हैं।

किसी गुणनखंड की अपेक्षा अभाज्य गुणनखंड का महत्व ज्यादा है । किसी संख्या का गुणनखंड निर्णय करते समय भाज्य गुणनखंड कई प्रकार से संभव है । परंतु उस संख्या के अभाज्य गुणनखंड सिर्फ एक प्रकार का है । गुणनखंडों का क्रम बदल सकता है, परंतु गुणनखंड अपरिवर्तित रहेंगे । नीचे वाला उदाहरण देखो ।

$$6 = 2 \times 3 \text{ और } 25 = 5 \times 5$$

इसे संख्या का अनन्य उत्पादकीकरण नियम कहा जाता है ।

उदाहरण-1: संख्या 420 को अभाज्य गुणनखंड में विश्लेषण करो ।

हल : संख्या 420, 2 द्वारा विभाज्य है और सबसे छोटी अभाज्य संख्या है ।

इसलिए, 420 = 2 x 210

फिर से 210 = 2 x 105

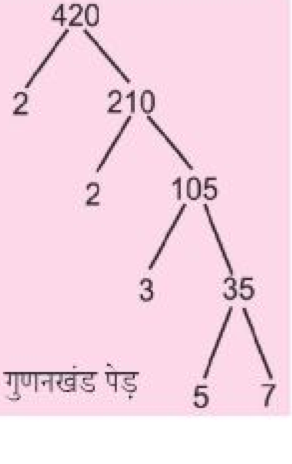
इसलिए 420 = 2 x 2 x 105

105 एक भाज्य संख्या है जो 3 से विभाज्य है और 105 = 3 x 35

इस तरह, 420 = 2 x 2 x 3 x 35

अब भी 35 एक भाज्य संख्या है जिसे 5 x 7 के रूप में खिा जाएगा ।

इस तरह, 420 = 2 x 2 x 3 x 5 x 7



गुणनखंड पेड़

यहाँपर सारे गुणनखंड अभाज्य है। इसलिए हमने 420 को अभाज्य गुणनखंड में विश्लेषण किया । उपर्युक्त विधि को हम निम्न रूप से दिखा पाएँगे ।

2	420
2	210
3	105
5	35
	7

$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$

उत्तर लिखो :

(क) पाँच अंकीय सब से क्षुद्रतम संख्या लिखो और उसे अभाज्य गुणनखंडों में विश्लेषण करो ।

(ख) 4 अंकीय सबसे वृहत्तम संख्या लिखो और इसे अभाज्य गुणनखंडों में विश्लेषण करो ।

(ग) 1729 के अभाज्य गुणनखंड निर्णय करो और उन्हें आरोही क्रम में सजाकर लिखो । इससे गुणनखंडों में स्थित संबंध स्पष्ट करो ।

2.5 महत्तम समापवर्त्तक (म.स)

दो या दो से ज्यादा संख्याओं का महत्तम समापवर्तक यानी म.स. एक अद्वितीय संख्या है ।

- जो हरेक संख्या का गुणनखंड है यानी यह सारी संख्याओं का सार्व गुणनखंड होता है और ।
- सारे सार्व गुणनखंडों में सबसे बड़ा होता है ।

उदाहरण के लिए; आओ, संख्या 12 और 16 के बारे में विचार करें ।

12 के गुणनखंड हैं : 1, 2, 3, 4, 6, 12

16 के गुणनखंड हैं : 1, 2, 4, 8, 16

यहाँ सार्व गुणनखंड यानी उभयनिष्ठ गुणनखंड हुए 1, 2 और 4 । इनमें से 4 सबसे बड़ा सार्व (उभयनिष्ठ) गुणनखंड है यानी संख्या 12 और 16 का महत्तम समापवर्तक 4 है ।

दो या दो से ज्यादा संख्याओं का म.स. जानने के लिए आम तौर पर जिस विधियों का प्रयोग किया जाता है, वे हैं अभाज्य गुणनखंडों में विश्लेषण विधि, सार्व विभाजन विधि, और लगातार विभाजन विधि । अब हम इन विधियों के बारे में विचार करेंगे ।

2.5.1 अभाज्य गुणनखंडों में विश्लेषण विधि :

यह विधि तीन चरणों में हुआ करती है :

चरण - 1 : दी गई संख्याओं में से हरेक को अभाज्य गुणनखंडो में विश्लेषण करो (अभाज्य गुणनखंडो के गुणनफल के रूप में लिखो)

चरण - 2 : सभी गुणनखंडों में से सार्व अभाज्य गुणनखंड लो ।

चरण - 3 : तुम्हें प्राप्त हुए सार्व गुणनखंडों का गुणनफल निर्णय करने से महत्तम समापवर्तक पाओगे ।

उदाहरण - 1 : संख्या 24 और 40 का म.स. निर्णय करो ।

हल : चरण-1 : 24 = 2 x 2 x2x3

40=2 x 2 x2 x 5

चरण -2 : सार्व अभाज्य गुणनखंड हुए 2, 2 और 2

चरण-3 म.स. =2x2x2=8

उदाहरण - 2 : 144, 180, 192

हल : चरण - 1: 144=2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3

180=2x 2 x3 x3 x5

192=2 x 2 x2x2 x 2 x2x 3

चरण - 2 - सार्व अभाज्य गुणनखंड हैं 2 और 3

चरण-3 - म.स. =2x2x3=12

उदाहरण - 3 :27 और 80 का म.स. निर्णय करो ।

हल : चरण - 1 27 = 3 x 3 x3

80=2x2x2x2x5

चरण - 2 : यहाँ कोई भी गुणनखंड सार्व या उभयनिष्ठ नहीं हैं । इसलिए म.स. 1 है ।

2.5.2. क्रमिक विभाजन विधि

सार्व विभाजन विधि में २४ और ४० का म.स. निम्न रूप से निर्णय किया जाता है ।

2	24,	40
2	12,	20
2	6,	10
2	3,	5

दोनो संख्यांएँ जिस अभाज्य संख्या से विभाज्य हैं, उसी संख्या द्वारा उभय संख्याओं को क्रमिक रूप से भाग किया जाता है ।

म.स. =2x2x2=8

उपर्युक्त दोनों विधियों से म.स. जानने के लिए हमें हरेक संख्या को अभाज्य गुणन खंडो में विश्लेषण करना चाहिए । छोटी-छोटी संख्याओं के क्षेत्र में यह कार्य आसान होता है । परंतु बड़ी-बड़ी संख्याओं के क्षेत्र में यह कार्य यानी अभाज्य गुणनखंडों का विश्लेषण करने का कार्य उतना आसान नहीं होता । इसी स्थिति में म.स. जानने के लिए हम एक विकल्प विधि, लगातार **विभाजन विधि** का प्रयोग करते हैं ।

क्या जानते हो ?
जब दो संख्याओं में कोई गुणनखंड अभयनिष्ठ नहीं होता, तब म.स. 1 होता है । ऐसी संख्या को आपसी अभाज्य कहा जाता है ।

2.5.3. लगातार विभाजन विधि

इस विधि से हम दो संख्याओं का म.स. निम्न चरणों से पा सकेंगे ।

चरण 1 : बड़ी संख्या छोटी संख्या से भाग करते हुए शेषफल निर्णय करो ।

चरण 2 : यदि शेषफफू शून्य (0) होता है, तब छोटी संख्या म.स. है । परंतु यदि शेषफल शून्य (0) नहीं होता, छोटी संख्या को पिछले शेषफल से भाग करते हुए नया शेषफल निर्णय करो ।

चरण 3 : यदि नया शेषफल शून्य होता है तो पिछला भाजक म.स. है । यदि शेषफल शून्य नहीं होता, पिछले भाजक को इसे शेषफल से भाग करो । यह विधि लगातार करते चलो । जहाँ पर शेषफल शून्य होगा, वहाँ कार्य खत्म होगा । शेषफलू शून्य होने से अंतिम भाजक म.स. होगा ।

उदाहरण - 4 : 24 और 40 का म.स. निर्णय करो ।

हल :

चरण - 1
```
24)40(1
   24
   --
```

चरण - 2
```
16)24(1
   16
   --
```

चरण - 3
```
8)16(2
  16
  --
   0
```

बताओ :
अभाज्य गुणनखंडों की विश्लेषण विधि में 24 और 40 का म.स. कितना होगा ?

इस तरह 24 और 40 का म.स. 8 है ।

यदि दो से ज्यादा संख्याएँ हों तो पहले हम किसी भी दो संख्याओं का म.स. निकालेंगे । उसके बाद बची संख्याओं में से एक संख्या और पिछले म.स. का म.स. निर्णय करेंगे । सारी संख्याओं का विचार न होने तक यह विधि बार-बार करते चलो । अंतिम म.स. ही निर्णय म.स. होगा । इस अंतिम म.स. संख्याओं के क्रम पर निर्भर नहीं करता । परंतु यदि हम संख्याओं को आरोही क्रम में लेंगे, तो कार्यविधि आसान हो जाएगी ।

उदाहरण - 5 : 144, 180 और 192 का म.स. निर्णय करो ।

हल :

```
144)180(1
     144
     36)144(4
        144
          0
```

144 और 180 का म.स. 36 है । अब हम 36 और 192 का म.स. निर्णय करेंगे ।

```
36)192(1
   180
   12)36(3
      36
       0
```

36 और 192 का म.स. 12 है ।

∴ 144, 180 और 192 का म.स. 12 है ।

अभ्यास कार्य 2.4

1. 65610 संख्या 27 से विभाज्य है । 65610 के निकटतम ऐसी दो संख्याएँ निकालो जो २७ से विभाज्य है ।

2. दो क्रमिक संख्याओं का म.स. निर्णय करो ।

3. किस वृहत्तम संख्या से 245 और 1029 को भाग करने पर हरेक स्थिति में 5 शेषफल रहेगा ?

4. दो टैंकरों में क्रमश: 850 लीटर और 680 लीटर पेट्रोल आता है । तुम ऐसा एक पेट्रोल रखा जाने वाला पात्र लाओगे, जिसके हरेक टैंकर का पेट्रोल पूर्ण रूप से माप किया जा सकेगा ।

5. किस वृहत्तम संख्या से 398, 436 और 542 को भाग करने पर क्रमश: 7, 11 और 15 शेषफल रहेगा ?

   (सूचना : 398–7, 436 – 11, 542 – 15 का म.स. निर्णय करो)

6. एक कोठरी की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 5 मी. 25 से.मी, 6 मी. 75 से.मी. और 4 मी. 50 से.मी. है । तुम ऐसी एक वृहत्तम लाठी लाओ, जिससे कोठरी की लंबाई, चोड़ाई, और ऊँचाई पूर्ण रूप से मापी जा पाएँगी ।

7. उदाहरण लेकर प्रत्येक उक्ति सही है या नहीं, परख कर देखो ।

   (हरेक उक्ति के लिए तीन उदाहरण लो)

   (क) दो अलग अभाज्य संख्याओं का म.स.1 है ।

   (ख) दो आपसी अभाज्य संख्याओं का म.स.1 है ।

   (ग) एक सम संख्या और एक विषम संख्या का म.स. एक सम संख्या होता है ।

   (घ) दो क्रमिक सम संख्याओं का म.स.2 है ।

   (ङ) दो क्रमकि विषम संख्याओं का म.स. 2 है ।

2.6 लघुत्तम समापवर्त्तक (ल.स.)

दो या दो से ज्यादा संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्तक (ल.स.) वही संख्या है, जो

- इन सभी संख्याओं का एक गुणज है ।
- सभी सार्व गुणजों में सबसे छोटा होता है ।

बताओ :
क्या दो संख्याओं के सार्व गुणजों में बड़े गुणज का निर्णय कर पाओगे ?

उदाहरण के लिए, 8 के गुणज है 8, 16, 24 ....

और 12 के गुणज है 12, 24, 36 ....

यहाँ सार्व गुणज है -24, 28... इनमें से सबसे छोटी संख्या 24 है । इसलिए 8 और 12 का ल.स. 24 है । ध्यान दो, ल.स. 24 संख्या 8 और 12 से बड़ी है । ल.स. के निर्णय के लिए आम तौर पर दो विधियों का प्रयोग किया जाता है । ये विधियाँ हैं : अभाज्य गुणनखंड विधि और सार्व विभाजन विधि ।

2.6.1 अभाज्य गुणनखंडों में विश्लेषण विधि

इस विधि मे हम हरेक संख्या को अभाज्य गुणनखंडों के गुणाफल के रूप में लिखते हैं। दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडों की तुलना करते हुए उनमें हरेक गुणनखंड सर्वाधिक जितनी बार रहता है, उतनी बार लिया जाता है और उन्हें गुणा किया जाता है । यही गुणाफल ही ल.स. होगा ।

नीचे के उदाहरण देखो :

उदाहरण - 1 ल.स. निर्णय करो ।

(क) 24 और 40 का (ख) 40, 48 और 75 का

हल : (क) यहाँ $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

और $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

यहाँ अभाज्य गुणनखंड हैं 2, 3 और 5 । प्रदत्त संख्याओं में गुणनखंड 2 की सर्वाधिक संख्या 3 की सर्वाधिक संख्या 1 और 5 की सर्वाधिक संख्या 1 है ।

अत: ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$

(ख) यहाँ $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$75 = 3 \times 5 \times 5$

यहाँ अभाज्य गुणनखंड हैं 2,3 और 5 अत: ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 1200$

2.6.2. क्रमिक भागक्रिया विधि

इस विधि से हम निम्न रूप से ल.स. निर्णय करते हैं ।

- सारी संख्याओं को अलग-अलग करके एक पंक्ति के लिखते हैं ।
- हम ऐसी अभाज्य संख्या निर्णय करते हैं, जिस से पूर्वोक्त पंक्ति में लिखी गई संख्याओं में से कम से कम एक संख्या विभाज्य हुई होगी ।
- इस अभाज्य संख्या द्वारा विभाज्य हुई संख्या को भाग करते हुए भागफल को उसी संख्या के नीचे दूसरी पंक्ति में लिखा जाता है । जो संख्या इस अभाज्य संख्या से विभाज्य नहीं है, उसे दूसरी पंक्ति मे उस प्रकार लिखा जाता है ।
- यहाँ पर और बाद वाले चरण में दूसरे और तीसरे चरणों की प्रक्रिया प्रयोग करते हुए परवर्त्ती पंक्ति को जाएँगे । जब सभी स्थानों में 1 मिलेगा, तब यह प्रक्रिया खत्म होगी ।
- इस तरह प्राप्त हुए सभी अभाज्य -भाजक का गुणनफफा ही ल.स. है ।

उदाहरण - 2 संख्या 20, 25, 30 और 40 का ल.स. निर्णय करो ।

हल : संख्याएँ हुई: 20, 25, 30 और 40

2	20,	25,	30,	40,
2	10,	25,	15,	20,
2	5,	25,	15,	10,
3	5,	25,	15,	5,
5	5,	25,	5,	5,
5	1,	5,	1,	1,
	1,	1,	1,	1,

क्या तुम जानते हो ?
अभाज्य भाजक निर्णय करते समय उन्हें छोटे से बड़े क्रम में लेने से काम संक्षिप्त होगा ।

ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 600$

उदाहरण - 3 : किस क्षुद्रत्तम संख्या को 12, 16, 24 और 36 से अलग-अलग भाग करने से हर स्थिति में शेषफल 7 रहेगा ।

हल : जिस क्षुद्रतम संख्या को 12, 16, 24 और 36 से भाग करने पर हरेक स्थान में 0 शेषफल रहता है। 0 वही का ल.स. है । इसलिए - निर्णीय संख्या ल.स. से 7 ज्यादा है ।

12, 16, 24 और 36 का ल.स. कितना है, निर्णय करके बताओ ।

तुमने जरूर ही ल.स. 144 पाया होगा ।

इसलिए निर्णय संख्या = 144 + 7 = 151

2.7 म.स. और ल.स. की विशेषताएँ

- किह्नी प्रदत्त संख्याओं का म.स. उन्ही संख्याओं में सबसे छोटी संख्या के बराबर है या उससे छोटा होता है ।
- किन्हीं प्रदत्त संख्याओं का ल.स. उन्ही संख्याओं में से बड़ी संख्या के बराबर है या उससे बड़ा होता है ।
- दो संख्याओं का म.स. द्वारा उनका ल.स. विभाज्य है । यानी दोनों संख्याओं का ल.स. उनके म.स. का एक गुणज है ।
- यदि दो संख्याओं का म.स. उन दोनों संख्याओं में से किसी एक के बराबर होता है, तो उन दोनों संख्याओं का ल.स. दूसरी संख्या के बराबर होता है ।
- दो अभाज्य संख्याओं का ल.स. उन दोनों संख्याओं का गुणनफल के बराबर है ।

उपर्युक्त हरेक विशेषता की सच्चाई जानने के लिए दो-दो संख्याएँ लेकर उनका म.स. और ल.स. निर्णय करते हुए परखो ।

• खुद करके देखो

- किसी भी दो सख्याएँ लो, उन दोनों को आपनी कॉपी में लिखो ।
- ली गई दोनों संख्याओं का म.स. निर्णय करो ।
- ली गई दोनों संख्याओं का ल.स. निर्णय करो ।
- प्राप्त हुए ल.स. और म.स. का गुणनफल निर्णय करो ।
- अब तुम ली गई दोनों संख्याओं का गुणनफल कितना है, तय करो ।
- दोनों संख्याओं के गुणनफल के साथ ल.स. और म.स.के गुणनफल का क्या संपर्क देख रहे हो, बताओ?
- इसी तरह और दो संख्या-जोड़ियों को लेकर उपर्युक्त चरणों में काम करो ।

उपर्युक्त काम से तुमने जरूर ही लक्ष्य किया होगा कि

ल.स X म.स. दोनों संख्याओं का गुणनफल है

बताओ :

- दोनों संख्याओं का गुणनफल और उनका ल.स. दिए जाने पर क्या तुम दोनों संख्याओं का म.स. निर्णय कर पाओगे ? कैसे ?

उदाहरण - 1

दोनों संख्यांओं का म.स. 5 और ल.स. 280 है । यदि एक संख्या 35 हो तो दूसरी संख्या कितनी है ?

हल : ल.स. × म.स. = 280 × 5 = 1400

∴ पहली संख्या × दूसरी संख्या = 1400

पहली संख्या 35 है ।

∴ 35 × दूसरी संख्या = 1400

इसलिए दूसरी संख्या = 1400 ÷ 35 = 40

बताओ :
यदि दो आपसी अभाज्य संख्याओं का गुणनफल २१ हो, तो दोनों संख्याओं का ल.स. कितना है ?

उदाहरण - 2

दोनों संख्याओं का गुणनफल 3000 है । यदि दोनों संख्याओं का म.स. 10 हो, तो ल.स. निर्णय करो ।

हल : ल.स. × म.स. = दोनों संख्याओं का गुणनफल ।

यहाँ दोनों संख्याओं का म.स. 10, दोनों संख्याओं का गुणनफल = 3000

∴ 10 × ल.स. = 3000

इसलिए ल.स. = 3000 ÷ 10 = 300

अभ्यास कार्य 2.5

1. यदि दो संख्याओं का ल.स. 16 और उन दोनों का गुणनफल 64 हो, तो उनका म.स. निर्णय करो ।

2. क्या तीन संख्याओं का गुणनफल हमेशा उसके ल.स. और म.स. के गुणनफल के बराबर है ।

3. दो संख्याओं के म.स. और ल.स. क्रमश: 13 और 1989 है । यदि उनमें से एक संख्या 117 हो, तो दूसरी संख्या कितनी है ?

4. क्या दो संख्याओंका म.स. 14 और ल.स. 204 हो पाएगा ? सकारण उत्तर दो ।

5. एक विद्यालय की छठवीं कक्षा में दो विभाग हैं । वे हैं A और B । A विभाग के छात्र-छात्रा हर 32 दिनों के अंतराल में प्रतियोगिता का आयोजन करते हैं । B विभाग के छात्र-छात्रा यही प्रतियोगिता का आयोजन 36 दिनों के अंतराल में करते हैं । दोनों विभाग साल के आरंभ के पहले दिन प्रतियोगिता का आयोजन करते हैं । यहाँ क्षुद्रतम दिनों की संख्या निर्णय करो, कितने दिनों के उपरांत दोनों विभागों की प्रतियोगिता एक ही दिन में होगी ।

6. 10,000 के निकटतम दो संख्याएँ निर्णय करो, जो 2, 3, 4, 5, 6 और 7 हरेक द्वारा पूर्णत: विभाज्य होंगी ।

तीसरा अध्याय

ज्यामिति की मुलभूत अव धारणाएँ

3.1 हमने जो सीखा है

हम पिछली कक्षाओं में विविध प्रकार के समतलिक यानी द्विआयामी चित्रों से परिचित हुए हैं । त्रिभुज, आयत चित्र, वर्ग चित्र जैसे समतलिय चित्रों के शीर्ष बिंदु, भुणाएँ, कोण आदि पहचान चुके हैं । कई प्रकार के त्रिआयानी आकृतियाँ जैसे : घन और घनाभ से परिचित हुए हैं।

वृत्त जैसे वक्ररेखा से बने चित्र से परिचित होने के साथ-साथ इसके केंन्द्र, त्रिज्या और व्यास को पहचानना सीखा है ।

विविध मापों वाले कोणों के वर्गीकरण के बारे में भी पढ़ा है । आओ, उन्हें याद करें ।

अभ्यास कार्य 3.1

1. एक त्रिभुज का अंकन करते हुए उसका नाम दो । उसके शीर्षबिन्दु, कोणों और भुजाओं के नाम लिखो ।
2. वृत्त में उसके त्रिज्या और केंन्द्र को दिखाओ ।
3. निम्न माप वाले कोणों को न्यूनकोण, समकोण, अधिककोण में वर्गीकरण करो ।

$30^{\circ}, 175^{\circ}, 90^{\circ}, 45^{\circ}, 89^{\circ}, 115^{\circ}, 95^{\circ}, 20^{\circ}$

3.2 ज्यामिति की कई मूलभूत अवधारणाएँ

आधुनिक युग में किए जा रहे निर्माण कार्य जैसे - बाँध निर्माण, कारखाना निर्माण, मकान निर्माण आदि के साथ जमीन की माप के साथ दूसरी त्रिआयामी वस्तुओं का मापन भी ज्यामिति से जुड़ी है । इन्हें नजर में रखते हुए ज्यामिति की रूपरेखा को व्यापक बनाया गया है ।

क्या तुम जानते हो ?
ज्यामिति गणित शास्त्र का एक प्रमुख हिस्सा है । 'ज्यामिति' शब्द 'ज्या' और 'मिति' शब्दों के मेल से बना है । 'ज्या' का अर्थ 'भूमि' है और 'मिति' का अर्थ 'मापन' है । इससे पता चलता है कि भूमि के मापन से जुड़े विचार से ज्यामिति शास्त्र की उत्पति हुई है ।

हमारे दैंनदिन जीवन में व्यवहृत घर, पोषाक, वस्तु तथा अन्य सारे सामानों के निर्माण-क्षेत्र में ज्यामिति संपर्कित ज्ञान हमें मदद पहुँचाता है । बच्चों को ज्यामितीय तथ्यों की अवधारणा प्रदान के लिए हमेशा स्थूल वस्तुओं की अवधारणा से शुरू करके सूक्ष्म वस्तुओं के ज्यामितीय तथ्यों की अवधारणा प्रदान करने का प्रयास किया गया है ।

3.2.1 बिंदु :

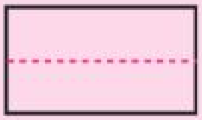
कलम या पेंसिल की नोंक की मदद से कागज के पन्ने पर एक दाग (.) दे देने से उसे हम एक बिंदु कहेंगे । मैदान के एक गोलपोस्ट गाड़ने के लिए क्रीड़ा शिक्षक जो चिह्न देते हैं, क्या उसे एक बिंदु कहेंगे या नहीं, सोचो ? बगीचे में कहाँ पर एक पौधा रोपण किया जाएगा, वह स्थान चिह्नित करने के लिए जो चिह्न दिया जाता है, क्या उसे बिंदु कहेंगे ?

शिक्षक चक् से श्यामपट्ट पर जिस आकार का दाग देकर उसे बिंदु कहते हैं, यदि तुम अपनी कॉपी में उसी आकार का बिंदु दिखाने से शिक्षक क्यों उसे अस्वीकार करते हैं? (पूछकर पता करो)

ज्यामितीय तथ्यों पर विचार करने के लिए एक बिंदु का आकार कितना बड़ा है, उसके बारे में जानने की जरूरत नहीं है । बिंदु के बारे में जो सीखा, उसी जानकारी को ज्यामिति के क्षेत्र में कैसे व्यवहार कर पाएँगे, वह बाद में पढ़ेंगे ।

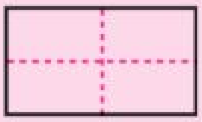
खुद करके देखो

एक कागज लेकर चित्र में दिखाए जाने की तरह उसे लंबाई की दिशा में मोड़ दो ।



फिर इसे चौड़ाई की दिशा में मोड़ दो ।

दो मोड़े हुए चिह्न जहाँ आपस को छेद कर रहे हैं, वह स्थान एख बिंदु है ।

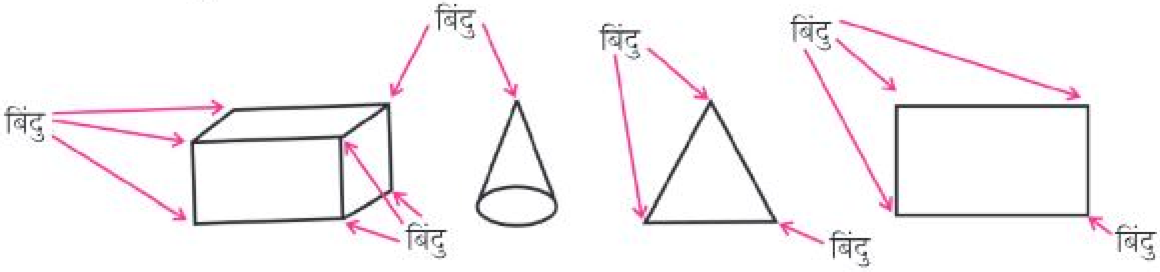


हरेक मोड़ का चिह्न एक रेखा का रूप लेता है ।

इसलिए हमने सीखा -

दो रेखाओं का छेदबिंदु एक बिंदु है ।

हम कहाँ बिदुओं को देखते हैं ।

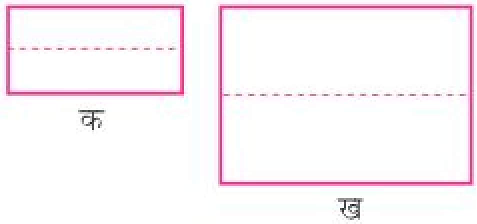


एक घनाभ का हरेक शीर्ष एक-एक बिंदु है । एक कोण का शीर्ष एक बिंदु है । एक त्रिभुज या आयत चित्र का हरेक शीर्ष भी एक-एक बिंदु है ।

तुम अपनी चारों ओर कहाँ-कहाँ बिंदु बनता देख रहे हो, लिखो ।

3.2.2 सरल रेखा

संलग्न चित्र 3.1 (क) में एक छोटे कागज को मोड़कर उस पर बने मोड़ का चिह्न दिखाया गया है । वैसे ही चित्र 3.1 (ख) में एक बड़े कागज पर भी मोड़ा गया चिह्न दिखाया गया है । उससे पता चलता है कि कागज जितना बड़ा होगा, उसके ऊपर मोड़वाला चिह्न उतना बड़ा होगा ।



चित्र 3.1

मान लो, ऐसा एक कागज का टुकडा है, जिसकी लंबाई इतनी ज्यादा है कि उसे मापा नहीं जा पाएगा । उस कागज के टुकड़े को मोड़ने से उस पर जिस मोड़ का चिह्न बनेगा, उसका अंत कहाँ होगा, जानना संभव नहीं है । ऐसे एक मोड़ का चिह्न निम्न चित्र के रूप में दिखाया जा सकता है ।

चित्र 3.2

यहाँ का हरेक तीर वाला चिह्न चित्र के असीम विस्तार को सूचित कर रहा है । चित्र 3.2 में दिखाए गए चित्र को हम एक सरल रेखा मान लेते हैं ।

3.2.3 सरल रेखा और बिंदु के बीच संबंध

असंख्य बिंदुओं के मिलन से एक सरल रेखा का बनना हमने मान लिया है । दो बिंदुओं के व्यवहार से हम एक सरलरेखा का नामकरण करते हैं। चित्र 3.3 वाली सरल रेखा उपरिस्थ दो बिंदुओं A और B के रूप में नामित किया गया है। यहाँ सरलरेखा को AB सरलरेखा कहा जाता है। सरलरेखा AB को $\overleftrightarrow{AB}$ संकेत लिखकर व्यक्त किया जाता है ।

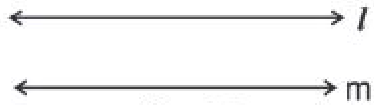
चित्र 3.3

चित्र 3.4

चित्र 3.4 वाली सरलरेखा उपरिस्थ तीनों बिंदुओं को A, B, C के रूप में नामित किया गया है और इस स्थिति में सरलरेखा को $\overleftrightarrow{AB}$ सरलरेखा या $\overleftrightarrow{AB}$ या AC सरलरेखा या $\overleftrightarrow{AC}$ सरलरेखा या के BC रूप में नामित किया जा सकता है ।

सरल रेखा दोनों दिशाओं में अनिश्चित रुप से विस्तृत होती है, इसे सूचित करने के लिए इसकी दोनों दिशाओं में दो तीर चिह्न दिए जाते हैं। अनेक बार अंग्रेजी का छोटा अक्षर लिखकर भी एक सरलरेखा का नामकरण किया जाता है ।

जैसे चित्र 3.5 में दिखा दिया गया है । चित्रों में से एक को *l* रेखा और दूसरे को *m* रेखा के रूप से नामित किया गया है ।

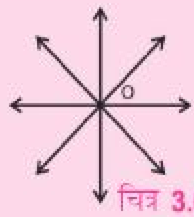


चित्र 3.5

क्या जानते हो ?

सरल रेखा को हम रेखा भी कहते हैं। सरल या सीधी न होने वाली रेखा को 'वक्ररेखा' कहते हैं । वक्ररेखा के कई नमूने नीचे दिए गए हैं।

खुद करके देखो



चित्र 3.6

- अपनी कॉपी के एक पन्ने पर एक बिंदु लेकर उसका नाम दो 0।
- 0 बिंदु लेकर एक सरल रेखा अंकन करो ।
- 0 बिंदु से होकर और एक सरल रेखा का अंकन कर पाओगे ?
- यदि करपाना हो तो 0 बिंदु से होकर और एक सरल रेखा भी अंकन करो ।
- 0 बिंदु से होकर दो सरल रेखओं का अंकन करने के उपरांत उस बिंदु से होकर यदि और सरलरेखा अंकन कर पाते हो तो अंकन करो । चित्र 3.6 का वैसा एक चित्र पाया होगा ।
- अब बताओ, एक बिंदु से होकर कितनी सरल रेखाएँ अंकन की जा पाएँगी ?

इस कार्य से हमने क्या सीखा ?

- एक बिंदु से होकर असंख्य सरल रेखाएँ अंकन की जा सकती हैं?
- एक बिंदु से होकर तीन या उसे ज्यादा संख्यक सरल रेखाएँ अंकन होने पर उन्हें एकबिंदुगामी रेखा कह जाता है ।

खुद करके देखो

- अपनी कॉपी में A और B नाम से दो अलग-अलग बिंदुओं को सूचित करो । A बिदु से होकर कई रेखाएँ अंकन करो ।
- A बिंदु से होकर अंकन की गई रेखाओं में से कोई रेखा B से होकर अंकन कर सके ?

A B

- दो भिन्न बिंदुओं से होकर कई सरल रेखाओं का अंकन किया जा सकती है क्या?

हमने सीखा **एक समतल उपरिस्थ दो अलग-अलग बिंदुओं से होकर सिर्फ एक सरल रेखा का अंकन किया जा सकता है।** इसी बजह से एक सरलरेखा को उपरिस्थ दोनों बिंदुओं से नामित किया जाता है ।

अपनी कॉपी का हरेक पन्ना एक-एक समतल है । पक्के मकान की दीवार, पढ़ाई-टेबल का ऊपरी भाग आदि समतल के नमुने हैं । पृथ्वी गोलावृत होने पर पर भी इसके पृष्ठभाग का एक छोटा-सा अंश हमारी आंखों में पड़ने के कारण यह हमें समतल जैसा जान पड़ता है । इसलिए तुम्हारा खेल-मैदान भी एक समतल-सा दीखता है । आओ, नीचे दिये गये कार्य करें-

- अपनी कॉपी के एक पन्ने पर कई बिंदुओं का चिह्न दो । जरूर ही अनेक बिंदुओं का चिह्न दे चुके होंगे ।
- अपने पास बैठे बच्चे की कॉपी से मिलाकर बताओ, किसकी कॉपी में ज्यादा बिंदुओं का चिह्न है ?
- सीमा ने अपनी कॉपी और रानु की कॉपी को देखकर कहा -

''हम अपनी कॉपियों में इतने बिंदु दे चुकी हैं
जिन्हें गिनता मुमकिन नहीं है ।''
सीमा ने कहा - ''रानु, क्या, तुम अपनी कॉपी में और
ज्यादा बिंदु दे पाओगी ।''

रानु बोली - ''और तो ज्यादा बिंदु दिए जा सकेंगे, यह पिरीयड् खत्म होने के बाद भी पन्ने में और अधिक बिंदु बिठाने के लिए जगह बची होगी ।''

हमने सीखा, **एक समतल पर असंक्य बिंदु होते हैं।**

खुद करके देखो

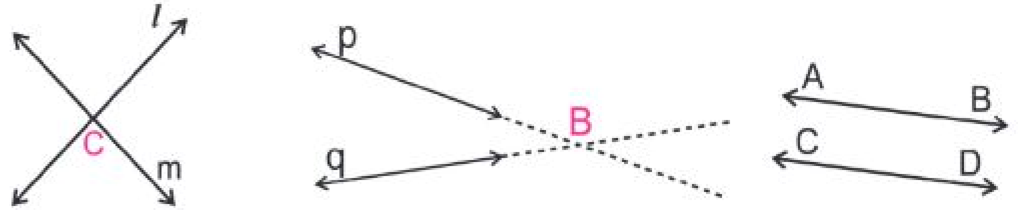
- तुम अपनी कॉपी के एक पन्ने में स्केल के प्रयोग से सरल रेखाएँ अंकन करो ।
- एक के बाद एक जितना हो सके, अलग-अलग सरल रेखाएँ अंकन करो ।
- क्या तुम्हारे दोस्त ने और तुमने समान संख्यक सरल रेखाओं का अंकन किया है ?
- क्या तुम्हारी कक्षा के सभी बच्चों ने समान संख्यक सरल रेखाओं का अंकन किया है ?
- क्या और ज्यादा सरल रेखाएँ अंकन करना मुमकिन है ?
- इससे हमने क्या सीखा ?

एक समतल पर अनगिनन सरल रेखाएँ होती हैं।

3.3 एक समतल उपरस्थि दो सरल रेखाएँ

पहले हमने सीखा है कि एक समतल पर असंख्य सरल रेखाएँ होती हैं। उनमें से किसी भी दो सरल रेखाओं की स्थिति पर निर्भर करते हुए क्या-क्या परिस्थितियाँ पैदा हाती हैं, आओ, उन्हें देखें ।

निम्नस्थ चित्र 3.7 को देखो ।



(क) (ख) (ग)

(चित्र 3.7)

चित्र 3.7 को देखो :

(क) चित्र में l और m सरल रेखाएँ एक दूसरी को C बिंदु पर प्रतिच्छेद कर रही हैं। C बिंदु l और m सरल रेखाओं के अंतर्भुक्त हैं। इसलिए C को l और m रेखाओं का उभयनिष्ठ बिंदु या प्रति च्छेदी बिंदु कहा जाता है ।

(ख) चित्र में p और q रेखाओं का भी उभयनिष्ठ बिंदु है एवं यही उभयनिष्ठ बिंदु है B। ऐसी रेखाओं को प्रतिच्छेदी रेखा कहा जाता है ।

(ग) चित्रवाली में सरल रेखाओं को दोनों दिशाओं में जितना खीज ने जाएँगे वे दोनों एक दूसरी को प्रतिच्छेद नहीं करेंगी । ऐसी रेखाओं (जिनकी कोई उभयनिष्ठ बिंदु नही है) को समांतर रेखा कहा जाता है ।

हमने सीखा :

एक समतल पर स्थित दो सरल रेखाएँ सिर्फ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं यानी उनका एक उभयनिष्ठ बिंदु होता है या फिर दो सरल रेखाएँ एक-दूसरे को प्रचिच्छेद नहीं करती हैं। उस स्थिति में दोनों सरल रेखाओं को समांतर कहा जाता है ।

तुम अपनी किन-किन चीजों में समांतर सरलरेखा देख रहे हो, लिखो ।

3.4 एक रेखीय बिंदु

(क) चित्र 3.8 (ख)

पहले हम जान चुके है कि एक समतल पर दो प्रदत्त बिंदुओं से होकर केवल एक सरलरेखा संभव है और यही सरलरेखा पूर्णत: उक्त समतल पर रहती है ।

अब हम इस कागज के समतल पर स्थित तीन बिंदु A,B और C के बारे में सोचेंगे । A और B बिदुओं से होकर हम तो जरूर ही एक सरल रेखा का अंकन कर पाएँगे और यह रेखा l माना जाता है।

चित्र 3.8 (क) में C बिंदु / रेखा पर स्थित होना हम देख रहे है । परंतु चित्र 3.8 (ख) में / बिंदु रेखा पर स्थित नही है ।

(क) चित्रवाले बिंदु A, B और C एक रेखा पर स्थित हैं । अत: इन्हें एक रेखीय बिंदु कहा जाता है ।

(ख) चित्रवाले बिंदु A, B और C एक रेखा पर स्थित नहीं है । अत: इन्हें अरेखीय बिंदु कहा जाता है ।

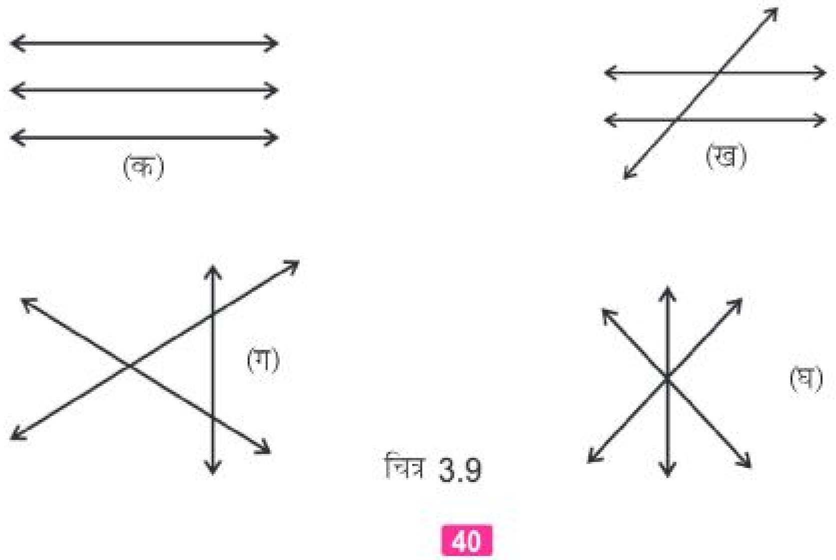
हमने सीखा

एक समतल पर तीन या अधिक बिंदु एक रेखा पर होने से उन्हें एक रेखीय बिंदु कहा जाता है । जो बिंदु एक रेखीय नहीं हैं, उन्हें अरेखीय बिंदु कहा जाता है ।

एक कागज पर स्थित तीन बिंदुओं एक रेखा पर होने से उन्हें एक रेखीय बिंदु कहा जाता है । जो बिंदु एक रेखीय नहीं हैं, उन्हें अरेखीय बिंदु कहा जाता है । एक कागज पर स्थित तीन बिंदुओं (या अधिक) को एक रेखीय कहेंगे या अरेखीय, कैसे जानेंगे ? बिंदुओं में से किन्हीं दो बिंदुओं से होकर स्केल की मदद से एक रेखा अंकन करो । यदि बचे हुए बिंदुओं को उसी रेखा पर रहना पाया जाएगा, तो उक्त बिंदुयों को एक रेखीय कहा जाएगा । यदि कोई भी बिंदु उस रेखा के बाहर रह जाता है, तो उन बिंदुओं को अरेखीय माना जाएगा । आसमान में चाँद के न होने के वक्त तुमने सप्तर्षिमंडल देखा होगा । उन सात तारों में से क्रतु और पुलह को जोड़ने वाली रेखा भी ध्रुवतारा से होकर जाती है । अत: क्रतु, पुलह और ध्रुवतारा एक रेखीय है ।

3.5 एक समतल पर तीन या अधिक सरल रेखाएँ

चित्र 3.9 को देखो



चित्र 3.9

पहले हमने सीखा था कि एक समतल पर स्थित दो सरल रेखाएँ या तो प्रतिच्छेदी होंगी या समांतर होंगी । चित्र 3.9 (क) में स्थित तीनों सरल रेखाएँ समांतर हैं।

याद रखो - दो सरल रेखाएँ ज्यादा-से-ज्यादा एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करेंगी । एक दूसरे को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करनेवाली दोनों सरल रेखाओं को प्रतिच्छेदी सरल रेखा कहते हैं।

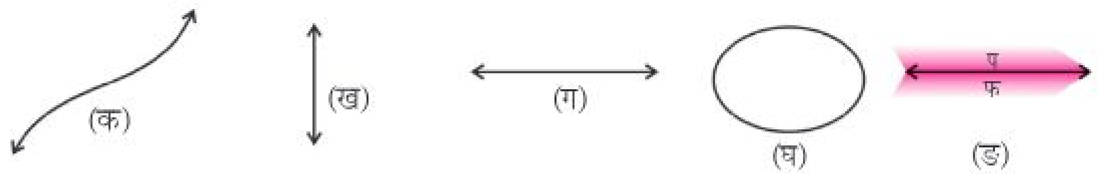
अभ्यास कार्य 3.2

1. अपनी कॉपी में तीन बिंदुओं का चिह्न देते हुए उनके नाम दो ।

2. दो सरल रेखाओं का अंकन करते हुए उनके नाम दो ।

3. तुम अपने इर्दगिर्द देख रही तीन सरल रेखाओं, तीन वक्र रेखाओं और तीन समतलों के उदाहरण दो ।

4. निम्न चित्रवाली रेखाओं में से कौन-कौन सरल रेखा है और कौन-कौन वक्ररेखा है- बताओ ।



ध्यान दो : चित्र 'ङ' वाली रेखा ने किताब के पन्ने को दो हिस्सो में बाँटा है और दोनों हिस्से को 'प' और 'फ' नाम से सूचित किया गया है । हरेक हिस्से को रेखा का एक पार्श्व कहा जाता है ।

5. तुम अपनी कॉपी में एक बिंदु का चिह्न दो और उससे होकर सात सरल रेखाएँ अंकन करो । उसी बिंदु से होकर और कितनी सरल रेखाएँ अंकन कर पाओगे ?

6. तुम अपनी कॉपी में A और B नामवाले दो बिंदु लो और दोनों बिंदुओं को धारण करने वाली एक सरल रेखा अंकन करो। ऐसी कितनी सरल रेखाएँ अंकन कर पाओगे ?

7. (क) उभयनिष्ठ बिंदुवाली दो सरल रेखाओं का अंकन करो । उन दोनों सरलरेखाओं का नाम दो । अभयनिष्ठ बिंदु का नाम P दो ।

   (ख) तुम अपनी कॉपी में किन्हीं सात बिंदुओं को लो । उनके नाम दो । क्या वे एकरेखीय हैं ? कैसे जाना ?

8. एक समतल पर स्थित तीन सरल रेखाएँ एक-दूसरी को कम-स-कम कितने बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेंगी ? ज्यादा-से-ज्यादा कितने बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेंगी ।

9. स्केल की सहायता से दो सरल रेखाएँ का अंकन करो । जैसे कि दोनों समांतर होंगी।

10. निचले वाक्यों में से सही वाक्यों को चुनकर लिखो ।

(क) 'रेखा' कहते से हम सिर्फ 'सरलरेखा' को समझते हैं ।

(ख) एक बिंदु से होकर असंख्य सरल रेखाओं का अंकन किया जा पाएगा ।

(ग) एक समतल पर स्थित दो बिंदुओं से होकर असंख्य सरल रेखाओं का अंकन किया जा पाएगा ।

(घ) एक समतल पर स्थित एक बिंदु से होकर सिर्फ एक ही सरल रेखा का अंकन किया जा सकेगा ।

(ङ) एक समतल पर स्थित दो बिंदुओं से होकर सिर्फ एक ही सरल रेखा का अंकन मुमकिन हैं ।

(च) एक समतल पर स्थित दो असमांतर सरल रेखाएँ एक दूसरे को सिर्फ एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं ।

(छ) दो समांतर सरल रेखाओं का कोई प्रतिच्छेद बिंदु नहीं है ।

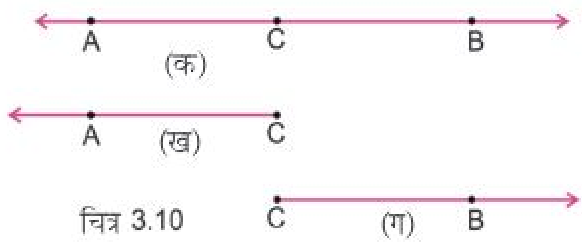
3.6 किरण और रेखाखंड

तुम सरल रेखा के बारे में बहुत सारी बातें जान चुके हो । अब तक सरल रेखा के विविध हिस्सों को लेकर बन रहे चित्रों के बारे में जानेंगे ।

3.6.1. किरण

नीचे वाले चित्र 3.10 (क) में $\overleftrightarrow{AB}$ रेखा पर C बिंदु दर्शाया गया है जैसे कि C की स्थिति A और B के बीच होगी ।

चित्र 'ख' में C बिंदु के साथ C से A की तरफ स्थित $\overleftrightarrow{AB}$ के हिस्से को अलग रूप से दर्शाया गया है । उसी प्रकार चित्र 'ग' में C बिंदु के साथ C से B की तरफ स्थित $\overleftrightarrow{AB}$ के हिस्से को अलग रूप से दर्शाया गया है ।



चित्र 3.10

चित्र (ख) और चित्र (ग) में दर्शाए गये $\overleftrightarrow{AB}$ के दोनों हिस्सों को 'किरण' कहा जाता हैं । चित्र (ख) मे दर्शायी गयी किरण को CA और चित्र (ग) वाली किरण को किरण को CB किरण के रूप में नामकरनण किया जाता है ।

CA किरण को संकेत से $\overrightarrow{CA}$ के रूप में लिखा जाता है और CB किरण को संकेत के रूप में $\overrightarrow{CB}$ में लिखा जाता है । $\overrightarrow{CA}$ के C के बिंदु को उक्त किरण का प्रारंभिक बिंदु माना जाता है ।

एक किरण अपने प्रारभिंक बिंदु से शुरू होकर एक ही दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत लेती है । चित्र (क) में दिये $\overrightarrow{CA}$ और $\overrightarrow{CB}$ को देखो उन दोनों को एक दूसरे की विपरीत किरणें कहा जाता है ।

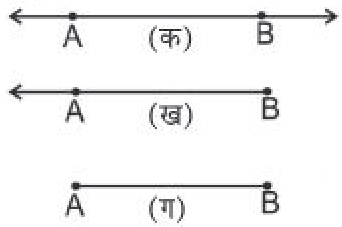
विपरीत किरणें $\overrightarrow{CA}$ और $\overrightarrow{CB}$ के मिलन से $\overleftrightarrow{AB}$ बनता है ।

क्या जानते हो ?

दो विपरीत किरणें इकट्ठी होकर एक सरल रेखा बनाती हैं।

3.6.2. रेखाखंड

चित्र 3.11(क) में $\overleftrightarrow{AB}$ का चित्र देख रहे हो। अगर 'B' बिंदु की दाहिनी तरफ स्थित $\overleftrightarrow{AB}$ हिस्से को मिटा दिया जाए, तो हम $\overleftrightarrow{AB}$ के बचे हुए हिस्से को जिस रूप में देखेंगे वह चित्र (ख) में दर्शाया गया है। तुम अच्छी तरह जानते हो कि यह BA की किरण है।



3.11

अभी BA की किरण के A बिंदु की बायीं तरफ रहे हिस्से को मिटा दो, तब देखना $\overleftarrow{BA}$ का शेष हिस्सा बचा रहेगा, जिसे चित्र (ग) में दर्शाया गया है। चित्र (ग) में $\overleftrightarrow{AB}$ के जिस हिस्से को तूम देख रहे हो, उसे रेखाखंड कहा जाता है। उसी रेखाखंड को AB रेखाखंड कहा जाता है। संकेत रूप में AB रेखाखंड को $\overline{AB}$ के रूप में लिखा जाता है।

'A' और 'B' बिंदु को $\overline{AB}$ का आरंभ बिंदु कहा जाता है। चित्र 3.11 में A और B प्रारंभ बिंदु है (या AB रेखाखंड है) जिसे $\overline{AB}$ के रूप में देख रहे हो। स्केल की सहायता से A से लेकर B तक की दूरी नापने से जो माप मिलेगी उसे AB की लंबाई कहा जाएगा। हमने सीखा :

एक रेखाखंड की लंबाई उसके प्रारंभ और अंत बिंदुओं के बीच की दूरी है।

क्या तुम्हें मालूम है ?

रेखाखंड $\overline{AB}$ की लंबाई को AB के रूप में लिखा जाता है, अर्थात् $\overline{AB}$ की भाँति उसके ऊपर रेखा नहीं दी जाती ।

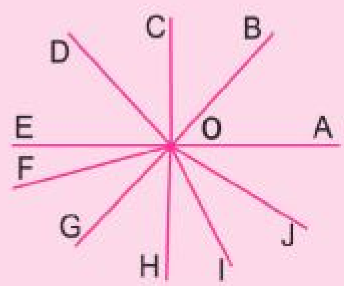
$\overline{AB}$: रेखाखंड AB का संकेत है ।

AB: रेखाखंड AB की लंबाई का संकेत है ।

यदि 5 से.मि. लंबाई वाले $\overline{AB}$ अंकन किया जाता है, तो हम लिखेंगे- $\overline{AB}$ की लंबाई =5 से.मी. या AB = 5 से.मी.

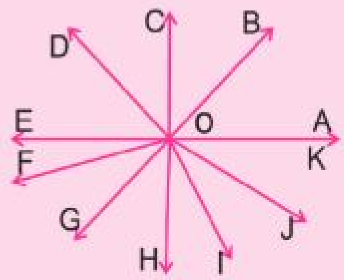
खुद करके देखो

- तुम अपनी कॉपी के एक पन्ने में एक बिंदु अंकित करो और उसका नाम दो 'O'।
- 'O' को एक अंतबिंदु के रूप में लेकर जितने सारे रेखाखंडों का अंकन कर सकते हो, करो ।
- अंकन किए हुए रेखाखंड की संख्या गिनकर बताओ कि कितने रेखाखंडों का अंकन किया है ।
- हरेक रेखाखंड के दूसरे अंत का नाम दो । अब एक आम अंतबिंदु वाले १० रेखाखंडों का चित्र तुम्हें मिला है । (चित्र 3.१२ (क) की तरह) और हर रेखाखंड के 0 के अलावा दूसरे अंतबिंदुओं में तीर-चिह्न दो ।



चित्र 3.12 (क)

- अब पिछले चित्रवाले रेखाखंडों के चित्र किरणों के चित्रों में बदल गए और वह चित्र 3.12 (ख) की तरह दिख रहा होगा ।
- 'O' को प्रारंभिक बिंदु के रूप में लेकर क्या और ज्यादा किरणों का अंकन कर पाओगे ?
- जरूर ही और ज्यादा किरणों का अंकन किया जा पाएगा ।



चित्र 3.12 (ख)

हमने क्या सीखा ? जैसे एक बिंदु से होकर असंख्य सरल रेखाओं का अंकन करना संभव है, वैसे ही एक आम प्रारंभिक बिंदु वाली असंख्या किरणों का अंकन करना संभव होगा । यानी, एक आम प्रारंभिक बिंदु वाली असंख्य किरणों का अंकन संभव है ।

खुद करके देखो ।

- आपनी कॉपी के एक पन्ने में एक सरल रेखा का अंकन करो । उस पर A, B और C तीन बिंदुओं का संकेत करो जैसे कि B बिंदु A और C बिंदुओं के बीच में रहेगा ।
- अब $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{AC}$ की माप निर्णय करो ।
- इस तरह और तीन अलग चित्र अंकन करते हुए $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{AC}$ की माप निर्णय करो ।
- संलग्न सारणी की भाँति एक सारणी तैयार करते हुए उसमें प्राप्त की हुई मापों को लिखो ।

चित्र के नाम	AB	BC	AC
पहला			
दूसरा			
तीसरा			
चौथा			

तुमसे भरी गई सारणी से क्या देख रहे हो ?

एक रेखा पर स्थित तीन बिंदु A, B, C बिंदु में से B बिंदु 'A' और 'C' के बीच में होने पर AB + BC = AC होंगे ।

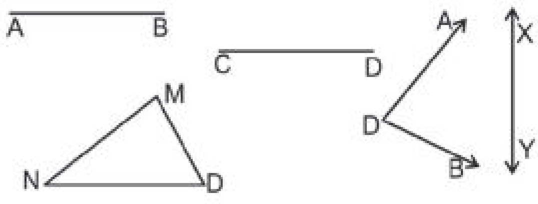
याद रखें : एक सरलरेखा में स्थित तीन बिंदु A, B और C में से B बिंदु A और C के बीच में होने पर हम लिखते हैं : A–B–C।

ऐसा लिखे होने पर हम पढ़ेंगे B बिंदु A और C बिंदुओं के बीच वाला है ।

अभ्यास कार्य 3.3

1. संलग्न चित्रवाली सरलरेखा, रेखाखंड और किरणों के नाम निम्न सारणी जैसी एक सारणी तैयार करते हुए उसमें भरो ।

सरलरेखा	रेखाखंड	किरणों



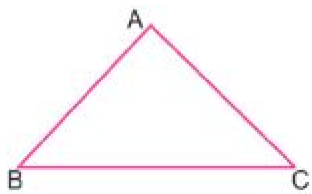
2. तुम अपनी कॉपी में तीन रेखाखंडो $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ और $\overline{EF}$ का अंकन करो । हरेक की लंबाई पहले केवल स्केल की मद से और बाद में डिवाइडर और स्केल की मदद से माप कर निम्न सारणी जैसी सारणी तैयार करते हुए उसमें भरो ।

रेखाखंड का नाम	सिर्फ स्केल की सहायता से प्राप्त लंबाई	डिवाइडर और स्केल की सहायता से प्राप्त लंबाई
$\overline{AB}$		
$\overline{CD}$		
$\overline{EF}$		

3. (क) बगलवाले त्रिभुज का नाम क्या है ?

   (ख) जिन तीन रेखाखंड से त्रिभुज बना है, उनके नाम लिखो ।

   (ग) स्केल की सहायता से हरेक रेखाखंड की लंबाई माप कर लिखो ।



4. नीचेवाले वाक्यों में से सही वाक्यों को चुनकर लिखो ।

   (क) एक सरलरेखा एक रेखाखंड का एक हिस्सा है ।

   (ख) एक रेखाखंड के दो अंत बिंदु होते हैं।

   (ग) एक सरलरेखा के दो प्रारंभ बिंदु होते हैं।

   (घ) एक किरण का एक ही प्रारभिक बिंदु होता है ।

   (ङ) 1 से.मी - १० मि.मी

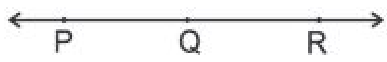
बताओ :
सरल रेखा, किरण और रेखाखंड में से किसकी खास लंबाई होती है ? क्यों ?

5. दायीं ओर वाले चित्र से मापकर देखो कि-

   (क) AB + BD = AC + CD

   (ख) AB + CD = AD - BC

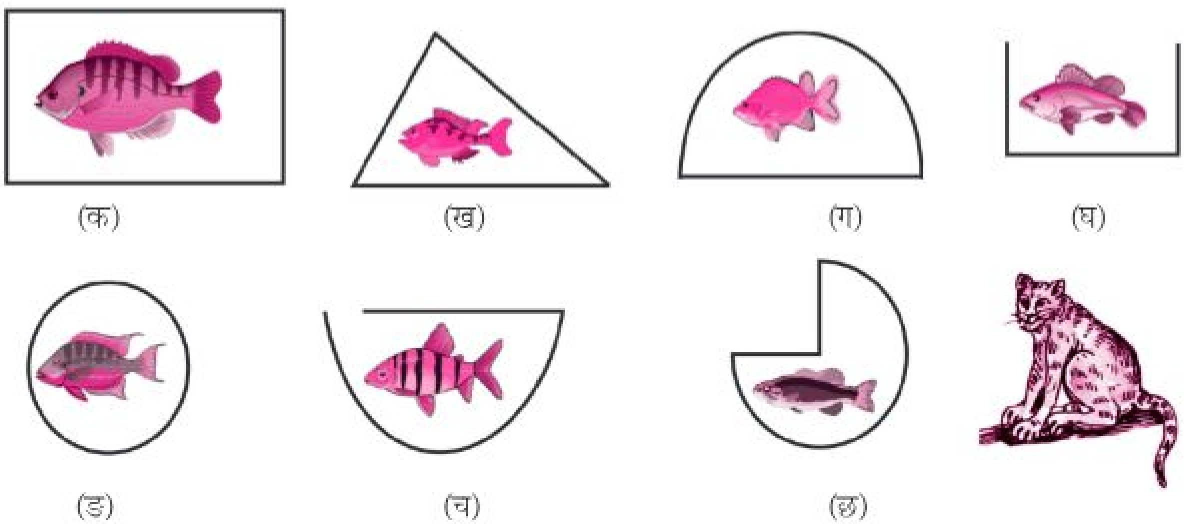
6. तुम अपनी कॉपी में तीन सरलरेखाओं का अंकन करो, प्रत्येक सरलरेखा पर तीन-तीन बिंदु लो । बायीं ओर से दायीं ओर के क्रम में तीन बिंदुयों को P, Q और R नाम दो ।



कौन-सा बिंदु दूसरे बिंदुओं के बीच में है बताओ । अब PQ, QR और PR में से कौन-सा दूसरे दोनों के योग के बराबर है ।

3.7 बंद चित्र

नीचेवाले चित्रों में सिर्फ सीधी रेखा और सिर्फ वक्र रेखा के चित्रों में से एक मछली का चित्र है, उस सीधी रेखा के चित्र या सीधी और वक्र रेखा के चित्र के बाहर एक बिल्ली के चित्र है । सीधी रेखा और वक्र रेखा हरेक एक-एक तार के जाले से आबद्ध किए गए स्थान को समझा जाता है । तार का जाला इतना ऊँचा है कि बिल्ली उसे लाँघ कर मछली तक पहुँच नहीं पाएगी ।



अब (क), (ख), (ग), (घ), (ङ), (च), (छ) से सूचित चित्रों को अच्छी तरह देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर निर्णय करो ।

- कितने नंबर वाले चित्रों में तार-जाले से घिरे स्थान के अंदर घूस कर बिल्ली मछली को ला पाएगी और क्यों ?
- कितने नंबर वाले चित्रों में तार जाले से घिरे स्थान के अंदर बिल्ली घुस नहीं पाएगी और क्यों ?

तुमसे निर्णय किसे गए उत्तर जरूर ही निम्न रूप से होंगे ।

चित्र नं (घ) और (च) वाले तार जाले से घिरे स्थानों के अंदर बिल्ली घुस पाएगी और मछली ला पाएगी क्योंकि ये दोनों घिरे हुए स्थान पूर्णत: बंद नहं हैं । इनके अंदर घुसने के लिए खुला रास्ता है । वैसे ही चित्र में (क), (ख), (ग), (घ), (ङ), (च) और (छ) खाने तार-जाले से घिरे स्थानों को बिल्ली जा नहीं पाएगी । क्योंकि उन चित्रों वाले स्थानों को घिर रहे तार-जाल पूर्णत: बंद है । उनके अंदर घुसने के लिए रास्ता नहीं है।

इससे हमने क्या सीखा ?

यदि एक समतल पर स्थित एक ज्यामितीय चित्र एक समतल के एक हिस्से को पूर्णत: बंद रखता है तो उस चित्र को बंद चित्र कह जाता है ।

3.7.1 सरल रेखीय और वक्ररेखीय सीमा रेखा :

तुमने अनेक नक्से देखे हैं। नक्शा देखकर जरूर बता पाओगे कि नक्शे में कौन-सा शहर कहाँ पर स्थित है ।

नक्शा देखकर बताओ कि किस राज्य में पुरी शहर स्थित है ? भारत के नक्शे में कहाँपर 'पुरी' लिखा हुआ है, देखो । तुम देखोगे कि आड़िशा राज्य के अंदर पुरी शहर है । ओड़िशा का नक्शा एक रेखा से आबद्ध है; वैसो ही आंध्रप्रदेश का नक्शा भी एक रेखा से आबद्ध है । इसी रेखा को निर्दिष्ट राज्य की सीमा रेखा कहा जाता है । ओड़िशा के नक्शे की सीमा रेखा से हम जान पाएँगे कि ओड़िशा उस सीमारेखा तक फैला हुआ है । ओड़िशा की सीमारेखा ओड़िशा को अपने चारों ओर स्थित राज्यों से अलग कर रही है ।

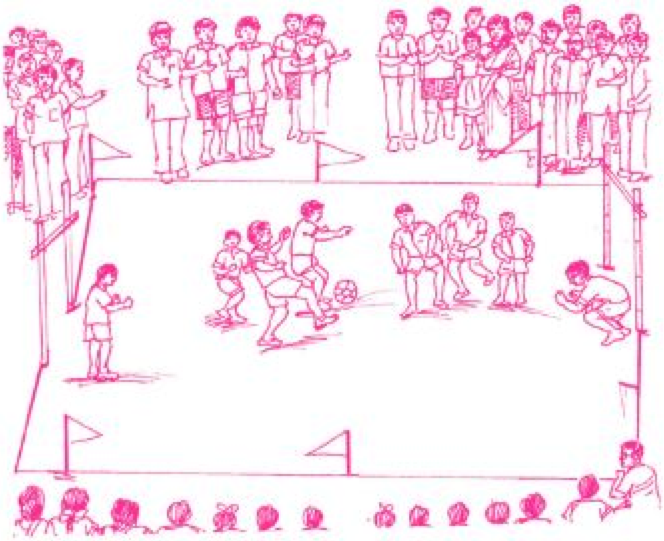
भारत के नक्शे को देखो । किस-किस राज्य से ओड़िशा जुड़ा हुआ है, बताओ। ओड़िशा की सीमारेखा ओड़िशा को उन राज्यों से अलग कर रही है ।

चित्र में विद्यालय की सीमारेखा बतलाओ । देखो, विद्यालय का अहाता एक सीमारेखा से घिरा हुआ है । इस प्रकार की सीमारेखा एक सरलरेखीय है ।

सीमारेखा दो प्रकार की है जैसे सरलरेखीय और वक्ररेखीय । चित्रों में दिखाए गए विद्यालय की सीमा सरलरेखीय है परंतु ओड़िशा की सीमा वक्ररेखीय है ।

3.7.2. आंतरिक बिंदु और बाह्य बिंदु

खेल-मैदान का चित्र देखकर नीचे वाले प्रश्नों के उत्तर दो ।



(क) खेल-मैदान के अंदर क्या सब हैं ?

(ख) खेल-मैदान के बाहर कौन हैं?

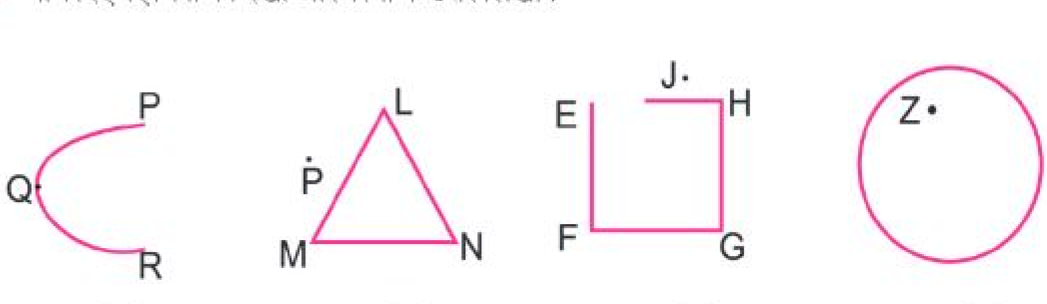
(ग) खेल-मैदान की सीमा पर कौन है (परंतु खेल मैदान के अंदर और बाहर नहीं है) ?

- जो लोग भीतर हैं, वे खेल-मैदान के आंतरिक हैं।
- जो लोग बाहर हैं, वे खेल-मैदान के बाह्य हैं।
- जो लोग न तो भीतर हैं और न ही बाहर हैं, वे खेल-मैदान की सीमा पर है ।

हमने क्या सीखा ?

सीमारेखा द्वारा आबद्ध इलाके में कोई भी बिंदु उस इलाके का आंतरिक बिंदु है, सीमारेखा पर स्थित कोई भी बिंदु सीमारेखा का ऊपरिस्थ बिंदु है । आंतरकि बिंदु और सीमा ऊपरिस्थ बिंदु को बाद देने पर दूसरे बिंदुओं को आबद्ध इलाके के बाह्य बिंदु कहते हैं।

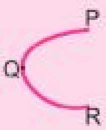
नीचे दिए गए चित्रों को देखो और प्रश्नों के उत्तर लिखो :



(क) (ख) (ग) (घ)

- चित्र (क), (ख), (ग) और (घ) में दिखाये गए क्षेत्रों में से कौन-से क्षेत्र बंद (आबद्ध) है ?
- खाली जगह भरो -
  - ________ और ________ बंद (आबद्ध) चित्र है ।
  - ________ और ________ बंद चित्र नहीं है ।
  - ________ चित्र की सीमा वक्ररेखिय है ।
  - ________ चित्र की सीमा सरल रेखीय है ।
  - ________ चित्र में एक बाह्य बिंदु है और ________ उसकी आंतरिक बिंदु है ।
  - ________ चित्र में एक आंतरिक बिंदु है और ________ उसकी आंतरिक बिंदु है ।
- निम्न प्रश्नों के उत्तर दो -
  - क्या चित्र (क) में एक बाह्य बिंदु दिखा पाओगे ?
  - किन-किन चित्रों में आंतरिक बिंदु या बाह्य बिंदु नहीं दिखाया जा सकेगा ?

जिसने लक्ष्य किया होगा कि चित्र (ख) और (घ) में आंतरिक और बाह्य बिंदु दिखाये जा पाएँगे परंतु चित्र (क) और (ग) में आंतरिक और बाह्य बिंदु दिखा नहीं पाएँगे । सिर्फ बंद चित्र में आन्तरिक और बाह्य बिंदु है ।



क्या जानते हो ?
मैं बंद चित्र नही हैं। मुझे खुला चित्र कहते हैं।
मेरे आंतरिक और बाह्य बिंदु नहीं है ।

अभ्यास कार्य 3.4

1. (क) एक सरल रेखीय सीमा वाला बंद चित्र और एक वक्ररेखीय बंद चित्र अंकन करो ।

   (ख) अंकन किए गए हरेक चित्र में दो आंतरिक बिंदु और दो बाह्य बिंदु अंकित करो ।

   सरलरेखी सीमा वाले चित्र में दो आंतरिक बिंदुओं के K और L नाम और रखो। तथा दो बाह्य बिंदुओं के नाम M और N दो वक्ररेखीय सीमा वाले चित्र के दो आंतरिक बिंदुओं के नाम P और Q दो तथा दो बाह्य बिंदुओं का नाम R और S दो ।

   (ग) हरेक बंद चित्र की सीमा पर एक-एक बिंदु अंकित करो । सरलरेखीय सीमावाले चित्र में इस बिंदु का नाम दो । Y तथा वक्ररेखीय सीमा वाले चित्र में इस बिंदु का नाम Z दो ।

2. ऐसा एक चित्र अंकन करो जिसका आंतरिक बिंदु या बाह्य बिंदु दिखाना मुमकिन नहीं है ।

3.8 कोण

3.8.1 कोण की अवधारणा

(क) (ख) (ग) (घ) (ङ)

ऊपर दिए गए चित्रों को देखो

- किताब के हर पन्ने का किनारा एक-एक रेखाखंड है । दो किनारे जहाँ पर मिल रहे हैं, वहाँ पर एक कोण बना है ।
- डिवाइडर का चित्र देखो । उसकी दोनों भुजाएँ मिलकर मिले हुए स्थान पर एक कोण बना रही है ।
- ऊपर वाले घड़ी चित्र को देखो । घड़ी की दोनों सूइयों कैसे रही है ? दोनों सूइयाँ कैसी है? दोनों सूइयाँ एक कोण बना रही है।
- वैसे ही सेट् सव्क्वायर के हर शीर्ष पर उसके दोनों किनारे मिलकर एक कोण बना रहे हैं।

अब बताओं-

(क) अपनी कक्षा के श्यामपट्ट पर कितने कोण देख रहे हो ?

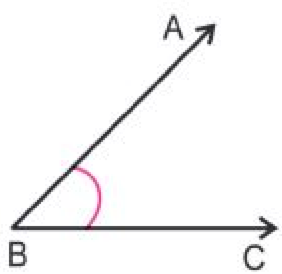
(ख) अपनी कक्षा के फर्श में कितने कोण हैं?

इतने सारे कोण देखने के बाद हमने सीखा, **सामान्यत: उभयबिंदुवाली दो किरणें (एक सरलरेखा का हिस्सा न होने पर) एक कोण बनाती हैं।**

अपने वातावरण में तुम कहाँ-कहाँ कोण बनने का दृश्य देख रहे हो, लिखो ।

3.8.2.

चित्र देखो और प्रश्नों के उत्तर दो :



(i) चित्र की दो किरणों के नाम क्या है ?

(ii) दोनों किरणों उभयनिष्ठ प्रारंभ बिंदु कौन-सा है ?

(iii) किरण किस दिशा में ससीम है ?

(iv) $\overrightarrow{BC}$ किस दिशा में ससीम है ?

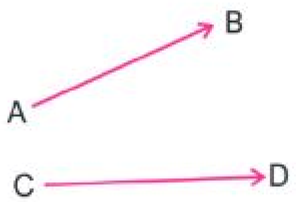
3.13

चित्र 3.13 में दोनों किरणों के योग से एक कोण पैदा हुआ है। दोनों किरणों के प्रारंभ बिंदु B को पैदा हुए कोण का 'शीर्षबिन्दु' कहते हैं। $\overrightarrow{BA}$ और $\overrightarrow{BC}$ दोनों किरणों को प्राप्त कोण की भुजाएँ कहा जाता है । इस कोण को ∠ABC या ∠CBA(कोण ABC या CBA के रूप में पढ़ा जाता है) ।

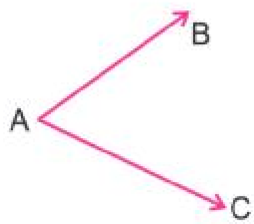
क्या तुम जानते हो ?

'∠' संकेत कोण को प्रदर्शित करने का चिह्न है । कोण को नामित करने समय हमेशा शीर्ष का नाम बीच में रहता है । ∠ABC को ∠B भी कहा जाना है परंतु शीर्ष में एकाधिक कोण रहने पर दूसरे प्रकार का नामकरण नहीं किया जाता ।

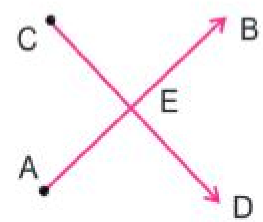
नीचे दिए गए तीनों चित्रों को देखो -



(क)



(ख)

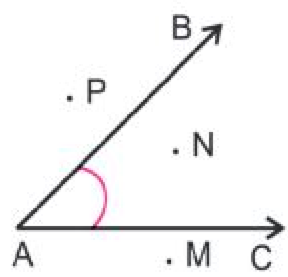


(ग)

- चित्र (क) में $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$ दो किरणों के होते हुए भी कोण उत्पन्न नहीं हो रहा है ।
- चित्र (ख) में A है $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{AC}$ दोनों किरणों का अभयनिष्ठ प्रारंभ बिंदु । ये दोनों किरणें एक रेखा के अंश नहीं हैं। इसलिए ये दोनों किरणें एक कोण उत्पन्न करती हैं।
- चित्र (ग) में $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{CD}$ किरणों का प्रारंभ बिंदु क्रमश: A और C है । परंतु दोनों किरणों का एक उभयनिष्ठ बिंदु है E। $\overrightarrow{EB}$ और $\overrightarrow{ED}$ किरणों का उभय निष्ठ प्रारंभ बिंदु E होने से ∠BED उत्पन्न हुआ है । इस चित्र में $\overline{EC}$ और $\overrightarrow{EB}$ दोनों का उभयनिष्ठ बिंदु E होने के कारण $\overline{EC}$ और $\overrightarrow{EB}$ के योग से E कोण ∠CEB पैदा हुआ है । उसी प्रकार ∠AED भी पैदा हुआ है। $\overrightarrow{EC}$ और $\overline{EA}$ का अभयनिष्ठ बिंदु E होने के कारण उन दोनों के योग से ∠AEC पैदा होना मान लिया जाता है ।

3.8.3. कोण के अन्त : और बहि : बिंदु

- संलग्न चित्र 3.14 में ∠BAC दिखाया गया है । यह कोण किताब के इस पन्ने के समतल पर स्थित है ।
- N बिंदु कोण का अन्त: बिंदु है ।
- N बिंदु की भाँति ∠BAC के अन्त: बिंदु बनने को और असीम बिंदु हैं । यद्यपि उनका नामकरण नहीं हुआ है ।



चित्र 3.14

इन बिंदुओं का ∠BAC के अन्त:बिदुंओं का) योग, इस समतल का एक हिस्सा है और समतल के इस हिस्से को कोण का अन्त:भाग कहा जाता है । कोण की दो भुजाओं का विस्तार असीम होने के कारण ∠BAC का अन्त:भाग भी असीम है ।

- P और M बिंदु का बिंदु-बिंदु ∠BAC का बहि:बिन्दु है । P और M बिंदुयों की भाँति ∠BAC के असीम बिंदु:बिंदु भी हैं।
- इन बिंदुओं का (∠BAC के सारे बिंदु:बिदुओं का) योग, इसी समतल का एक हिस्सा है और समतल के इस हिस्से को कोण का बहि:भाग कहा जाता है । ∠BAC कोण का बहि:भाग भी असीम है ।
- $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{AC}$ पर स्थित हरेक बिंदु ∠BAC के अन्तर्वर्त्ती बिंदु है । उन्तर्भुक्त बिंदुओं के योग से कोण बना है । यानी ∠BAC $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{AC}$ पर स्थित सारे बिंदुओं का समाहार है ।

उपर्युक्त चर्चा से हसने क्या सीखा ?

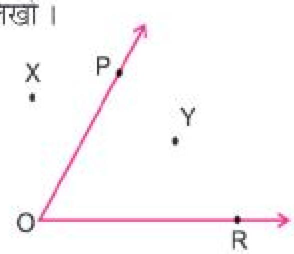
- एक कोण इसके अन्त:भाग और बहि:भाग को अलग करता है ।
- कोण के किसी बहि:बिंदु और किसी अन्त:बिंदु के संयोजक रेखाखंड (यथा - $\overline{PN}$ या $\overline{MN}$) $\overrightarrow{AB}$ या $\overrightarrow{AC}$ को छेद करेगा ।

क्या तुम जानते हो ?
किसी समतल पर एक कोण अंकित होने पर समतल तीन हिस्सों में बँट जाता है -
(1) कोण (2) कोण का अन्त:भाग
(3) कोण वा बहि:भाग ।

तुम एक कोण का अंकन करते हुए उसके अन्त:भाग को रंग देकर बताओ । कोण के एक अन्त:बिंदु और एक बहि:बिंदु को भी दिखाओ ।

अभ्यास कार्य 3.5

1. चित्र देखकर कॉपी में उत्तर लिखो । चित्र में स्थित कोण का नाम क्या है, लिखो ।



   (क) चित्र में स्थित कोण का नाम क्या है, लिखो ।

   (ख) इसके शीर्ष और भुजाओं के नाम लिखो ।

   (ग) इसी कोण के अन्त:बिंदु और बहि:बिंदु के नाम लिखो।

2. खाली स्थान भरो ।

   (क) एक कोण के —— शीर्ष बिंदु और —— भुजाएँ होती हैं।

   (ख) —— चिह्न चित्र में स्थित कोण का सांकेतिक चिह्न है ।

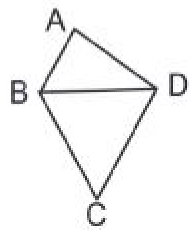
   (ग) दो सरल रेखाएँ एक-दूसरे को छेद करने पर —— कोण पैदा होते हैं।

3. स्केल और पेंसिल की मदद से तुम अपनी कॉपी में दो कोण अंकन करके उनके नाम दो ।

4. (क) संलग्न चित्र में कितने कोण हैं ?

(ख) सिर्फ शीषबिंदु को लेकर किस-किस कोण का नामकरण किया जा पाएगा ?

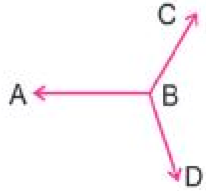
(ग) किन कोणों की एक उभयनिष्ठ भुजा है ।



3.9. कोणों के बीच संबंध-

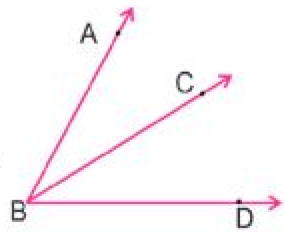
एक शीर्षबिंदु वाले एकाधिक कोणों के कई उदाहरण यहाँ दिए जाएँगे, उन्हें ध्यान से देखो ।

3.9.1. संलग्न कोण या आसन्न कोण



संलग्न चित्र देखकर उत्तर लिखो ।

- ∠ABC और ∠CBD के शीर्षबिंदुओं के नाम क्या है ?
- इन दोनों कोणां की उभयनिष्ठ भुजा कौन-सी है ?
- किस किरण के विपरीत किनारे दोनों कोणो के दोनों अन्त:भाग स्थित है ।
- ∠ABC और ∠CBD दोनों कोणों के अन्त:भाग का क्या कोई उभयनिष्ठ अंश है ?



तुमने प्रश्नों के उत्तर जरूर ही निम्न रूप से सोचा होगा ।

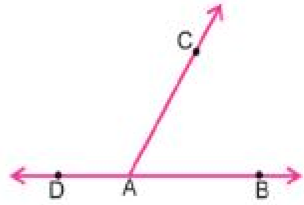
दोनों कोणों का शीर्षबिंदु B है, दोनों कोणों की उभयनिष्ठ भुजा $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC}$ है के विपरीत किनारे दोनों कोणो का अन्त:भाग स्थित है और दोनों कोणों को अन्त:भाग का कोई उभयनिष्ठ अंश नहीं हैं ।

एक समतल पर स्थित दो कोणों का एक उभयनिष्ठ शीर्ष बिंदु, एक उभयनिष्ठ भुजा होने पर और उनके दोनों अन्त:भाग का कोई उभयनिष्ठ अंश न होने पर उन दोनों कोणों को सलग्न कोण या आसन्न कोण कहा जाता है । यहाँ ∠ABC और ∠CBD दोनों संलग्न कोण हैं ।

तुम दो सलग्न कोण अंकन करते हुए उनका नामकरण करो ।

3.9.2. सरल रेखीय जोड़ा

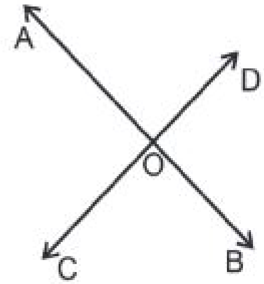
संलग्न चित्र को देखों चित्र का वर्णन करो । लक्ष्य करो -



चित्र में स्थित ∠BAC और ∠CAD दोनों कोणों की असामान्य भुजाएँ $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{AD}$ आपस में विपरीत किरणें हैं । इस प्रकार के दो संलग्न (आसन्न कोणों को सरल रेखीय जोड़ा या सरलजोड़ा कहा जाता है ।

तुम अपनी कॉपी में सरल रेखीय जोड़ा का अंकन करो । दोनों कोणों का कुल परिमाप निर्णय करो ।

3.9.3. प्रतीप कोण या विपरीत कोण



संलग्न चित्र को देखकर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दो ।

- $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दोनों भुजाएँ एक-दूसरे को किस बिंदु पर छेद कर रही हैं ?
- ∠AOD के कितने संलग्न कोण हैं और उनके नाम क्या है?
- चित्र का कौन-सा कोण ∠AOD का संलग्न (आसन्न कोण) नहीं है ?

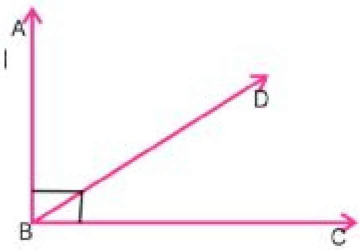
चित्र से तुमने लक्ष्य किया होगा कि

- $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ एक दूसरे को 'O' बिंदुपर छेद कर रहे है । ∠AOD के दो संलग्न कोण हैं और वे हैं ∠DOB और ∠AOC।
- ∠COB, ∠AOD का संलग्न कोण नहीं है । यहाँ पर ∠AOD का प्रतीप या विपरीत कोण है ∠BOC।

दो सरल रेखाएँ एक-दूसरे को एक बिंदु पर छेद करने पर जो चार कोण पैदा होते हैं, उनमें से जिन दो कोणों के बीच कोई उभयनिष्ठ भुजा नहीं होती (यानी जो दो कोण आपस में संलग्न नहीं होते), उन दोनों कोणों को एक दूसरे का प्रतीप कोण या विपरीत कोण कहा जाता है ।

तुम दो सरल रेखा $\overleftrightarrow{XY}$ और $\overleftrightarrow{PQ}$ लो, जैसे वे एक-दूसरे को K बिंदु पर छेद करेंगे । तुम्हें प्राप्त हुए, चित्र में दो जोड़ा प्रतीप या विपरीत कोण दर्शाओ ।

3.9.4. सपुरक या अनुपुरक कोण -

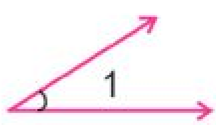


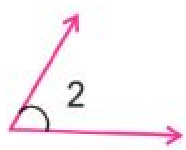
चित्र में ∠ABC एक समकोण है । यह चित्र देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दो ।

- ∠ABC के अलावा चित्र (क) में दिख रहे दूसरे दो कोणों के नाम क्या हैं ?
- ∠ABD का परिमाण का परिमाण + ∠DBC का परिमाण = कितना ?

हमने देखा -

∠ABD और ∠DBC के परिमाणों का जोड़ 90° है । इन दोनों कोणों को आपस में अनुपुरक / सपुरक कोण कहा जाता है । नीचे वाले चित्र में स्थित ∠1 और ∠2 मापों का जोड़ 90° है । इसलिए ∠1 और ∠2 भी आपस में अनुपुरक हैं।



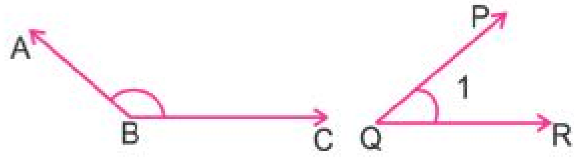


यदि दो कोणों का कुल परिमाण 90° है और, उनमें एक कोण दूसरे का अनुपुरक होता है या दो कोण आपस में अनुपुरक कहलाते हैं।

क्या तुम जानते हो ?
दो अनुपूरक कोण आसन्न (संलग्न) हो सकते हैं या फिर अलग-अलग स्थानों में स्थित हो सकते हैं ।

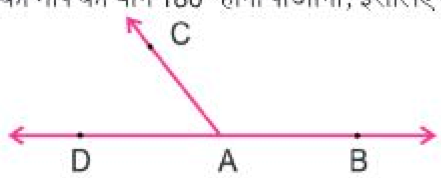
3.9.5. परिपूरक कोण-

सलग्न चित्र को देखो ।



चित्र में दिख रहें दोनों कोणों के नाम क्या है ?

इन दो कोणों के परिमाण का जोड़ निर्णय करो । जिन दो कोणों के परिमाण का जोड़ 180° होता है, उन दोनों कोणों को आपस में परिपूरक कोण कहते हैं। यहाँ पर ∠ABC और ∠PQR आपस में परिपूरक हैं। सरल जोड़ी बनाने वाले दोनों कोणों को माप कर देखने से उन दोनों को माप को योग 180° होना पाओगा; इसलिए वे दोनों आपस में परिपूरक हैं।



याद रखो : आपस में परिपूरक बने दोनों कोण अलग-अलग स्थानों में रह सकते हैं या फिर आसन्न हो सकते हैं।

अभ्यास कार्य 3.6

1. (क) निम्नलिखित माप वाले कोणों के अनुपूरक कोणों की माप निर्णय करो ।

   6°, 15°, 29°, 30°, 45°, 75°

   (ख) निम्नलिखित माप वाले कोणों के परिपूरक कोणों की माप निर्णय करो ।

   27°, 52°, 70°, 110°, 145°, 150°

2. (क) 45°, 45' माप वाले कोण के अनुपूरक और परिपूरक कोण की माप निर्णय करो । (1 ° = 60')

   (ख) 48° माप वाले कोण के अनुपूरक कोण के परिपूरक कोण का परिमाण कितना हैं ?

3. निम्न मापवाली जोड़ियों में से कौन-सी जोड़ी आपस में अनुपूरक हैं और कौन सी जोड़ी आपस में परिपूरक हैं- दर्शाओ ।

   (क) 68 °, 22 ° (ख) 163 °, 17 ° (ग) 73 °, 17 °

   (घ) 80 °, 10 ° (ङ) 42 °, 138 ° (च) 90 °, 90°

4. चित्र अंकन करते हुए अनुपूरक कोण और परिपूरक कोण जोड़ियों के उदाहरण दो ।

5. तुम्हारे इर्द-गिर्द की वस्तुओं में से आपस में समकोण में रहनेवाली वस्तुओं के तीन उदाहरण दो ।

6. एक ट्रफिक पुलिस पूर्व दिशा की ओर मुँह करके खड़ा है । अगर वह अपनी बायीं ओर क्रमश:

(क) एक समकोण (ख) दो समकोण (ग) तीन समकोण

(घ) चार समकोण घुमता हो, तो हर बार घुमने के बाद उसका मुँह किस दिशा की ओर रहेगा ?

7. किस प्रकार का कोण उत्पन्न होगा ?

(क) एक बिंदु से पूर्व और दक्षिण को ओर दो किरणें अंकन करने पर ।

(ख) एक बिंदु से उत्तर और उत्तरी पूर्व की ओर दोनों किरणें अंकन करने पर ।

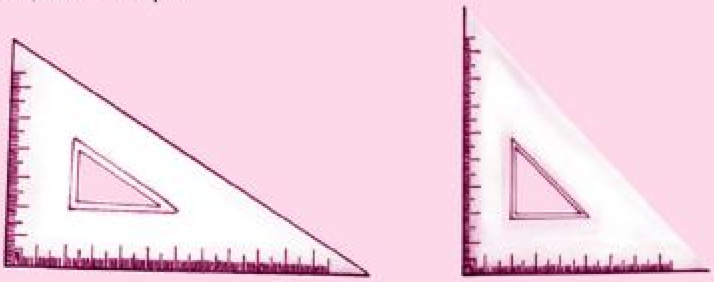
(ग) एक बिंदु से पूर्व ओर उत्तर की ओर दो किरणें अंकन करने पर ।

8. (क) जिस कोण का परिमाण उसके अनुपूरक कोण के परिमाण का दुगुणा हैं, उसका परिमाण कितना है ?

(ख) जिस कोण का परिमाण उसके परिपूरक कोण के परिमाण का दुगुणा है, उसका परिमाण कितना है ?

सेट्स्क्वोयार के बारे में कुछ बातें

कई खास परिमाण वाले कोणों का अंकन करने के लिए सेट्स्क्वोयर का व्यवहार किया जाता है । इसके दूसरे व्यवहार के बारे में दिए गए तथ्यों को पढ़ो ।



अपने ज्यामिति बॉक्स वाले दोनो सेट्स्क्वोरों को देखो । एक के कोणों के परिमाण 30°, 60°, 90° है और दूसरे के कोणों के परिमाण 45°, 90°, 45° है । पहले का नाम 60° – 30° सेट्स्क्वोयार है और दूसरे का नाम 45°– 45° सेट्स्क्वोयार है । ये प्लोस्टिक या धातु से बने हैं, इसके किनारों पर लंबाई या चोड़ाई नापने के लिए से.मि.के चिह्न दिए गए होते हैं।

30°, 45°, 60° और 90° मापवाले कोण अंकन करने के लिए ये जरुरी होते हैं । प्रदत्त एक सरल रेखा के प्रति लंबाई (समकोण अंकन करने वाली रेखा) एवं प्रदत्त रेखा के साथ समांतर सरलरेखा अंकन करने के लिए इसे व्यवहृत किया जाता है ।

चौथा अध्याय

प्राकृत संख्या

4.1 हमने जो सीखा है :

तुम वस्तुओं को गिनने के लिए संख्याओं का व्यवहार करना सीखा है । दो वस्तु-समूह की संख्या पता होने पर दो वस्तु-समूह की वस्तुओं की कुल संख्या जानने के लिए योग-प्रक्रिया भी जानते हैं। एख वस्तु-समूह से कुछ वस्तुएँ निकाल लेने पर, बची वस्तु की संख्या जानने के लिए घटाव-प्रक्रिया भी सीखा है । एक संख्या को खुद के साथ बार-बार योग करने के लिए गुणा की प्रक्रिया भी सीखी है । एक संख्या से उसकी तुलना में एक छोटी संख्या को बार-बार घटावप्रक्रिया के परिणाम को आसानी से जानने के लिए भाग प्रक्रिया भी जानते हो । संख्या और उससे जुड़ी प्रक्रियाओं के उपयोग से दैनदिंन जीवन में अनेक समस्याओं का हल कर पा रहे हो । इस अध्याय में संख्या का क्रम विकास कैसे हुआ, यहाँ उस पर विचार करेंगे ।

4.2 ऐतिहासिक पृष्ठभूमि -

आदिकाल से मानव अपने जीवन-धारण के लिए खाद्य संग्रह करना, सुरक्षित जीवन-यापन के लिए निवास स्थान की व्यवस्था करना और बाहरी शत्रुओं से खुद को बचाने के लिए दलगत जीवन-यापन की व्यवस्था में आदी हो गया । पहले वह सिर्फ आज यानी वर्त्तमान की बात सोचता था । बाद में भविष्य के बारे में सोचना शुरू किया । जब उसने भविष्य जीवन-यापन के लिए पशुपालन, वृक्षरोपण की बात सोची, तब उसने एकाधिक पशु पाले, एकाधिक वृक्ष लगाए । उसने जिन जानवरों को पाला; जिन वृक्षों को लगाया, उनके हिसाब रखने की आवश्यकता महसूस की ।

4.2.1 हिसाब रखने की व्यवस्था

उसकी गोशाला से जो पशु बाहर चले गए, शाम के वक्त वे सब उसी गोशाला में वापस आए कि नहीं, उसका हिसाब रखने के लिए संभवत: पशुओं के बाहर जाने समय उसने एक पशु के लिए एक रेखा खींची और पशुओं के वापस आते समय, एक पशु के गोशाला में घुसने से एक रेखा मिटा दी । अंत में यदि उसने देखा कि एक रेखा अमिट रह गई, वह जान पाया कि उसका

एक पशु नहीं लौटा है । यदि सारी रेखाएँ मिट गईं, और गोशाला के बाहर और कोई पशु नहीं है, तो वह जान पाया कि उसके सारे पशु लौट आए हैं।

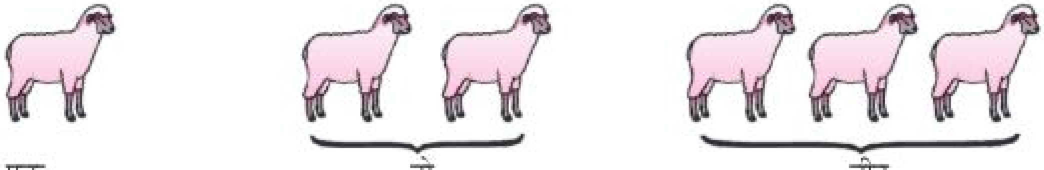
बताने का प्रयास करो :
उसकी सारी रेखाएं मिट जाने पर गोशाला के बाहर और पशु होना देखा गया, तो उसने क्या सीखा होगा ?

रेखा खींचने और फिर उसे मिटाने वाले कार्य को, आसान बनाने के लिए उसने एक वस्तु के लिए एक रेखा खींचने के बदले एक पशु या वस्तु के लिए एक तिनका या एक कंकर या फिर एक सूखे बीज का इस्तेमाल किया । अब उसके पशुओं की संख्या के अनुसार तिनकों का एक गुच्छा रहा । फिर उसकी बाड़ी में फले हुए फलों का हिसाब रखने के लिए और एक तिनकों का गुच्छा रहा । इस तरह जितने प्रकार के पशुओं, वस्तुओं का हिसाब रखने की आवश्यकता हुई, उसने उतना गुच्छा रखा । ऐसा समय भी आ पहुँचा, जब उसके पास अनेक गुच्छे हो गए । तब ये तिनके फिर समस्या पैदा करने लगे ।

4.3 संख्या सृष्टि :

दीवार पर रेखा खींचना या तिनकों का गुच्छा रखना या कंकड़ों की पैली रखने की व्यवस्था से पशुओं वस्तुओं, का हिसाब रखने के लिए एकाधिक तिनकों का गुच्छा या कंकड़ो का थैली की जगह सारी वस्तुओं का हिसाब रखने के लिए एक आम व्यवस्था के लिए मानव ने प्रयास किया । अंत में इसी आवश्यकता की पूर्ति के लिए उसने 'संख्या' की सृष्टि की। ये संख्याएँ हुईं-

एक, दो, तीन, चार, पाँच, छह, सात, आठ, नौ, दस... ये शब्द बोलने हुए उसने वस्तुओं की गणना की ।



एक   दो   तीन

संख्या-संकेतों की सृष्टि

बातचीत में या फिर वस्तुओं को गिनते समय दो नारियल, पाँच केले आदि बोले गए । परंतु उन्हें आसानी से लिखने के लिए हरेक संख्या के लिए एक खास संकेत सृष्टि करने की आवश्यकता हुई ।

इस आवश्यकता की पूर्त्ति के लिए संख्या-संकेत बने। जितनी ज्यादा वस्तुएँ, उतनी सारी संख्याएँ और उनमें सारे संख्या-संकेत बनाए गए। धरती के विविध इलाकों के लोगों ने अलग-अलग संख्या-संकेत पैदा किए ।

बता सकते हो ?
ज्यादा संख्याओं के लिए ज्यादा संख्या-संकेत पैदा होने पर मनुष्य ने किस समस्या का सामना किया होगा ।

4.4 स्थानीयमान व्यवस्था

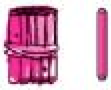
भारतीय विद्वानों ने पूर्वोक्त समस्या (अनेक संख्याओं के लिए अनेक संकेतों के व्यवहार का हल खोज निकाला । उन्होंने कुछ ही संख्याओं के लिए संकेत पैदा किए और वे हैं-

ओड़िया में	୧	୨	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯
हिन्दी में	१	२	३	४	५	६	७	८	९
अंग्रेजी में	1	2	3	4	5	6	7	8	9

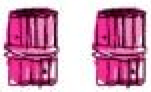
सिर्फ इन संकेतों का व्यवहार करते हुए और बड़ी-बड़ी संख्याओं के संकेत पैदा करने के लिए उन्होंने तिनकों की गिनती के समय गुच्छा बनाकर गिनने की पद्धति अपनाई ।

ज्यादा तिनकों के होने पर गिनने की पद्धति

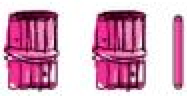
एक गुच्छा



एक गुच्छा और एक तिनका



दो गुच्छे



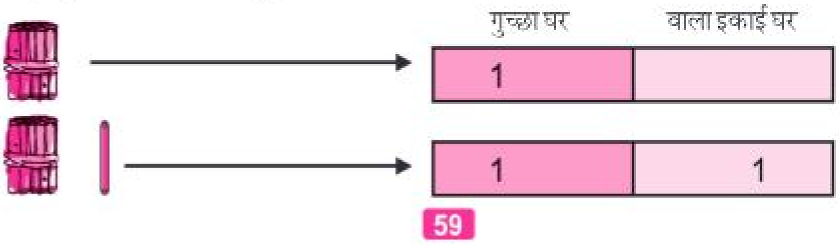
दो गुच्छे और एक तिनका

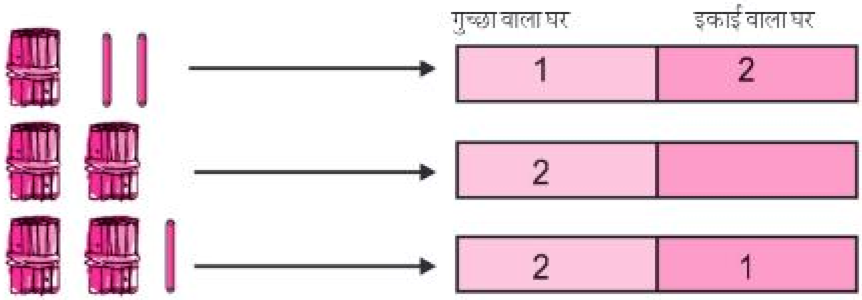
इस प्रकार की गिनने की पद्धति का अनुसरण करने हुए संख्या की लिखन पद्धति पैदा करने की लिए घर या स्थान की कल्पना की गई ।

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

(9 तिनके) (एक तिनका) (दस तिनकों का एक गुच्छा)

दस तिनकों का एक गुच्छा लिखने के लिए एक घर या स्थान पैदा किया गया । वह है -





इकाई घर खाली होने से इस संख्या-लेखन पद्धति में फिर समस्या पैदा हुई । वह है -

दस →	1	
बीस →	2	

दस, बीस आदि संख्याएँ लिखते समय इकाई वाला घर शून्य रहता है । इसलिए दो घर न बनाने से इकाई वाला घर शून्य रहने की बात नहीं दिखाई जा पाएगी । परंतु दूसरी संख्याओं के मामले में घर न दिखाकर भी संख्या लिखना संभव हो रहा है । जैसे कि-

ग्यारह →	1	1	→ 11
बारह →	1	2	→ 12

११ लिखने पर दो घरों के होने की बात पता चल जाती है । 12, 13, 25, 27 आदि लिखते समय घर न बनाए जाने पर भी दोनों संख्याओं के दो घरों के होने की धारणा हो रही है । परंतु दस, बीस, तीस आदि संख्याओं के मामले में इकाईवाला घर शून्य है, वह सिर्फ घर बनाए जाने पर ही पता चलेगी । जैसे कि-

	गुच्छा वाला घर		
दस →	1		इकाई घर में कुछ नहीं
बीस →	2		इकाई घर में कुछ नहीं
तीस →	3		इकाई घर में कुछ नहीं

भारतीय विद्वानों ने भी उस समस्या का हल किया ।

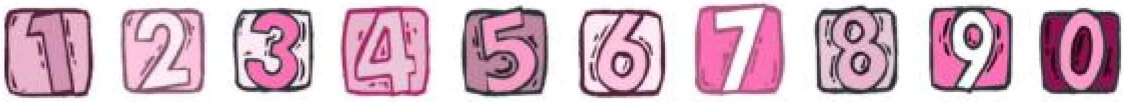
4.5 शून्य की परिकल्पना

'कुछ नहीं' को शून्य कहा जाता है । इसलिए 'कुछ नहीं' या 'शून्य' के लिए उन्होंने संकेत '0' पैदा किया और उसका नाम 'शून्य' रखा । इससे पूर्वोक्त समस्या हल हो गई । अब लिखेंगे-

दस →	1		→	1	0	→ 10

अब संख्या लिखते समय घर बनाने की आवश्यकता नहीं रही । संख्या-लेखन में दो संख्याओं का व्यवहार होने पर दो घरों या दो स्थानों की सूचना मिलती है।

हरेक स्थान का एक 'मूल्य' या 'मान' रहा । इसलिए इस पद्धति को 'स्थानीय मान' पद्धति कहा गया । इस पद्धति में संख्या-लेखन पद्धति की पूर्णता लाने के लिए शून्य (0) पैदा किए जाने की बात तुम जान चुके हो । इसलिए अब हमारे पास संख्या-लेखन के लिए जो संकेत मिले हैं, वे हैं-



4.5.1 अंक, संख्या और दशामलव संख्या पद्धति

पूर्वोक्त दस संकेतों के व्यवहार से किसी भी बड़ी संख्या का लिखना संभव हो पाया । जैसे कि-

'तीन सौ पैंतालीस' के लिए संकेत 345 यहाँ,

एकक या इकाई के स्थान पर 5 और इसका मूल्य या मान है $= 5 \times 1 = 5$;

दशक या दहाई के स्थान पर 4 और उसका मूल्य या मान है $= 4 \times 10 = 40$;

शतक या सैकड़ो के स्थान पर 3 है और इसका मूल्य या मान है $= 3 \times 100 = 300$

यहाँ संख्या है 345। यह संख्या लिखते समय इकाई, दहाई और संकड़ा (या सौ) के स्थानों क्रमश: 5, 4 और 3 रहे। इन 5, 4 और 3 को 345 में व्यवहृत अंक के रूप में स्वीकार किया गया।

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 और 0 का व्यवहार करके बनाई गई संख्याओं में उन्हें अंक कहा जाता है । परंतु जब हम पाँच कलमें कहते हैं, तब कलमों की संख्या है = 5 । यहाँ 5 एक संख्या है यही संख्या एक अंक को लेकर बनी है और वह अंक है 5।

पता है ?
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 और 0 का इस्तेमाल करके संख्या बनाने पर इन्हें उस संख्या का अंक कहा जाता है। उन्हें भी संख्या के रूप में इस्तेमाल किया जाता है।

4.6 गणन संख्या

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11... आदि संख्याओं की गणना के लिए उपर्युक्त संख्याओं का प्रयोग किए जाने के कारण इन्हें 'गणन संख्या' कहा जाता है ।

उत्तर लिखो :

- गणन संख्या-समूह में कौन-सी क्षुद्रतम संख्या है ?
- हरेक गणन संख्या से उसकी परवर्त्ती गणन संख्या कितनी बड़ी है ?
- इस संख्या-समूह का अंत कहाँ है ?

गणन संख्या के बारे में कई तथ्य

- गणन संख्या समूह में क्षुद्रतम (लघुतम) संख्या 1 है । संख्या 1 से पहले और कोई संख्या नहीं है ?
- हरेक संख्या की एक परवर्त्ती संख्या है । किसी संख्या की परवर्त्ती संख्या पूर्ववर्त्ती संख्या 1 से ज्यादा है ।
- हरेक संख्या की पूर्ववर्त्ती संख्या परवर्त्ती संख्या से 1 कम है । परंतु 1 की कोई पूर्ववर्त्ती संख्या नहीं है ।
- गणन संख्या समूह में कोई वृहत्तम संख्या नहीं है । जितनी बड़ी संख्या होने पर भी उसकी परवर्त्ती संख्या है और यह पूर्ववर्त्ती बड़ी संख्या से 1 ज्यादा है ।
- गणन संख्या लिखने के लिए दस अंकों का व्यवहार किए जाने के कारण इसे दस आधारवाली संख्या या दशमलव संख्या पद्धति कहा जाता है ।

4.7 प्राकृत संख्या

दैनंदिन जीवन की विविध स्थितियों में इन गणन-संस्याओं के ज्यादातर उपयोग की आवश्यकता हुई । नीचे कई परिस्थितियों का वर्णन किया गया है ।

स्थिति - 1

घर में 5 नींबू थे । फिर पेड़ से 7 नींबू तोड़े गए । कुल कितने हुए ? इस स्थिति से मनुष्य ने योग प्रक्रिया की बात सोची।

स्थिति-2

घर में 20 नारियल थे । उसमें से घर के त्योहार में 8 नारियल व्यवहृत हो गए । बचे हुए नारियल को जानने के लिए मनुष्य ने वियोग प्रक्रिया की बात सोची ।

स्थिति-3

खेत से घर में हर बार 15 धान के गुच्छे आए । 7 बार में कुल कितने गुच्छे आए ? यह जानने के लिए सारे गुच्छों को इकट्ठा करके गिनने के बदले उसने गुणन-प्रक्रिया की बात सोची ।

स्थिति-4 :

20 कॉपियाँ स्कुल में लाई गई थी। हर बच्चे को 3-3 करके कॉपियाँ देनी थी। तो फिर कितने बच्चे कॉपियाँ पाएँगे और कितनी बच जाएगी ?

एक-एक बच्चे को कॉपी बाँटने से पहले कितने बच्चे 3-3 करके कॉपी पाएँगे और (कितनी) बच जाएगी, यह जानने के लिए उसने विभाजन (भाग) प्रक्रिया की बात सोची।

गणन संख्याओं और उनके साथ योग, वियोग (घटाव) आदि प्रक्रियाओं के व्यवहार को शामिल करके प्राकृत संख्या की व्यवस्था (संकेत N द्वारा सूचित) पैदा हुई । प्राकृत संख्या समूह बने 1, 2, 3, 4..........................

गणन संख्या के बारे में दिए गए तीन तथ्य भी प्राकृत संख्याओं के लिए सच है । यानी-

- क्षुद्रतम प्राकृत संख्या 1 है । इसकी कोई पूर्ववर्त्ती प्राकृत संख्या नहीं है ।
- हरेक संख्या की एक परवर्त्ती संख्या है । किसी संख्या की परवर्त्ती संख्या पूर्ववर्त्ती संख्या से 1 ज्यादा है । हरेक संख्या की पूर्ववर्त्ती संख्या परवर्त्ती संख्या से 1 कम है । यद्यपि यह 1 के लिए सच नहीं है क्योंकि 1 की कोई पूर्ववर्त्ती प्राकृत संख्या नहीं हैं।
- प्राकृत संख्या समूह में कोई वृहत्तम संख्या नहीं है । कितनी बड़ी संख्या होने पर भी उसकी परवर्त्ती संख्या है और वह अपनी पूर्ववर्त्ती संख्या से 1 ज्यादा है ।

अभ्यास कार्य 4.1

1. क्षुद्रत्तम प्राकृत संख्या कितनी है ?

2. हरेक संख्या की बायीं ओर उसकी पूर्ववर्त्ती संख्या ओर दायीं ओर उसकी परवर्त्ती संख्या लिखो ।

   (क)___ ,28, ___ (ख)___, 248, ___ (ग) ___, 567, ___

   (घ) ___, 3856, ___ (ङ) ___, 5000, ___ (च) ___, 99999, ___

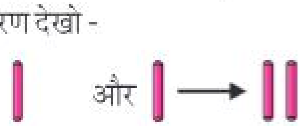
3. (क) 57 से क्षुद्रत्तर कितनी प्राकृत संख्या है ?
   (ख) 48 और 216 के बीच कितनी प्राकृत संख्या है ?
   (ग) 5729 के परवर्त्ती तीन क्रमिक प्राकृत संख्याएँ लिखो ।

4. (क) इकाई अंक 5 वाली क्षुद्रत्तम छह अंकोवाली संख्या लिखो ।
   (ख) इकाई अंक 7 वाली वृहत्तम सात अंकोवाली संख्या लिखो ।
   (ग) छह अंकोंवाली क्षुद्रत्तम संख्या से सात अंकोवाली वृहत्तम संख्या तक (उभय संख्याआं को मिलाकर) कितनी प्राकृत संख्या है ?

4.8. प्राकृत संख्याओं में विभिन्न प्रक्रियाएँ और उनसे जुड़ नियम

4.8.1. योग प्रक्रिया :

हरेक प्राकृत संख्या से उसकी पूर्ववर्त्ती संख्या 1 ज्यादा है, इसी नियम का प्रयोग करते हुए योग-प्रक्रिया की सृष्टि है । नीचेवाला उदाहरण देखो -



(एक तिनका और एक तिनका मिलकर)

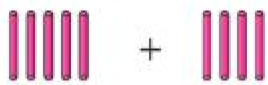
1 + 1 = 1 की परवर्त्ती संख्या = 2

2 + 1 = 2 की परवर्त्ती संख्या = 3

3 + 1 = 3 की परवर्त्ती संख्या = 4

> **क्या तुम जानते हो ?**
> किसी प्राकृत संख्य में 1 जोड़ने से उसकी परवर्त्ती संख्या प्राप्त होती है ।

अब 5 + 4 का मूल्य निर्णय करेंगे । 5 + 4 का मूल्य जानने के लिए हम पाँच तिनकों के साथ और चार तिनकों को मिलाएँगे ।



5 तिनके 4 तिनके

5 से 4 को जोड़न का मतलब 4 एक को बार बार 5 से मिलाना । ऐसा करने से हम पाएँगे 5 + 4 = 9 । इसलिए 5 + 4 = 9

4.8.2. योग प्रक्रिया से जुड़े नियम

खुद करके देखो

- तुम अपने एक दोस्त के साथ मिलकर बैठो । दोनों 6-6 करके संख्या-कार्ड लो ।
- तुम अपने दोस्त के पास वाले कार्डों में से एक लाओ और अपने पासवाले कार्डों में से एक लो ।
- दोनों संख्या कार्डों पर लिखी दोनों संख्याओं को जोड़ो और परिणाम को अपनी कॉपी में लिखो । मान लों तुम्हारे दोस्त से तुम 7 लाए हो और अपने पासवाले संख्या कार्ड़ों से 6 लिया है । दोनों संख्याओं का योगफल हुआ, 7 + 6 = 13
- तुमने जिस तरह यह काम किया, अपने दोस्तों से वैसा करने को कहो ।
- अपने पास के सारे कार्ड़ खत्म होने तक ऐसा काम करते हुए योगफल को कॉपी में लिखो ।
- क्या हरेक बार जोड़ी-संख्या का योगफल एक प्राकृत संख्या है ?

ऐसा देखा जाएगा कि हरेक प्राकृत संख्या-जोड़ी का योगफल एक प्राकृत संख्या है ।

हमने देखा,

किसी भी दो प्राकृत संख्याओं का योगफल एक प्राकृत संख्या है, इस नियम को योग प्रक्रिया का संवृति नियम कहा जाता है ।

योगफल निर्णय करो -

(क) 12 + 5 (ख) 45 + 12

क्या दोनों स्थितियों में योगफल एक प्राकृत संख्या हो रहा है ? इससे प्राकृत संख्याओं में योग प्रक्रिया किस नियम का पालन करता हुआ लग गयी है ?

खुद करके देखो

- तुम और तुम्हारे दोस्त मिलकर बैठो । दस संख्याकार्ड लो ।
- ली गई दस संख्याओं में से किन्ही दो संख्याओं को अपनी कॉपी में लिखो । इन दोनों संख्याओं को उस क्रम में लेकर योग करो । प्राप्त योगफल को कॉपी में लिखो ।
- उदाहरण 8 + 6 = 14
- अपने दोस्त से दोनों संख्याओं को उल्टे क्रम के योग करते हुए योगफल को कॉपी में लिखने को कहो । अब वह लिखेगा, 6 + 8 = 14
- दोनों तरह की योग प्रक्रिया के परिणाम की तुलना करो ।
- हर बार दो-दो करके संख्याओं को लेकर ऐसा काम करो । क्या पाते हो, बताओ ।

दो प्राकृत संख्याओं का क्रम बदलकर योग करने से योगफल समान रहता है । इसे योग प्रक्रिया का क्रम विनिमयी नियम कहते हैं।

निम्न उक्तियों को अपनी कॉपी में लिखकर उनके खाली स्थान भरो ।

(क) 2038 + 352 = 352 + ______ (ख) 365 + ______ = 148 + 365

खुद करके देखो

- तुम अपनी कॉपी में / कक्षा के फर्श पर तीन कोठरियाँ बनाओं। उन्हें पहली, दूसरी और तीसरी कोठरी के रूप में नामित करो । कम्-से-कम् 10 संख्या काड़ लो ।

4	5	7

पहला चरण :

- हर कोठरी के अंदर एक-एक संख्या काड़ रखो ।
- अब पहली और दूसरी कोठरियों वाली संख्याओं को जोड़ो । योगफल कितना मिला, लिखो । प्राप्त हुए योगफल में तीसरी कोठरीवाली संख्या को जोड़ो । इसे इस प्रकार लिखा जा पाएगा (4+7) + 5 = 16 के रूप में लिखा जाएगा ।
- अब दूसरी और तीसरी कोठरियों की संख्याओं को जोड़ो । योगफल कितना मिला ? योगफल में पहली कोठरी की संख्या को जोड़ो । कुल योगफल कितना हुआ ? इसे 4+(7+5)=16 के रूप में लिखा जाएगा ।

दूसरा चरण :

- अब और तीन संख्याकार्ड़ों को तीन कोठरियों मे रखकर पहले चरण में जैसा काम किया था, वैसा काम करो ।
- पहले चरण और दूसरे चरण में किए हुए काम से क्या पाते हो ?

4, 7 और 5 को जोड़ने के लिए पहली पद्धति में, 4 और 7 के योगफल के साथ 5 को जोड़ा गया । परंतु दूसरी पद्धति में 4 के साथ 7 और 5 के योगफल को जोड़ा गया । हर स्थिति में योगफल 16 हुआ ।

$$(4 + 7) + 5 = 4 + (7 +5)$$

इसलिए तीन संख्याओं को जोड़ने की पद्धति हम जान पाए । तीन प्राकृत संख्याओं की जोड़ की स्थिति में हमने जो नियम देखा, उसे योग की स्थिति में साहचार्य या सहयोगी नियम कहाजाता है ।

4.8.3. घटाव-प्रक्रिया और उससे जुड़े नियम

आओ, घटाव प्रक्रिया का एक उदाहरण देखें ।

- एक चॉकबाक्स में 8 चॉक रखो ।
- उस बाक्स से 3 चॉक ले जाने के लिए अपने एक दोस्त से बोलो ।
- उसके 3 चॉक ले जाने के बाद और कितने चॉक बचे, देखेंगे ।

8 चॉक से तुम्हारे दोस्त ने एक चॉक ले गया । यानी चॉक संख्या 8 से 1 कम हो गयी । 8 से 1 कम यानी 8 की पूर्ववर्त्ती संख्या है - 7 ।

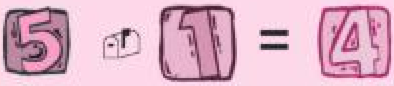
फिर 7 चॉक से और 1 चॉक ले जाने के बाद बचे हुए चॉक की संख्या- 6 यानी 7 से 1 कम यानी 7 की पूर्ववर्त्ती संख्या 6 ।

वैसे ही और एक चॉक ले जाने के बाद बचे हुए चॉक की संख्या 6 से 1 कम यानी 6 की पूर्ववर्त्ती संख्या- 5, अत: $8 - 3 = 5$

उसी तरह हम पाएँगे -

$8 - 1 = 7$
$8 - 2 = 6$
$8 - 3 = 5$
$8 - 4 = 4$
$8 - 5 = 3$
$8 - 6 = 2$
$8 - 7 = 1$

क्या तुम जानते हो ?
किसी संख्या से एक (1) घटाव करने से उसकी पूर्ववर्त्ती संख्या मिलती है ।



हमारी प्राकृत संख्या जगत में 1 क्षुद्रत्तम संख्या है । 8 – 8 = कितना ? इस परिणाम को लिखने के लिए हमारे पासवाले संख्या समूह में कोई संख्या नहीं है ।

इसलिए हमने सीखा 8 से 8 या 8 से किसी बड़ी संख्या का घटाव किया नहीं जा पाएगा ।

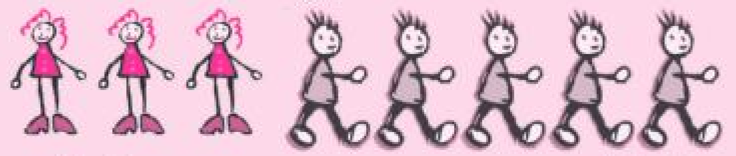
दूसरे शब्दों में, प्राकृत संख्याओं में किसी संख्या से उस से छोटी संख्या का घटाव किया जा पाएगा एवं घटाव फल एक प्राकृत संख्या ही होगा ।

योग-प्रक्रिया से घटाव-प्रक्रिया का संबंध

नीचेवाले चित्र में हमने देखा है-

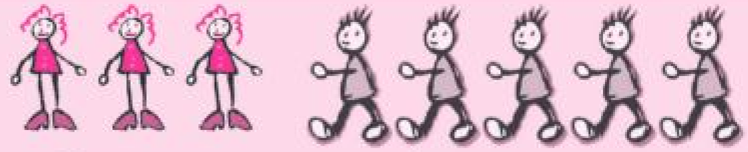
कई बच्चे थे, उनमें से कुछ चले गए और कुछ बचे रहें ।

8 थे



बचे थे - 3 गये थे - 5

8 - 5 = 3



बचे थे - 3 लौट आए - 5

3 + 5 = 8

बचे हुए बच्चों के साथ लौट आए बच्चे, 3 + 5 = 8

इसलिए हमने देखा, 8 - 5 = 3 से मिला 3 + 5 = 8

हम कहते हैं, 8 - 5 = 3 । इसी घटाव वाली बात में योग की बात है 3 + 5 = 8

- आओ, दो प्राकृत संख्याएँ लेकर बड़ी से छोटी संख्या का घटाव करेंगे ।

मान लो, हमने लिए 8 और 10

10 – 8 = 2 8 – 10 = कितने ?

हम पहले विचार कर चुके हैं कि छोटी संख्या से बड़ी संख्या का घटाव नहीं किया जा पाएगा ।

इसलिए 8 –10 के लिए हमारे पास कोइ उत्तर नहीं है । अत: योग-प्रक्रिया जिस तरह क्रम विनिमय नियम का अनुसरण करती है, वैसे ही घटाव-प्रक्रिया भी क्रम विनिमय नियम का पालन नहीं करती ।

5 + 8 + 3 को सरल करते समय हम साहचर्य नियम का प्रयोग करते हैं, क्योंकि ।

(5+8) + 3 = 5 + (8+3) ।

तो फिर 9 – 5 – 2 के बारे में क्या हो रहा है, देखें ।

(9 - 5) - 2 = 4 - 2 9 - (5-2) = 9 - 3

= 2 = 6

अत: (9 - 5) - 2 ≠ 9 - (5-2)

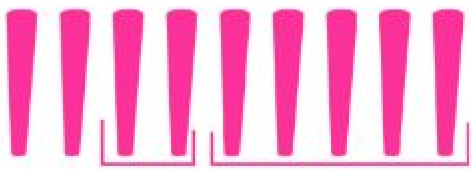
अत: घटाव के क्षेत्र में **साहचर्य नियम प्रयुक्त नहीं होता** ।

क्या तुम जानते हो ?
'समान / बराबर नहीं है' को ≠ संकेत से दर्शाया जाता है, उदाहरण के लिए 4–3≠0

तो फिर 9 – 5 – 2 को कैसे सरल बनाएँगे ?

यथार्थ जीवन की एक परिस्थिति सोचें जहाँ 9 – 5 – 2 को सरल करने की आवश्यकता पड़ती है ।

चॉकबाक्य में 9 चॉक् थे । उससे सुमन्त अपनी कक्षा के लिए 5 चॉक ले गया एवं रश्मि अपनी कक्षा के लिए 2 चॉक ले गई । अब कितना चॉक बचा ?



सुमन्त के चॉक लेने के बाद बचे -

$$9 - 5 = 4$$

रश्मि के चॉक लेने के बाद बचे रहे -

$$4 - 2 = 2$$

यहाँ हमने देखा

9 – 5 – 2 में स्थित पहला घटाव कार्य पहले संपन्न हुआ और दूसरा घटाव कार्य (यानी 2 घटाव कार्य) बाद में संपन्न हुआ ।

अत: 9 - 5 - 2 = (9 - 5) - 2 = 4 - 2 = 2। दूसरे ढंग से कार्य किया जा पाता । 9 चॉक थे । सुमन्त के लिए 5 और रश्मि ने लिए 2; सुमन्त और रश्मि ने मिलकर लिये (5+2) । 9 से (5+2) चले जाने के बाद बचा रहा है 9–(5+2)।

$$\therefore 9 - 5 - 2 = 9 - (5+2)$$
$$= 9 - 7 = 2$$

तुम उसी प्रकार 6-1-2 के लिए यथार्थ जीवन की परिस्थिति का उदाहरण लेकर घटावफल निर्णय करो ।

अभ्यास कार्य 4.2

1. साहचर्य नियम के अनुसार दो तरीकों से योगफल निर्णय करो ।

(क) 12 + 9 + 8 = (12 + 9) + 8 = ... + ... = ...

(ख) 12 + 9 + 8 = 12 + (9 + 8) = ... + ... = ...

2. (क) प्राकृत संख्या समूह के अन्तर्गत हरेक संख्या, उसकी पूर्ववर्ती संख्या से कितनी ज्यादा है ?

(ख) सबसे छोटी प्राकृत संख्या कौन-सी है ?

(ग) सबसे बड़ी प्राकृत संख्या कौन-सी है, क्या तुम इसे बता पाओगे ?

(घ) एक बहुत बड़ी संख्या सोचो । उसकी परवर्त्ती संख्या तुम्हारी सोची हुई संख्या से कितनी बड़ी है ?

3. 536 + 718 + 464 का क्रम विनिमय और साहचर्य नियमों का प्रयोग करो जैसे कि योग-क्रिया आसान होगी ।

4. नीचे वाले योग कार्यों को आसान ढंग से करने के लिए संख्याओं को सजाकर योग करो ।

(क) 417 + 384 + 583 (ग) 654 + 333 + 346

(ख) 2536 + 1205 + 7464 (घ) 2062 + 353 + 1438 + 547

5. निम्नलिखित घटाव कथनों को योग-कथन में लिखो ।

(क) 9 - 5 = 4 (ख) 12 - 7 = 5 (ग) 316 - 285 = 31

6. एक गाँव की जनसंख्या 1500 हैं । यदि उस गाँव के पुरुषों की संख्या 489 और नारियों की संख्या 512 हो, तो बच्चों की संख्या कितनी है ?

7. शोभन के पास 52,778 रुपए थे । उसने 5000 रुपए का कर्ज चुकाया और 2500 रुपए की एक साइकिल खरीदी । उसके पास कितने रुपए बचे ?

4.8.4 गुणन-प्रक्रिया और उससे जुड़े नियम

(क) गुणन प्रक्रिया

तुम जानते हो 5 + 5 को लिखा जाता है 5 x 2;

5 + 5 + 5 को लिखा जाता है 5 x 3;

5 + 5 + 5 + 5 को लिखा जाता है 5 x 4

यानी, एक प्राकृत संख्या को उसी संख्या के साथ बार-बार योग करने को गुणन के जरिए व्यक्त किया जाता है ।

5 x 2 का फल जानने के लिए हम 5 + 5 का योगफल निर्णय करते हैं।

वैसे ही 5 x 3 का फल जानने के लिए हम तीनों 5 का योग करते हैं। यानी 5 x 3 का मतलब है तीन का 5 योग ।

इसलिए आम तौर पर हम कहते हैं-

$$4 \times 7 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28$$

हम गुणन को योग में बदलकर दो संख्याओं का गुणन फल निर्णय करते हैं और उसी गुणन फलों को खाने में लिखकर उन्हें याद रखते हैं। हमारे याद रखे पहाड़े का व्यवहार करते हुए बड़ी-बड़ी संख्याओं का गुणन करते हैं ।

गुणन-प्रक्रिया से जुड़े विविध नियम :

(क) निचली संख्याओं का गुणनकार्य करते हुए गुणनफल निर्णय करो ।

5 x 7 = 8 x 6 = 12 X 9 = 14 x 12 =

जो गुणन फल प्राप्त किए, वे किस प्रकार की संख्या है ?

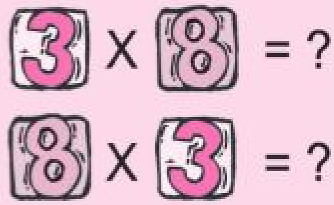
हमने देखा -

दो प्राकृत संख्याओं का गुणनफल एक प्राकृत संख्या है ।

यानी गुणन-प्रक्रिया संवृत्त नियम का अनुसरण करती है ।

(ख) **खुद करके देखो**

- किन्हीं दो प्राकृत संख्याएँ अपनी कॉपी में लिखो । उनमें से एक को पहली संख्या और दूसरे को दूसरी संख्या का नाम दो ।
- पहली संख्या को दूसरी संख्या से गुणा करके गुणन फल निर्णय करो ।
- उसी तरह अब दूसरी संख्या को पहले संख्या से गुणा करके गुणन फल निर्णय करो । क्या पाया ?
- अब और एक प्राकृत संख्या जोड़ी लेकर वैसा कार्य करो ।



हर स्थिति में देखेंगे कि दोनों संख्याओं का क्रम बदलकर गुणा करने पर गुणन फल समान होता है ।

हमने सीखा, दो संख्याओं को क्रम बदलकर गुणा करने से गुणन फल नहीं बदलता ।

यानी **प्राकृत संख्याओं में गुणन प्रक्रिया क्रम विनिमय नियम का अनुसरण करती है ।**

(ग) नीचे किए गए कार्य को देखो -

तीन टोकरियों में 4-4 करके गेंद रखी गई है और उन्हे 'क', 'ख', 'ग', 'घ' नामों से चिह्नित किया गया है ।

नीचे चार टोकरियाँ हैं । ऊपरवाली सभी टोकरियों से 'क' चिह्नित गेंदों को लाकर नीचे की पहली टोकरी में रखो ।

ऊपरवाली सभी टोकरियों से 'ख' चिह्नित गेंदों को लाकर नीचे वाली दूसरी टोकरी में रखो ।

ऊपरवाली सभी टोकरियों से 'ग' चिह्नित गेंदों को लाकर नीचे वाली तीसरी टोकर में और 'घ' चिह्नित गेंदों को लाकर नीचे वाली चौथी टोकरी में रखो ।

तीनों टोकरियों में स्थित कुल गेंदों की संख्या = 4 x 3 = 12

नीचे वाली चार टोकरियों में स्थित कुल गेदों की संख्या = 3 x 4 = 12

अत: हमने देखा, हरेक टोकरी में चार-चार करके गेंदो होकर, तीन टोकरियों में स्थित कुल गोदों की संख्या जितनी है, हरेक टोकरी में तीन-तीन करके गेंदों होकर, चार टोकरियों में स्थित कुल गेदों की संख्या उतनी है ।

4 x 3 = 3 x 4

इस कार्य से गुणन प्रक्रिया के किस नियम को परीक्षा करके देखा ?

(घ) एक बात सुनो -

राजा के भंडार से एक पिटारी की चोरी हो गई । भंडार रक्षक ने चोरी हो जाने की बात राजा को बताई और चोरी हुई पिटारी में स्थित सोने की अशर्फियों का हिसाब दिया -

भंडार रक्षक नेकहा-

पिटारी में पाँच ताक थे । हरेक ताक में 4-4 डिबियाँ थीं। और हरेक डिबियों में 3-3 सोने की अशर्फियाँ।

मंत्री ने हिसाब लगाया-

एक डिबिया में स्थित अशर्फियों की संख्या = 3

अत: 4 डिबियों में स्थित अशर्फियों की संख्या = 3 x 4 =12

∴ एक ताक पर स्थित अशर्फियोंकी संख्या =12

वैसे ही 5 ताकों में स्थित अशर्फियों की संख्या = 12 x 5 = 60

यानी, इसी हिसाब को हम लिखेंगे (3x4)x5=12x5=60

राजा ने खुद हिसाब लगाया

एक ताक में स्थित डिबियों की संख्या = 4

इसलिए 5 ताकों पर स्थित डिबियों की संख्या =4x5=20

एक डिबियों में स्थित अशर्फियों की संख्या =3

∴ 20 डिबियां में स्थित कुल अशार्फियों की संख्या = 3x20=60

यानी, इसी हिसाब को हम लिखेंगे: (4x5)x3 = 20x3=60

क्या राजा और मंत्री के हिसाबों से मिले चोरी हुई अशर्फियों की संख्या में कुछ अंतर देखते हो ?

परंतु दोनों की कार्यशैली अलग है । कार्यशैली अलग- अलग होने पर भी उत्तर समान है ।

इससे सीखा -

(3 x 4) x 5 = 3 x (4 x 5)

तुम खुद करो

(3 x 4) x 5 = ?
3 x (4 x 5) = ?
(3 x 5) x 4 = ?

हरेक स्थिति में समान गुणनफल मिलना पाएँगे । तीन प्रकार के गुणन के गुणनफलों को देखकर क्या सीखा? इससे सीखा कि तीन प्राकृत संख्याओं का गुणन करते समय पहले किन्हीं दो संख्याओं का गुणा करेंगे और गुणनफल के साथ तीसरी संख्या कार गुणा करेंगे ।

तीन संख्याओं के गुणन की स्थिति में, इसी नियम को **साहचर्य नियम** कहा जाता है ।

साहचर्य नियम :

तीनों प्राकृत संख्याओं का गुणा करते समय, उन तीनों संख्याओं में से किन्हीं दो संख्याओं को पहले गुणा करते हुए गुणनफल को तीसरी संख्या से गुणा करेंगे ।

खुद करके देखो

- 'मैं छिप गया तुम्हारे अंदर'
- तुम किसी एक प्राकृत संख्या सोचो ।
- सोची हुई संख्या को 1 से गुणा करो ।
- खुद की सोची हुई संख्या और 1 को गुणा करने के बाद प्राप्त गुणनफल को देखो श्यामपट्ट पर लिखो ।
- जिस संख्या से 1 को गुणा किया, उस संख्या और गुणनफल को देखो और उनके रिस्ते को लिखो । क्या देखा ?
- और एक संख्या लेकर उससे 1 गुणा करके गुणनफल निर्णय करो । क्या देखते हो ?

गुणन का अभेद नियम

कोई भी प्राकृत संख्या x1 = 1x वही संख्या = वही संख्या

क्या तुम जानते हो ?
1 गुणात्मक तत्समक है ।

4.7.5 गुणन और योग से जुड़े नियम

पहली स्थिति : पूजा और रिपुन दोनों का आज जन्मदिन है । पूजा की उम्र 12 है और रिपुन की उम्र 8 । उन्हें चाकलेट दिया जाएगा । हरेक को उसकी उम्र का चार गुणा संख्यक चॉकलेट दिया जाएगा । हरेक कितना करके चॉकलेट पाएँगे ?

कुल मिलाकर उन्हें कितना चॉकलेट दिया जाएगा ?

उत्तर : पूजा को मिलनेवाली चॉकलेट संख्या = 12 x 4 = 48

रिपुन को मिलने वाली चॉकलेट संख्या = 8 x 4 = 32

∴ दोनों को दिए जा रहे कुल चॉकलेट की संख्या = 48 + 32 = 80

इसी हिसाब को निम्न ढंग से भी किया जा सकता है ।

उन्हें दिए जा रहे कुल चॉकलेट संख्या = (12 + 8) x 4

= 20 x 4 = 80

इसलिए देखा, 12 x 4 + 8 x4 = (12+8) x 4

दूसरी स्थिति

एक कर्मचारी रोज मध्याह्न भोजन के लिए 20 रुपए और चाय के लिए 5 रुपए पाता है । वह चार दिनों के मध्याह्न भोजन और चाय के लिए कुल कितना रुपया पाएगा ?

पहले प्रकार का हिसाब :	**दूसरे प्रकार का हिसाब**
मध्याह्न भोजन और चाय के लिए उसके 1 दिन का प्राप्य रुपए =(20+5) रूपये	मध्याह्न भोजन के लिए 4 दिनों का प्राप्य रुपए = 20 x 4 रूपये
मध्याह्न भोजन और चाय के लिए उसके चार दिनों का प्राप्य =(20+5) x 4 रूपए	चाय के लिए 4 दिनों का प्राप्य रुपए = 5 x 4 रूपये
= 25 x 4 = 100 रूपए	4 दिनों के मध्याह्न भोजन और चाय की बाबत कुल प्राप्य = 20 x 4 रू + 5 x 4 रू = 80 रू + 20 रू = 100 रू

अत: हमने देखा $(20 + 5) \times 4 = 20 \times 4 + 5 \times 4$

इस प्रकार की अन्य दो स्थितियाँ तुम लिखो । जरुरत पड़ने पर दोस्तों या शिक्षक की मदद लो ।

हमने देखा :

तीन प्राकृत संख्याओं में से पहली और दूसरी संख्याओं के योगफल को तीसरी संख्या से गुणा करने पर जो फल मिलेगा, पहली को तीसरी से और दूसरी को तीसरी से अलग-अलग रूप से गुणा करके दोनों गुणन फलों को जोड़ने से भी समान फल मिलेगा ।

गुणन और योग संबंधी उपर्युक्त नियम को योग पर गुणन का वितरण नियम कहा जाता है ।

उसी तरह घटाव (वियोग) पर गुणन का वितरण नियम भी रहा है । इसका उदाहरण हैं-

$$(8 - 5) \times 4 = 8 \times 4 - 5 \times 4$$

इसकी सच्चाई खुद परख कर देखो ।

अभ्यास कार्य 4.3

1. निम्नलिखित हरेक उक्ति के पास प्राकृत संख्याओं की विविध प्रक्रियाओं से जुड़े नियमों के नाम लिखो-

(क) $5 \times 8 = 8 \times 5$

(ख) दो प्रारंभ संख्या का गुणनफल एक प्राकृत संख्या है।

(ग) $(8 \times 5) \times 3 = 8 \times (5 \times 3) = (8 \times 3) \times 5$

(घ) $5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$, $12 \times 1 = 1 \times 12 = 12$, $308 \times 1 = 1 \times 308 = 308$

(ङ) $(7 + 5) \times 3 = 7 \times 3 + 5 \times 3$

(च) $(12 - 4) \times 5 = 12 \times 5 - 4 \times 5$

2. निम्न उदाहरण को देखो । उसी के अनुसार परवर्त्ती गुणन कार्य करो ।

उदाहरण : $37 \times 14 = (30+7) \times 14$

$= 30 \times 14 + 7 \times 14$

$= 420 + 98$

$= 518$

(क) 118×12 (ख) 98×16 (ग) 206×18 (घ) 512×28

3. (क) प्राकृत संख्या समूह में किस संख्या को गुणात्मक तत्समक कहते हैं ?

(ख) कौन-सा नियम हमें तीन प्राकृत संख्याओं के गुणनफल निर्णय करने में मदद करता है ?

(ग) $12 \times 7 \times 5$ का गुणनफल निर्णय करने के लिए संख्याओं को सही क्रम में लेकर साहचर्य नियम का प्रयोग करो ।

4. वितरण नियम के अनुसार सरल बनाओ-

(क) $(15+5) \times 6$ (ख) $(12+7) \times 5$ (ग) $4 \times (8+6)$

(घ) $(15+12) \times 4$ (ङ) $8 \times (17-9)$ (च) $(324-220) \times 5$

5. उपर्युक्त सही नियम का प्रयोग करते हुए सरल बनाओ-

(क) $398 \times 7 + 398 \times 3$

(ख) $8265 \times 163 + 8265 \times 37$

(ग) $15625 \times 15625 - 15625 \times 5625$

(घ) $887 \times 10 \times 461 - 361 \times 8870$

6. एक दुकानदार ने एक हफ्ते में 9785 रुपए की कीमत पर 115 टेलीविजन बेचे । कुल विक्री दाम की बाबद उन्होंने कितने रूपये पाये?

7. एक व्यापारी हर रिक्शे में 3 बोरे चावल और 8 बारे दाल लादकर हाट को भेजते हैं। एक बार के हार में उन्हे 8 रिकशे में चावल और दाल लादकर हाट में भेजा। तब उस दिन के हाट में उन्होंने कितने बोरे सामान हाट में भेजा।

4.8.6 भाग (विभाजन) प्रक्रिया और उससे जुड़े नियम :

आओ एक स्थिति को देखें - विद्यालय में ध्वज फहराने के लिए 8 मिटर लंबाई की एक रस्सी चाहिए । ऑफिस में एक बड़ी रस्सी है । वह 42 मी. लम्बी है ।

रमेश ने कहा, 'ऑफिस में जो रस्सी है उससे 8 मीटर लंबाई की रस्सी काट लाएँगे,

रिहान बोला - 'बड़ी रस्सी से 8 मीटर लंबाई के जितने टुकड़े हो पाएँगे, उतने टुकड़े काटकर रख दिए, जब जरूरी होगा, उनमें से एक लाकर झंडा फहराने का काम कर पाएँगे ।

8 मीटर लंबाई की रस्सी काटने के कार्य शुरू हुआ । परंतु सीमा कागज-कलम लेकर हिसाब करने लगी-

बड़ी रस्सी की लंबाई 42 मीटर है ।

- 8 मी. लंबाई का एक टुकडा काटा गया ।

  कितनी बची ?
- और फिर 8 मी. का दूसरा टुकड़ा काटा गया ।

  कितनी बची ?
- फिर एक टुकड़ा काटा गया ?

  कितनी बची ?
- फिर एक टुकड़ा काटा गया ।

  कितनी बची ?
- फिर एक टुकड़ा काटा गया ।

  कितनी बची ?

$$\begin{array}{r} 42 \\ -8 \\ \hline 34 \\ -8 \\ \hline 26 \\ -8 \\ \hline 18 \\ -8 \\ \hline 10 \\ -8 \\ \hline 2 \end{array}$$

रस्सी काटने का कार्य खत्म होने से पूर्व सीमा ने अपना हिसाब देखकर कहा - 8 मी. लंबाई वाले रस्सी के 5 टुकड़े ही मिले होंगे और एक 2 मी. लंबाई की छोटी रस्सी बची होगी ।'

अब सबने देखा कि झंडा फहराने के लिए रस्सी के 5 टुकड़े मिले और 2 मी. लंबाई की एक छोटी रस्सी बची । सौमेन, सीमा का हिसाब देख रहा था । अंत मे उसने एक चॉक लेकर श्यामपट्ट पर हिसाब किया ।

5 टुकड़े मिले ।

$$8 \overline{)\begin{array}{r} 42 \\ -40 \end{array}}$$

2 मी. रस्सी बची ।

हिसाब करने का बाद बोला - ''काटने से पूर्व हम जान पाते है झंडा फहरानेवाली रस्सी के कितने टुकड़े मिलेंगे और कितना बचेगा ?'

हमने देखा -

42 से क्रम से 8 को बार-बार घटाव करके जो पता चला, 42 को 8 से भाग करके भी वही पता चला ।

जगदीश ने कहा - ''जिस 2मी. लंबाई का एक टुकड़ा बचा, उससे क्या काम होगा ? यदि हम रस्सी को 5 बराबर टुकड़ों में काटते, तो कुछ भी रस्सी बरबाद नहीं होती ।''

रिहान ने पुछा - ''वैसा कैसे करते ?''

आओ देखें, जगदीश ने क्या किया -

अपने एक दोस्त शरत को कुछ दूरी पर खड़ा किया और रस्सी को पाँच हिस्से होने की तरह अपने और शरत के हाथों में घुमाया। उसके बाद दोनों के हाथा के पास रस्सी के मोड़वाले स्थान से काट देने को कहा ।

अब रस्सी पाँच बराबर हिस्सों में कट गई ।

जगदीश बोला - ''देखो, इसमें रस्सी बिलकुल बरबाद नहीं हुई ।

सीमा ने पूछा - ''हर टुकड़े की लंबाई कितनी है ?''

नापने के बाद देखा गया कि हर टुकड़े की लंबाई 8 मी. 40 से.मी. हुई ।

सौमेन ने कहा - ''बिना माप किए हर टुकड़े की लंबाई कैसे जान पाएँगे, देखो ।''

रस्सी की कुल लंबाई 42 मी. यानी 4200 से.मी. है । इसे पाँच बराबर हिस्सों में काटा गया ।

इसलिए हर टुकड़े की लंबाई —— से.मी.

=840 से.मी. या 8 मी. 40 से.मी.

रिहान के किए कार्य में देखा गया - ''एक बड़ी संख्या से एक छोटी संख्या का कम से घटाव भाग है ।''

जगदीश के कार्य से देखा गया - ''भाग गुणन का विपरीत कार्य है यानी किस संख्या का 5 गुणा 42 है, वह तय करना भाग है ।'

पहले प्रकार के भाग की स्थिति में शेषफल रह सकता है ।

दूसरे प्रकार के भाग की स्थिति में शेषफल नहीं रह पाएगा ।

पहले प्रकार के भाग की स्थिति में,

42 भाज्य है	(जिस संख्या से एक छोटी संख्या को क्रम से घटाव किया गया)
8 भाजक है	(जिसे 42 से लगातार घटाव किया गया)
5 भागफल है	(42 से सर्वाधिक जितनी बार 8 का घटाव किया जा पाया)
2 शेषफल है	(42 से 8 को 5 बार घटाब करने का बाद जो बचा)

भाग करते समय हमने देखा - $42 - 8 \times 5 = 2$

भाज्य- भाजक x भागफल = शेषफल या भाज्य = (भाजक x भागपल) + शेषफल

दूसरे प्रकार के भाग की स्थिति में

42 अंश या मूल संख्या

5 है हर या भाग संख्या

$\frac{42}{5}$ मी. या 8 मी. 40 से.मी. है हरेक भाग

हरेक भाग x भाग संख्या = मूल संख्या

यहाँ हरेक भाग भिन्न संख्या हो सकता है । इसलिए इस प्रकार का भाग प्राकृत संख्या समूह के अन्तर्गत नहीं है ।

प्राकृत संख्याओं की सीमा में भाग-प्रक्रिया के बारे में कई तथ्य

- प्राकृत संख्याओं की सीमा में एक बड़ी संख्या से एक छोटी संख्या का क्रमिक घटाव भाग है ।
- बड़ी संख्या भाज्य है, बार-बार घटाव की गई छोटी संख्या भाजक है । सर्वाधिक जितनी बार घटाव किया जा सकता है, वह भागफल है और बची हुई संख्या शेषफल है ।
- शेषफल हमेशा भाजक से छोटा है ।

4.8.7. भाग प्रक्रिया के विविध नियम

(क) प्राकृत संख्या की स्थिति में विभाज्यता

कोई एक प्राकृत संख्या लेंगे जो 5 से बड़ी हुई होगी । मान लो हमने 15 लिया । इसे 2, 3, और 5 से अलग-अलग करके भाग करेंगे ।

$$2\overline{)15}\ (7 \qquad 15 - 14 = 1$$

$$3\overline{)15}\ (5 \qquad 15 - 15 = 0$$

$$5\overline{)15}\ (3 \qquad 15 - 15 = 0$$

हमने देखा - 2 से भाग करने समय 1 शेषफल रहा, परंतु 3 या 5 से भाग करते समय शेषफल शून्य रहा यानी कुछ बचा नहीं ।

इस स्थिति में हम कहते हैं - 15, 2 से विभाज्य नहीं है, परंतु 3 और 5 हरेक से विभाज्य है ।

इसलिए हमने देखा -

एक प्राकृत संख्या उससे एक छोटी संख्या से हमेशा विभाज्य नहीं है । यानी कई भाग क्रियाओं के अंत में कुछ शेषफल रहता है, अन्य कई स्थितियों में कोई शेषफल नहीं रहता ।

(ख) एक प्राकृत संख्या को उसी संख्या से भाग :

5 चॉक वाले बॉक्स से 5 चॉक ले लेने के बाद और कोई चॉक नहीं बचेगा । इसलिए 5 से 5 एक ही बार घटाव किया जा पाएगा ।

परिणामस्वरूप हमने सीखा $5 \div 5 = 1$ और कोई शेषफल नहीं ।

उसी तरह $18 \div 18 = 1$

$637 \div 637 = 1$

इससे तुम क्या देखते हो ?

क्या तुम जानते हो :
प्राकृत संख्या के बारे में कोई भी संख्या $\div$ वही संख्या =1
इसलिए हरेक प्राकृत संख्या अपने से विभाज्य है।

हमने देखा, हरेक प्राकृत संख्या को उसी संख्या से भाग करने पर शेषफल 2 रहता है ।

(ग) एक प्राकृत संख्या को 1 द्वारा भाग :

8 चॉक वाले बॉक्स से एक ही बार एक-एक चॉक लिया, 8 बार लेने के बाद सारा चॉक खत्म हो जाएगा ।

इसलिए $8 \div 1 = 8$

उसी तरह $32 \div 1 = 32$

$642 \div 1 = 642$

क्या तुम जानते हो ?
प्राकृत संख्या की स्थिति में कोई भी संख्या $\div 1 =$ वही संख्या

क्या देखते हो ?

अभ्यास कार्य 4.4

1. हरेक स्थिति में भाग क्रिया करते हुए भागफल और शेषफल निर्णय करो एवं भागक्रिया सही है या नहीं, परखो ।

(क) $7772 \div 58$ (घ) $6906 \div 35$

(ख) $6324 \div 245$ (ङ) $12345 \div 975$

(ग) $16025 \div 1000$ (च) $5436 \div 300$

क्या जानते हो ?
भागक्रिया सही है या नहीं, जानने के लिए नीचेवाला सूत्र प्रयोग किया जाता है-
भाज्य= भाजक x भागफल + शेषफल
इसे यूक्लीडीज पद्धति कहते हैं।

2. खालीस्थान भरो ।

(क) $104 \div 104 =$ .... (ख) $305 \div$ .... $= 305$

3. हरेक स्थिति में प्रदत्त संख्या को कोष्ठक वाली हर संख्या से भाग करो और किस संख्या से मूल संख्या विभाज्य है, लिखो ।

(क) 306 [2, 3, 4, 5, 6] (ख)1701 [6, 7, 8, 9] (ग) 3564 [7, 8, 9, 11]

4. छह अंकोंवाली कोई भी क्षुद्रत्तम संख्या 74 से विभाज्य है ?

5. चार अंकोंवाली कौन-सी बृहत्तम संख्या 48 से विभाज्य है ?

6. किस संख्या को 24 से भाग करने से भागफल 18 के साथ शेषफल 9 रहेगा ?

7. एक किसान के पास 700 पौधे थे । उसने हर पंक्ति में 32 करके पौधे लगाए । उनके पास कितने पौधे बचे होंगे ?

8. एक प्रेक्षालय में हर पंक्ति में 36-36 करके कुर्सियाँ रखी गई थीं । कम-से-कम कितनी पंक्तियों में 600 दर्शक बैठे पाएँगे और कितनी कुर्सियाँ बचेंगी ?

9. (क) 1325 के कम-से-कम कितना घटाव करने पर घटाव फल 36 से विभाज्य होगा ?

   (ख) 1325 से कम-से-कम कितना योग करने पर वह 42 से विभाज्य होगा ?

10. (क) 102 को 12 से भाग करो एवं नीचेवाले खाली स्थान में भागफल और शेषफल लिखो । 102 को 8 से भाग करने पर भागफल = — और = — शेषफल ।

11. प्रश्न नं 10 में देखा, 102 भाज्य होने के साथ भाजक 12 होने से भागफल 8 है; भाजक 8 होने से भागफल 12 है एवं हरेक स्थिति मे शेषफल 6 है ।

    अब 106 को 12 द्वारा भाग कर भागफल और शेषफल निर्णय करो ।

    106 को पिछले भागफल से भाग करते हुए भागफल और शेषफल कितना हो रहा है, निर्णय करो ।

    प्रश्न नं. 10 में देखा था, भाजक 12 होने के साथ भागफल 8 है एवं भाजक 8 होने पर भागफल 12 ।

    परंतु इस प्रश्न की भाग क्रिया की स्थिति में, भाजक 12 होने पर भागफल कितना मिला, उस संख्या को भाजक लेकर भागक्रिया करते समय क्या भागफल 12 हुआ ? क्यों नहीं हुआ ?

12. यदि एक संख्या को 15 द्वारा भाग करने से कोई शेषफल नहीं रहता है, तो उसी संख्या को किसी दूसरी संख्या द्वारा भाग करते पर भी कोई शेषफल नहीं रहेगा ?

4.9. प्राकृत संख्या का विस्तार

स्थानीयमान की मदद से सिर्फ दस अंकों का व्यवहार करते हुए सारी बड़ी-बड़ी संख्याओं के लेखन की बात जब सोची गई, तब 'कुछ नहीं' स्थिति को संख्या रूप देने की आवश्यकता पड़ी एवं उसके लिए शून्य (0) की सृष्टि हुई और इसे एक अंक के रूप में व्यवहार किया गया ।

दैनंदिन जीवन की विविध स्थितियों में जो था, सब खत्म हो गया, यह एक आम स्थिति है। यानी 3-3, 5-5, 215-215 आदि घटाव की स्थिति में घटाव-फल दर्शाने के लिए शून्य की आवश्यकता है । इसलिए शून्य (0) को प्राकृत संख्या-समूह में शामिल करने की बात सोची जाने लगी है । प्राकृत संख्या-समूह से शून्य (0) को शामिल करके जो संख्या समूह पैदा हुआ, वह 'संप्रसारित प्राकृत संख्या समूह' है ।

याद रखो :

0, 1, 2, 3, 4, 5...... यही संख्या समूह प्राकृत विस्तार संख्या समूह है (कुछ इसे अखंड संख्या समूह कहते हैं) इसे N* के माध्यम से सूचित किया जा रहा है।

4.9.1. संप्रसारित प्राकृत संख्या समूह में योग, घटाव आदि प्रक्रिया-

(क) कोई वस्तु न होने की स्थिति, दूसरे शब्दों में 'कुछ नहीं' की सूचक (संकेतक) संख्या शून्य (0) है ।

इसलिए 5 + 0 = 5+ कुछ नहीं

उस स्थिति में योगफल 5 ही रहेगा ।

उसी तरह, 7 + 0 = 7, 285 + 0 = 285

पिछले उदाहरणों से हमने देखा

किसी प्राकृत संख्या से शून्य (0) को योग करने पर योगफल पूर्वोक्त प्राकृत संख्या है ।

इसलिए संप्रसारित प्राकृत संख्या समूह में योग-प्रक्रिया साहचर्च नियम मानती है ।

(ख) संप्रसारित प्राकृत संख्या-स्थिति में अभेद नियम

किसी भी संप्रसारित प्राकृत संख्या से शून्य (0) जोड़ने से या शून्य (0) से किसी भी प्राकृत संख्या का योग करने से योगफल वही संख्या होगी । इसी बजह से 0 को योगफल अभेद संख्या कहा जाता है ।

ध्यान दो : प्राकृत संख्या से 0 को शामिल करने से पूर्व प्राकृत संख्या समूह योग-प्रक्रिया को अभेद नियम में स्थान प्राप्त नहीं किया था या योगात्मक अभेद भी प्राकृत संख्या-समूह में न था ।

हम खुद परीक्षा करके देख पाएँगे कि प्राकृत संख्या समूह में योग प्रक्रिया और गुणन प्रक्रिया ने जो-जो नियम अनुसरण किए थे, संप्रसारित प्राकृत-समूह के क्षेत्र में भी योग प्रक्रिया और गुणन-प्रक्रिया वही नियम अनुसरण करती है ।

4.9.2. घटाव प्रक्रिया की स्थिति में स्वतंत्र नियम

(क) नीचेवाले घटाव कार्यों को देखो -

$3 - 3 = 0, \quad 5 - 5 = 0, \quad 238 - 238 = 0$

हमने देखा,

किसी भी प्राकृत संख्या से वही संख्या घटाव करने पर घटाव फल शून्य (0) होता है ।

जब एक चॉक बाक्स में कोई चाक नहीं होता, उससें एक चॉक का टुकड़ा लाने को जाने पर खाली हाथ लौट आएँगे । यानी, हम खाली बाक्स में 'कुछ नहीं' लाए । उसके बाद भी खाली बाक्स खाली बाक्स हो रहा ।

इसलिए संप्रसारित प्राकृत संख्या की स्थिति में घटाव संबंधित एक नियम हुआ-

किसी की संख्या से उसी संख्या को घटाव करने से घटावफलू शून्य (0) होगा ।

(ख) एक दूसरी स्थिति देखें-

पाँच चॉक टुकड़ोवाले बाक्स से मैंने कोई भी चॉक नहीं लिया । बाक्स में कितना चॉक बचा ? जरुर ही बाक्स में पहले से रहे सारे चॉक रहे ।

इसलिए $5 - 0 = 5$

वैसे ही, $9 - 0 = 9$

$83 - 0 = 83$

घटाव संबंधित और एक नियम सीखा-

कोई भी संख्या − 0 = वही संख्या

(ग) संप्रसारित प्राकृत संख्या की स्थिति में गुणन प्रक्रिया से जुड़े नियम-

एक स्थिति देखें-

कैसे एक संख्या के क्रमिक योग को गुणन प्रक्रिया में बदला दिया जाता है, वह हम जानते हैं, इसलिए-

$0 + 0 + 0 + 0 = 0 \times 4$

मगर $0 + 0 + 0 + 0 = 0$

अतएव $0 \times 4 = 0$

$4 \times = 0$ का अर्थ है 4 का योग यानी 4 के बिना योग करना। इसलिए हमें '0' मिला

$4 \times 0 = 0$

$\therefore$ हमने देखा, $0 \times 4 = 4 \times 0 = 0$

उसी प्रकार $0 \times 3 = 3 \times 0 = 0$

याद रखो :
किसी भी विस्तारित प्राकृत संख्या को (0) से गुणा करने पर गुणनफल (0) प्राप्त होता है।

इस से जो गुणन संबंधी नियम बना, वह है 0 x कोई भी संख्या = वही संख्या x 0 = 0

(घ) संप्रसारित प्राकृत संख्या के संबंध में भाग संबंधी नियम :

चलो, एक स्थिति को देखें । कोई भी चॉक ना होनेवाले चॉक बॉक्स से 3 चॉक टुकड़े सर्वाधिक कितनी बार ले पाएँगे ?

बिलकुल नहीं ले पाएँगे, यानी 0 बार ले पाएँगे ।

इससे हमने क्या सीखा ?

$0 \div 3 = 0$

वैसे ही $0 \div 4 = 0$

$0 \div 8 = 0$

$0 \div 115 = 0$

भाग (विभाजन) से जुड़ा नियम : शून्य (0) ÷ शून्य के अलावा कोई भी संख्या = 0

- एक दूसरी स्थिति देखेंगे ।

12 कलमों से 4 कलमें लेने पर,

कितनी बार में सारी कलमें ली जाए पाएँगी ?

यह जानने के लिए 12 को 4 से भाग किया जाएगा,

यानी 12 से 4 को कितनी बार लिया जा पाएगा,

हमें जानना चाहिए ।

12	
- 4	एक बार लिया गया
8	
- 4	दूसरी बार लिया गया
4	
- 4	तीसरी बार लिया गया
0	

हमने देखा, 12 से 4 को 3 बार लिया जा पाया । इसलिए हम कहते हैं $12 \div 4 = 3$

वैसे ही $3 \div 0$ = कितना, निर्णय करेंगे ।

यहाँ $3 \div 0$ = कितना जानने के लिए 3 से 0 को बार-बार घटाव करेंगे,

0 को जितनी बार घटाव किया जा पाया, वही भागफल है ।

यहाँ 3 से 0 को 2 बार लिया जा पाया है । फिर भी 3 बचे रहे हैं।

और जितनी बार चाहो, उतनी बार 0 को घटाव किया जा पाएगा ।

3	
-0	एक बार लिया गया
3	
-0	दूसरी बार लिया गया
3	

इसलिए 3 से 0 को कितनी बार घटाव किया जा पाएगा, वह स्पष्ट रूप से नहीं कहा जा पाएगा ।

इसी बजह से $3 \div 0$ के लिए कोई खास भागफल नहीं है ।

भाग से जुड़ा एक दूसरा नियम : किसी भी संख्या को (0) द्वारा भाग करना निरर्थक है ।

उत्तर लिखो -

(क) 0×46 (ख) 46×0 (ग) $0 \div 46$ (घ) $46 \div 0$

अभ्यास कार्य 4.5

1. हमसे प्रयोग में लाए जानेवाले दस अंकों में से क्षुद्रत्तम अंक कौन-सा है ?

2. दो अयुत (दस हजार) पाँच लिखते समय किस-किस अलग अंकों का प्रयोग किया जाता है ?

3. 1 से 100 लिखते समय कितनी बार 0 लिखना जरूरी होता है ?

4. किसी भी संख्या से किस संख्या को जोड़ने से योगफल वही संख्या होता है ?

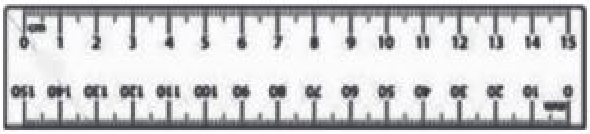
5. ऐसा एक घटाव कार्य दिखाओ, जहाँ घटाव फल 0 है ।

6. (क) एक संख्या को उसी संख्या से योग करने से योगफल भी उसी संख्या के बराबर होता है । उसका एक उदाहरण दो ।
   (ख) एक संख्या को उसी संख्या से गुणा करने से गुणाफल भी उसी संख्या के बराबर होता है, इसके दो उदाहरण दो ।

7. ऐसी एक संख्या है जिसे उसी संख्या के अलावा किसी दूसरी संख्या से भाग करने पर भागफल भी वही होता है तो फिर वह संख्या कितनी है ?

4.10 संख्या-रेखा पर संप्रसारित प्राकृत संख्या की पहचान

तुम स्केल की सहायता से मापन का कार्य करते हो । कई छोटे स्केल हैं जिन पर शून्य (0) से 15 तक संख्याएँ लिखी गई हैं।



बड़े स्केल पर 0 से 30 तक संख्याएँ लिखी होती हैं। दर्जी एक फीते का व्यवहार करते हुए तुम्हारी पोषाकें बनाने के लिए मापन करना है । कपड़े का दुकानदार छड़ी का उपयोग करना है । उससे 0 से 100 तक की संख्याएँ होती हैं।

तुम बड़े रास्ते पर जाते समय रास्ते के किनारे खुटियाँ गाड़ी जाकर उस पर किलोमीटर लिखी जाने का दृश्य देखा होगा । रास्ता जहाँ से शुरू है, वहाँ वाली खुंटी पर शून्य (0) लिखा जाता है । उसके बाद वाली खुंटी पर 1, उसके बाद की खुंटी पर 2, ऐसे ही रास्ता जहाँ पर खत्म हुआ है, वहाँ पर स्थित खुंटी पर यदि 425 लिखा गया होता है, तो रास्ता शुरू होने के स्थान से रास्ते के अंतिम स्थान के बीच दूरी 425 कि.मी. या रास्ते की लंबाई 425 कि.मी. है ।

मीटर छड़ी में लिखी गई से.मी. संख्या, रास्ते के किनारे लिखी गई कि.मी. संख्या देख कर, सचमुच रेखा के साथ संख्या के संपर्क के बारे में हमारी धारणा हो रही है ।

इसलिए यदि हमेशा एक रेखा के साथ हमसे व्यवहृत संख्याओं का रिस्ता बना पाये तो संख्या की उपयोगिता को ज्यादा स्पष्ट कर पाएँगे ।

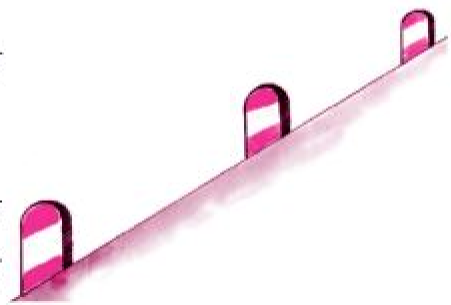
रेखा या सरल रेखा का विस्तार दोनों दिशाओं में असीम है, परंतु हम जानने वाले संप्रसारित संख्या समूह एक दिशा में सीमित है । क्योंकि 0 (शून्य) से छोटी संख्या का पता हमारे पास नहीं है । इसलिए 0 (शून्य) हमारी जानकारी में प्राकृत संख्या-समूह की सीमित छोर है । पंरतु दूसरी दिशा में संख्या का विस्तार असीम है । इसलिए प्राकृत संख्या-समूह एक दिशा में सीमित होने के साथ-साथ दूसरी दिशा में असीम है । हम जानते हैं, एक किरण एक दिशा में सीमित और दूसरी दिशा में असीम है ।

क्या तुम जानते हो ?

सरल रेखा दोनों दिशाओं में असीम है

किरण

इसलिए हमारी जानकारी वाले संख्या-समूह के साथ एक किरण की समानता होने की बात पता चलती है ।



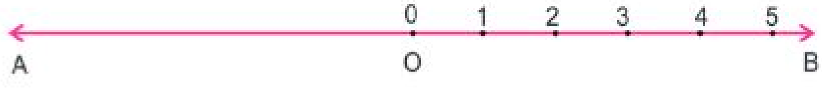
तो एक किरण भी एक रेखा का हिस्सा है । इसलिए हम एक रेखा लेकर उसके एक हिस्से से सूचित किरण पर संप्रसारित संख्याओं को पहचानने की कोशिश करेंगे, ठीक वैसे ही जैसे एक रास्ते पर 0, 1, 2 ... आदि कि.मी. की खुटियाँ लगाई जाती हैं।

तुम्हारे व्यवहार में आ रहे स्केल या दुकानदार के द्वारा व्यवहृत मीटर छड़ी पर हर एक से.मी. के. अंतर में 1, 2, 3, आदि संख्याएँ होती हैं। रास्ते पर 1 कि.मी. की दूरी पर कि.मी. खुटियाँ लगाई जाती हैं।

इसलिए हम भी एक रेखा पर एक खास दूरी को इकाई-दूरी लेकर संख्या-संकेत देंगे । यही इकाई-दूरी कितनी ली जाएगी, वह हम पर निर्भर करती है ।

4.10.1 रेखा पर संख्या-पहचान की पद्धति

एक रेखा अंकन करने हुए इस पर एक बिंदु का संकेत देंगे और उसका नामकरण करेंगे 0। अब '0' मुल बिंदु वाली दो किरणें हमें मिलीं। दायीं ओर वाली किरण $\overrightarrow{OA}$ एवं बायीं ओर वाली किरण $\overrightarrow{OB}$।



$\overrightarrow{OA}$ पर किसी भी दूरी पर 0 से शुरू करके बिंदु देंगे (यही दूरी होगी इकाई-दूरी) । किरण A दिशा में असीम होकर बढ़ी है । दिए गए चित्र में हम

खास संख्या बिंदु (चित्र में 0 को मिलाए 6 बिंदु) देखने पर भी असल में किरण पर अनगिणत बिंदु हैं । अब 0 से शुरू करके दायीं ओर के बिंदुओं पर हम क्रमश: 0, 1, 2, 3 आदि संख्या लिखेंगे, अब $\overleftrightarrow{AB}$ रेखा को संख्या रेखा कहेंगे ।

बताओ तो कयों हम इसे संख्या रहिम न कहकर संख्या रेखा कहेंगे।

खुद करके देखो

- तुम अपनी कॉपी में एक सरल रेखा का अंकन करो ।
- इसके किसी भी बिंदु को O नाम से नामित करो ।
- O बिंदु की बायीं ओर रेखा पर एक बिंदु दे करके उसका नाम B दो और O बिंदु के दायीं ओर एक बिंदु देकर उसका नाम A दो ।
- O बिंदु से शुरू करके $\overrightarrow{OA}$ पर समान दूरी पर स्केल का व्यवहार करते हुए बिंदुओं को चित्रित करो एवं बिंदुओं के निकट बायें से दायें के क्रम में 1, 2, 3... आदि संख्या लिखो ।
- याद रखो, दूर दो क्रमिक संख्याओं की बीचवाली दूरी एक इकाई है।
- उसी संख्या रेखा को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दो ।

  (क) शून्य सूचक बिंदु से शुरू करके कितनी इकाई दूरी पर 5 सूचक बिंदु स्थित है?

  (ख) 3 सूचक बिंदु से दायीं ओर 3 इकाई दूरी पर कौन सी संख्या हैं? 3 + 3 = कितना है?

  (ग) 8 संख्या सूचक बिंदु 2 इकाई बायीं ओर कौन सी संख्या है और उस संख्या से फिर 3 इकाई बायीं ओर कौन सी संख्या है?

  (घ) 2 संख्या सूचक बिंदु से 3 इकाई दायीं ओर जाओ बायीं और उसके बाद और 4 इकाई दायीं ओर जाओ अब किस संख्या पर जा पहुँचे ? 2 + 3 + 4 = कितना?

बताओ तो :

(क) संख्या रेखा पर योग करने के लिए किस दिशा में जाना पड़ रहा है?

(ख) संख्या रेखा पर घटाव करने के लिए किस दिशा में जाना पड़ रहा है?

पाँचवां अध्याय

भिन्न संख्या

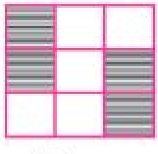
5.1. हम जो जानते हैं

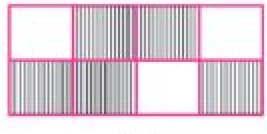
एक वस्तु के एक अंश के परिमाण को व्यक्त करने के लिए भिन्न संख्या की दृष्टि की गई थी । एक भिन्न संख्या लिखने में व्यवहृत की गई दे गणन संख्याओं में से किसे अंश और किसे दूर कहते हैं, उसको बता पाना हम जानते हैं। एक या एक से ज्यादा संपूर्ण वस्तु के साथ दूसरी एक वस्तु के एक अंश को मिलाकर उसके परिमाण को व्यक्त करने के लिए जिस भिन्न संख्या की आवश्याकता पड़ती है, उसे विषत भिन्न या विचित्र भिन्न कहते हैं, यह भी हम जानते हैं। एक भिन्न संख्या की बराबर भिन्न संख्याओं को दर्शाना भी जानते हैं।

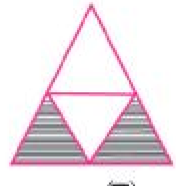
हमने पहले भिन्न संख्याओं के बारे में जो कुछ सीखा था, उस पर आधारित निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखो :

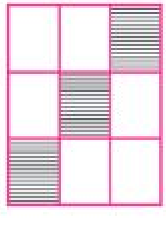
अभ्यास कार्य 5.1

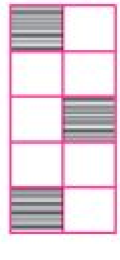
1. निम्न चित्रों के चित्रित अंशों के संपूर्ण चित्र को भिन्न संख्या के रूप में व्यक्त करते हुए दूसरी पन्ने पर दी गई सारणी की तरह एक सारणी अपनी कॉपी में बनाकर उसे भरो।

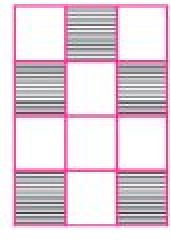

(क)


(ख)


(ग)

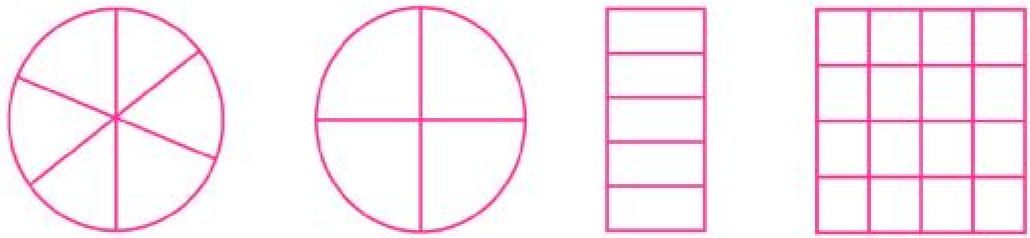

(घ)


(ङ)


(च)

चित्र का क्रम	(क)	(ख)	(ग)	(घ)	(ङ)	(च)	
भग्न संख्या							
अंश							
हर							

2. हरेक चित्र की भाँति एक चित्र अपनी कॉपी में बनाओ चित्र के नीचे जो भिन्न संख्या दी गयी है, उसके अनुसार चित्र के अंश को चित्रित करो।



$\frac{5}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{16}$

5.2 कई समान आकार वाली वस्तु समूह की भिन्न संख्या -

एक वस्तु के एक अंश के परिमाण को व्यक्त करने के लिए एक भिन्न संख्या का प्रयोग करने की बात हम जानते हैं। अब कई समान आकार वाले वस्तु समूह से कुछ वस्तुओं को लेकर उन्हें पूरे समूह के एक अंश के रूप में व्यक्त करने के लिए कैसे भिन्न संख्या का व्यवहार किया जाता है, आओ देखें ।

तुम्हारे विद्यालय के 10 शिक्षकों में से 5 शिक्षक खेल मैदान में बच्चों को खेला रहे हैं। शेष शिक्षक कक्षाओ में हैं। तो फिर सारे शिक्षकों का कितना अंश मैदान में है, आओ देखें ।

मैदान मे महजूद शिक्षक	
कक्षाओं में उपस्थित शिक्षक	

हमने उर्ध्व चित्रों में देखा है-

जितने शिक्षक मैदान मे हैं, उतने ही शिक्षक कक्षाओं में हैं ।

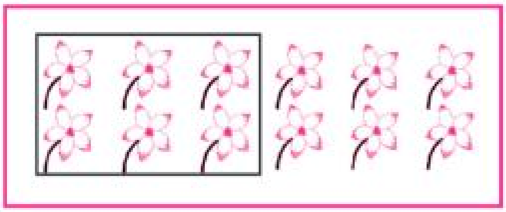
इसलिए शिक्षकों का आधा मैदान में है, 10 में से 5 को हम कहते हैं $\frac{5}{10}$ ।

10 शिक्षकों को दो बराबर बाँटने से हरेक हिस्से में स्थित शिक्षकों की संख्या $=10 \div 2=5$

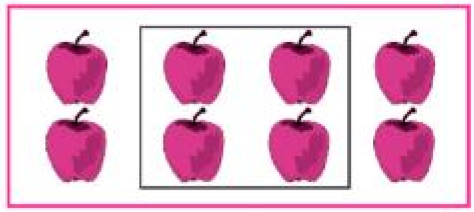
अत: 10 शिक्षकों में से 5 हैं 10 के बराबर हिस्सों मे से एक हिस्सा ।

इसलिए हम कहते हैं, 10 से 5 हैं 2 बराबर हिस्सों से 1 हिस्सा । अत: 10 से 5 हैं $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

नीचे दी गई उक्तियों को अपनी कॉपी में लिखो और चित्रों को देख कर खाली स्थानों में सही भिन्न संख्या लिखो ।



(क)



(ख)

चित्र - (क) में छोटे घर में स्थित फूल बड़े घर में स्थित समूह के ------- बराबर भाग से ------ भाग है । इसलिए छोटे घर में स्थित 6 फूल फूल समूह की ------- भिन्न संख्या हैं ।

चित्र - (ख) में छोटे घर में स्थित फल बड़े घर में स्थित फल समूह के ------- बराबर भाग से ------ भाग है । इसलिए ये 4 फल 8 फलों की ------- भिन्न संख्या है ।

अब हमने जाना -

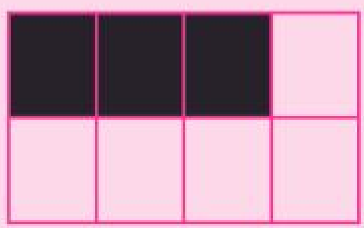
एक प्रकार की वस्तुओं के समूह से कई वस्तुओं को लेने से यह मूल समूह की एक भिन्न संख्या होती है ।

याद रखो

- एक वस्तु के एक अंश को उसी वस्तु के एक भिन्न या भग्नांश के रूप में व्यक्त किया जाता है । उसी भिन्न के परिमाण को भिन्न संख्या में व्यक्त किया जाता है ।
- एक प्रकार की वस्तुओं के समूह से कई वस्तुओं को लेने से उन्हें भी मूल समूह की एक भिन्न संख्या के रूप में व्यक्त किया जाता है ।

खुद करके देखो

कार्य - 1



- एक आयताकार कागज लेकर उसके आठ बराबर मोड़ बताओ।
- प्राप्त आठ हिस्सों में से तीन हिस्सों में काला रंग भरो ।
- कागज पर हुए काला रंग वाला हिस्सा कितना भग्नांश या भिन्न है बताओ।

कार्य - 2

- बराबर आकार की 10 छड़ियाँ लो । उन्हीं छड़ियों में से दो-दो करके एक साथ बाँध दो ।
- कुल कितने गुच्छे बंधे होते देखे?

✍ **पिछले पन्ने के कार्य - 2 को देख कर खाली स्थान भरो ।**

कुल पाँच गुच्छाओं में से तीन गुच्छे लेकर अपने दोस्त को दो ।

- बंधे गए —— बराबर गुच्छों में से तुम्हारे दोस्त को —— गुच्छे दिए गए है ।
- इसलिए तुम्हारे दोस्त को मिली छड़ियाँ मूल छड़ियों के समूह के —— बराबर भागों से —— भाग है ।
- फलस्वरूप मूल छड़ी समूह के —— भिन्न छड़ी तुम्हारे दोस्त को मिली हैं ।
- तुम्हारे दोस्त को मिले 3 गुच्छों में —— छड़ियाँ हैं।
- इसलिए तुम्हारे दोस्त 10 छड़ीयों में से —— छड़ियाँ प्राप्त की हैं ।

ध्यान से - तुम्हारे दोस्त को मिली छड़ियाँ, मूल समूह की 10 छड़ियों में से 6 छड़ियाँ हैं। इसलिए तुम्हारे दोस्त को प्राप्त छड़ियाँ मूल समूह का $\frac{6}{10}$ है।

हमने देखा मूल समूह का $\frac{6}{10}$ जितना है, $\frac{3}{5}$ भी उतना है ।

✍ **निम्न उक्तियों के खाली स्थान भरो -**

(क) 5 कलमों में से 3 कलमों —— भिन्न संख्या होंगी ।

(ख) 7 पेंसिलों में से 4 पेंसिल —— भिन्न संख्या होंगी ।

(ग) 9 बच्चों में से 5 बच्चे —— भिन्न संख्या होंगी ।

5.3 इकाई भिन्न संख्या

निम्नलिखित भिन्न संख्याओं को देखो -

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$

यहाँ भिन्न भिन्न संख्याओं का अंश 1 है, वे हैं $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{5}$ ।

उसे इकाई (एकक) भिन्न संख्या कहते हैं ।

उसी तरह का भिन्न संख्याओं का अंश 1,
उसे एकक भिन्न संख्या कहते हैं ।

क्या तुम जानते हो
हरेक भिन्न संख्या को हम कुछ एकल भिन्न संख्या की समष्टि के रूप में लिख सकते है। जैसे - $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

उदाहरण - 1 निम्न भिन्न संख्याओं को एकक भिन्न संख्या की समान के रूप में लिखो ।

(क) $\frac{5}{8}$ (ख) $\frac{7}{10}$

समाधान :

(क) $\frac{5}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

(ख) $\frac{7}{10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$

उदाहरण - 2

निम्नलिखित भिन्न संख्या को कितनी एकक (इकाई) भिन्न संख्याओं के समान के रूप में लिखा जा सकता है?

(क) $\frac{4}{9}$ (ख) $\frac{5}{12}$

समाधान :

(क) $\frac{4}{9}$ को 4 एकक भिन्न संख्याओं के समान के रूप में लिखा जा सकता है (क्योंकि 4, का समान $\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$)

(ख) $\frac{5}{12}$ को 5 एकक भिन्न संख्याओं के समान के रूप में लिखा जा सकता है ।

अभ्यास कार्य 5.2

1. निम्न उक्तियों को अपनी कॉपी में लिखो और उनके खाली स्थानों को भरो ।

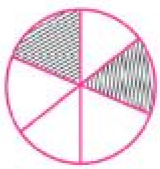
(क) 3 को अंश और 5 को हर के रूप में लेकर गठित भिन्न संख्या ------- ।

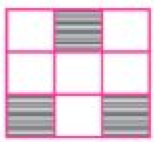
(ख) $\frac{2}{5}$ का हर, अंश से ------- ज्यादा है ।

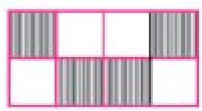
(ग) $\frac{3}{8}$ का मतलब, एक वस्तु के -------- बराबर भागों से -------- भाग है । और भी $\frac{3}{8}$ का मतलब है एक प्रकार की वस्तुओं के एक समूह के -------- बराबर भागों से ------- भाग ।

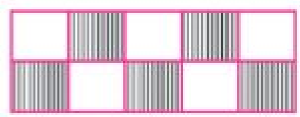
2. $\frac{3}{5}, \frac{7}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{9}, \frac{9}{10}$ भिन्न संख्याओं में लिखत प्राकृत भिन्न संख्या और अप्राकृत भिन्न संख्याओं को अलग- अलग करके लिखो ।

3. चित्रों को देखकर हरेक चित्र का चित्रित अंश संपूर्ण चित्र का कितना भग्नांश या भिन्न है, लिखो ।


चित्र (क)


चित्र (ख)


चित्र (ग)


चित्र (घ)

4. निम्नलिखित हरेक उक्ति के लिए सही भिन्न संख्या लिखो -

(क) 5 पेंसिलों में से 2 पेंसिलें टूटी हुई हैं।

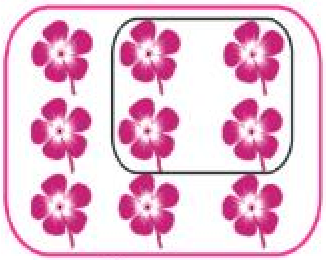
(ख) 8 फूलों में से 3 फूल सूखे हैं।

5. (क) 1, 2, 3, 4, संख्याओं में से दो - दो संख्याएं लेकर लिखी जा सकने वाली प्राकृत भिन्न संख्याएं लिखो ।

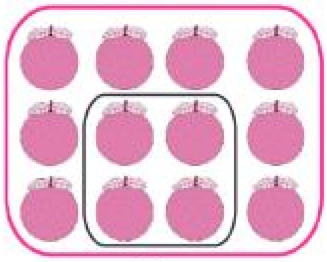
(ख) 7, 8, 9, 10 संख्याओं में से दो-दो संख्याओं का बराबर करते हुए लिखी जा सकते वाली सारी अभ्यास (अप्रहत) भिन्न संख्याएँ लिखो और उन्हें मिश्रित संख्यों में बदलो ।

(ग) 4, 5, 6, 7, 8, 9 संख्याओं में से दो -दो संख्याओं का बराबर करते हुए ऐसी भिन्न संख्याएँ लिखो, जिसमें अंश हर का अपेक्षा (i)2 कम और (ii)3 ज्यादा है ।

6. हरेक चित्र में स्थित वस्तुओं में से छोटी कोठरी के अंदर की वस्तुएँ कितनी भग्नांश या भिन्न हैं?



चित्र (क)



चित्र (ख)

7. निम्नलिखित हरेक भिन्न संख्या को एकक भिन्नसंख्याओं की समष्टि के रूप में व्यक्त करो ।

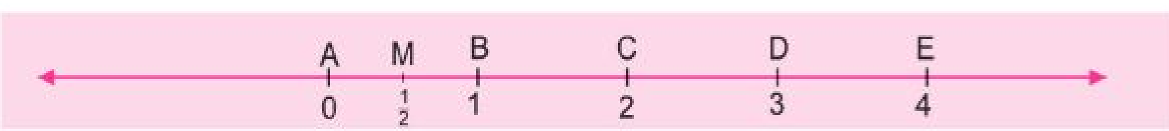
(क) $\frac{3}{5}$ (ख) $\frac{7}{8}$ (ग) $\frac{3}{10}$

5.4 संख्या रेखा पर भिन्न संख्याओं का स्थान निर्णय

संख्या रेखा से तुम पहले परिचित हो । पिछले अभ्यास में तुमने संख्या रेखा पर 0, 1, 2, 3 आदि संख्याओं को दर्शाया था ।

- संख्या रेखा के बारे में तुम पहले जो जानते हो।
- संख्या रेखा एक सरल रेखा होती है ।
- उस रेखा पर बराबर दूरी पर बिंदूओं को चित्रित किया जाता है ।
- आसपास के हरेक बिंदु जोड़ी की मध्यवर्त्ती रेखा के अंश को एक इकाई के रूप में लिया जाता है ।
- संख्या रेखा पर चिह्नित बिंदु एक सीधे रास्ते के किनारे पर स्थित किलोमीटर खुटियों की भाँति है । आसपास के दो किलोमीटर खुंटियों के मध्यवर्त्ती रास्ते की लंबाई 1 कि.मी है । वैसे ही संख्या रेखा पर आसपास वाले दो बिंदुओं की मध्यावर्त्ती दूरी एक इकाई होती है ।

निम्न संख्या रेखा को ध्यान से देखो -



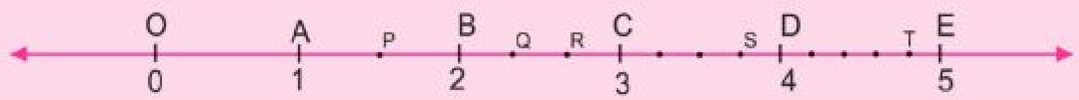
उस संख्या रेखा पर $\frac{1}{2}$ भिन्न संख्या को दर्शाता है। $\frac{1}{2}$ भिन्न संख्या को दर्शाने के उद्देश्य से संख्या रेखा पर इकाई दूरी यानी आसपास चिह्नित दूरी को 2 से.मी या 4 से.मी. की भाँति 2 से विभाज्य हो रही माप लोगे (उसका कारण बाद में जान पाओगे ।)

उपरिस्थ संख्या रेखा पर M बिंदु संख्या रेखा के AB अंश को दो बराबर हिस्सो में बांट रहा है । इसलिए $AM = \frac{1}{2}$ इकाई । अत: M बिंदु $\frac{1}{2}$ का संकेत बिंदु है ।

5.4.1 संख्या रेखा पर अन्य भिन्न संख्याएँ

$\frac{1}{3}$ को संख्या रेखा पर सूचित करने के लिए संख्या रेखा की इकाई दूरी को 3 से.मी. लेंगे । 0 और 1 के सूचक बिंदु मध्यवर्त्ती इकाई अंश को 3 बराबर हिस्सो में बांटेंगे । दो विभाज्य बिंदु मिलेंगे उसमें से पहला $\frac{1}{3}$ को सूचित करेगा और दूसरा $\frac{2}{3}$ को सूचित करेगा ।

अब नीचेवाली संख्या रेखा को देखो ।



- उपरिस्थ संख्या रेखा पर 0, 1, 2, 3, 4, 5 संख्याओं को चिह्नित किया गया है और उन्हें क्रमश: O, A, B, C, D, E के नामों से नामित किया गया है ।
- A से B तक के अंश 2 बराबर हिस्से लिए जाकर विभाज्य बिंदु को P नाम दिया गया है ।
- B से C तक अंश को 3 बराबर हिस्सों में बाँटकर विभाज्य बिंदुओं को Q और R नाम दिए गए हैं ।
- C से D तक के एक अंश को 4 बराबर हिस्सों में बाँटकर तीन विभाज्य बिंदुओं में से तीसरे बिंदु को S नाम दिया गया है ।
- D से E तक के एक अंश को 5 बराबर हिस्सों में बाँटते हुए विभाज्य चार बिंदुओं में से चौथे बिंदु को T नाम दिया गया है ।

अभी लक्ष्य दिजिए-

O से P तक के हिस्से की माप

= OA + AP

= 1 इकाई +1 इकाई का $\frac{1}{2}$ अंश

= $1+\frac{1}{2}$

= $1\frac{1}{2}$ [$1+\frac{1}{2}$ को हम लिखते हैं $1\frac{1}{2}$]

इसलिए P से सूचित संख्या = $1\frac{1}{2}$

O से Q तक के हिस्से की माप

= OB + BQ

= 2 इकाई +1 इकाई का $\frac{1}{3}$ अंश

= $2+\frac{1}{3}$

= $2\frac{1}{3}$

इसलिए Q से सूचित संख्या = $2\frac{1}{3}$

बताओ तो

संख्यारेखा में $\frac{3}{4}$ को कैसे दर्शाओगे।

Q से R तक एक अंश की माप

$= OB + BR$

$= 2$ इकाई $+1$ इकाई का $\frac{2}{3}$ अंश

$= 2+\frac{2}{3}$

$= 2\frac{2}{3}$

इसलिए R से सूचित संख्या $= 2\frac{2}{3}$

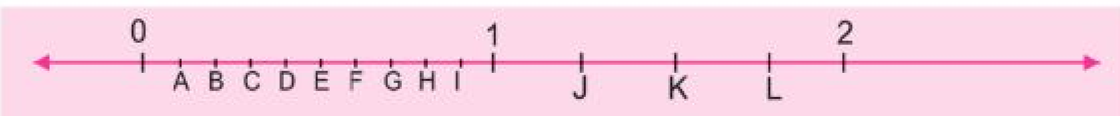
बताओ तो

S द्वारा सूचित बिंदु और T द्वारा सूचित बिंदु किन-किन भिन्न संख्याओं को सूचित कर रहा है?

अब हमने निर्णित संख्याओं को संख्या रेखा पर स्थापित करने की विधि सीखी ।

अभ्यास कार्य 5.3

1.



उपरिस्थ संख्या रेखा पर 0 और 1 को सूचित कर रहे दो बिंदुओं की मध्यवर्त्ती संख्या रेखा के अंश को बराबर दस भागों में एवं 1 और 2 को सूचित कर रहे दो बिंदुओं की मध्यवर्त्ती संख्या रेखा के अंशों चार बराबर हिस्सों में बाँटा गया है। विभाज्य बिंदुओं को A, B, C आदि नाम दिए गए हैं। किस बिंदु द्वारा कौन सी संख्या सूचित है, उसे नीचे लिखो ।

(क) A से सूचित संख्या - ____________ ।

(छ) B से सूचित संख्या - ____________ ।

(ख) C से सूचित संख्या - ____________ ।

(ज) D से सूचित संख्या - ____________ ।

(ग) E से सूचित संख्या - ____________ ।

(झ) F से सूचित संख्या - ____________ ।

(घ) G से सूचित संख्या - ____________ ।

(ञ) H से सूचित संख्या - ____________ ।

(ङ) I से सूचित संख्या - ____________ ।

(ट) J से सूचित संख्या - ____________ ।

(च) K से सूचित संख्या - ____________ ।

(ठ) L से सूचित संख्या- ____________ ।

2. नीचे की संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाओ ।

(क) $\frac{3}{4}$ (ख) $1\frac{1}{3}$ (ग) $2\frac{1}{4}$ (घ) $3\frac{1}{3}$ (ङ) $4\frac{1}{2}$

3. (क) संख्या रेखा उपरिस्थ किन दो आसपास वाली पूर्ण संख्याओं में सारी प्राकृत भिन्न संख्याएँ स्थित हैं?

(ख) संख्या रेखा उपरिस्थ किन दो आसपास वाली पूर्ण संख्याओं में $2\frac{1}{5}$ स्थित है?

4. (क) $\frac{15}{4}$ को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए पहले क्या करना होगा?

(ख) कौन-सा क्षेत्र किम क्षेत्तों नजदीकी पूर्ण संख्याओं के बीच $\frac{15}{4}$ स्थित है?

(ग) इस पूर्णसंख्या सूचक दो बिंदुओं के बीच वाली संख्या रेखा के अंश को कितना बराबर भाग करना होगा?

(घ) $\frac{15}{4}$ को निर्णित संख्या में बदल कर उसे संख्या रेखा पर दर्शाओ ।

5.5 वस्तुओं के जरिए विभाज्य भिन्न संख्या -

रिंकु, निकी, रोजी एवं स्वीटी ने स्कूल में अपना अपना नाश्ता खा लेने के बाद उनके पास स्थित पाँच सेबों को बाँटकर खाने को चाहा । अब प्रश्न उठता है कि पाँच सेबों को कैसे चार सहेलियाँ बाँट कर खाएँगी ।

निकी ने कहा - चलो, पहले हरेक एक एक सेब बाँट लेंगी और बचे एक सेव की एक चौथाई की बाँट लेंगी ।

राजी बोली - वह तो ठीक है । परंतु आओ, पहले हर सेब को चार चौथाई करेंगी और हर सेब की चार चौथाई से एक चौथाई हम बाँट लेंगी ।

स्वीटी ने कहा - पहले प्रकार की बाँट के समय हरेक का हिस्सा था 1 सेब और 1 चौथाई सेब

= 4 चौथाई + 1 चौथाई = 5 चौथाई

अत: दोनों स्थितियों में हरेक के हिस्सों में आया 1 पूरा सेब और एक चौथाई सेब यानी 5 चौथाई सेब या $1\frac{1}{4}$

अत: हमने देखा

$$1\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

रिंकु बोली - $5 \div 4$ को $\frac{5}{4}$ भी के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ।

अत: हमने सीखा : $5 \div 4 = \frac{5}{4}$ और $1\frac{1}{4}$

हमें पता था $5 \div 4 =$ भागफल 1 और शेषफल 1

अब पाया, $5 \div 4 = 1\frac{1}{4}$

> **ध्यान दो-** भाग क्रिया की सहायता से भिन्न संख्या को निश्चित संख्या में बदला जा पाएगा ।
>
> $$4\overline{\big)\begin{array}{l}5\\-4\\\hline 1\end{array}}\ \ 1$$ इसलिए $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

उदाहरण-1 नीचे लिखी गयी भग्न संख्यायों को मिश्र संख्या में बदलो ।

(क) $\frac{15}{4}$ (ख) $\frac{27}{8}$

समाधान : (क) $5 \div 4 =$ भागफल 3, भागशेष 3 $\therefore \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

अथवा

$$4\overline{\big)\begin{array}{l}15\\-12\\\hline 3\end{array}}\ \ 3$$

3 भागशेष $\therefore \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

(ख)

$$8\overline{\big)\begin{array}{l}27\\-24\\\hline 3\end{array}}\ \ 3$$

भागशेष $\therefore \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$

उदाहरण-2 $3\frac{2}{5}$ को अप्रकृत भग्नसंख्या में बदलो ।

समाधान :

पहेली प्रणाली

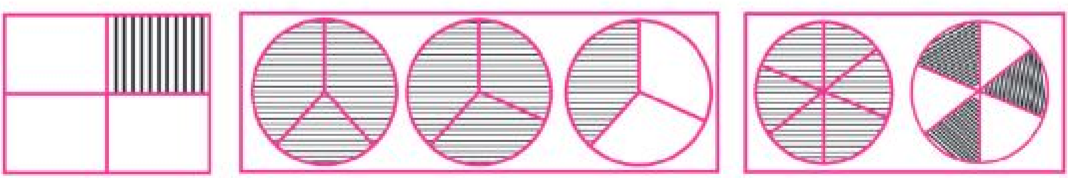
$$3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{3x5}{5} + \frac{2}{5}$$
$$= \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$$

दूसरी प्रणाली

$$3\frac{2}{5} = \frac{3x5+2}{5} = \frac{17}{5}$$

अभ्यास कार्य 5.4

1. नीचे का हरेक चित्र प्राकृत भिन्न संख्या रहा है या निश्चित संख्या सूचित कर रहा है, उन्हें लिखो ।



2. निम्न निश्चित संख्याओं को अभाज्य भिन्न संख्याओं में बदलो ।

(क) $3\frac{2}{3}$ (ख) $2\frac{2}{3}$ (ग) $1\frac{5}{8}$

3. निम्न अभाज्य भिन्न संख्याओं को निश्चित संख्याओं में बदलो ।

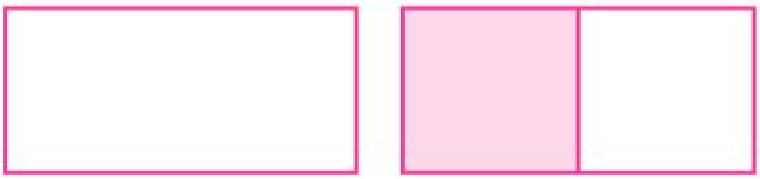
(क) $\frac{18}{7}$ (ख) $\frac{20}{9}$ (ग) $\frac{23}{8}$

4. निम्न भागक्रियाओं के भागफल को निश्चित संख्या में व्यक्त करो ।

(क) $19 \div 5$ (ख) $24 \div 7$ (ग) $34 \div 13$

5.6 सम भिन्न संख्या

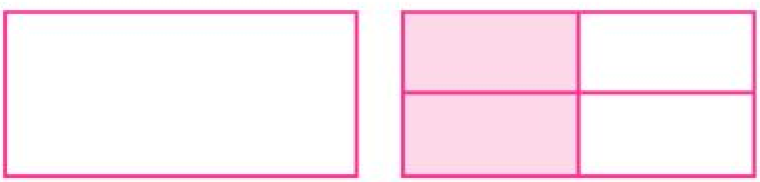
रघु ने एक आयताकर कागज के टुकड़े को लेकर बराबर दो हिस्सों में मोड़ दिया और कागज के टुकड़ों पर दिखाई दे रहे दो बराबर हिस्सों में से एक हिस्सों को रंग से भर दिया ।



अपने पास बैठे यदु से पूछा - रंग वाला हिस्सा पूरे कागज के टुकड़े का कितना अंश है?

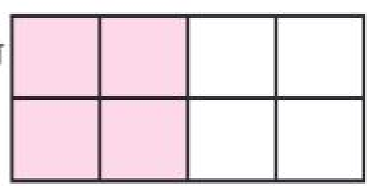
यदु बोला, - दो बराबर हिस्सों में 1 हिस्सा, इसलिए रंगवाला हिस्सा पूरे कागज का $\frac{1}{2}$ है।

रीना पास खड़ी थी। उसने उस कागज के टुकड़े को बराबर चार हिस्सों में मोड़ दिया । उसके बाद रंग भरे गए कागज को खोल दिया ।



खोले गए कागज को दिखाकर यदु से पुछा - पूरे कागज का कितना अंश रंग से भरा है, बताओ, यदु बोला - 4 बराबर हिस्सो में से 2 हिस्से? यदु ने फिर कहा - तो फिर पूरे कागज का रंग हुआ अंश है $\frac{2}{4}$।

अब सबने कहा, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$



कूनी यह सब देख रही थी । उसने रीना के द्वारा चार हिस्से किए कागज को लेकर और बराबर दो हिस्सों में मोड़ दिया ।

कागज के टुकड़े को खोलकर सबको दिखाया । सबने देखा, रंग हुआ अंश पूरे कागज का $\frac{4}{8}$ है ।

अत: सबने जाना : $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$

आओ, समतुल भिन्न संख्याओं को समझने की कोशिश करें ।

हमने देखा, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1x2}{2x2}$

और $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}=\frac{1x4}{2x4}$ आदि।

वैसे ही $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1x3}{2x3}$

यहाँ $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ ....आदि सम भिन्न संख्याएँ हैं।

याद रखो

किसी भिन्न संख्या की समभिन्न संख्या निरूपण करने के लिए भिन्न संख्या के अंश और हर दोनों को एक निश्चित संख्या से गुणन करना पड़ता है। उसी प्रणाली से हम एक भिन्न संख्या के साथ-साथ उनगिनत सममिल संख्या पा सकते हैं।

वैसे ही $\frac{1}{3}$ की चार सम भिन्न संख्याएँ निर्णय करने का प्रयास करो ।

दूसरे ढंग से - $\frac{4}{8}=\frac{4\div 4}{8\div 4}=\frac{1}{2}$,

$\frac{2}{4}=\frac{2\div 2}{4\div 2}=\frac{1}{2}$

अत: $\frac{4}{8}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}$ आदि सम भिन्न संख्याएँ हैं ।

याद रखो

किसी भिन्न संख्या से समभिन्न संख्या पाने के लिए अंश और हर दोनों को सम संख्या से भाग करना पड़ेगा।

ध्यान दो : यदि अंश और हर, दोनों किसी एक निश्चित संख्या द्वारा विभाज्य होते हैं, तो हम उपरिस्थ विधि का प्रयोग कर पाएँगे । इस स्थिति में हम सीमित सम भिन्न संख्या पाएँगे ।

उदाहरण के लिए : $\frac{12}{15}$ का एक सम भिन्न संख्या $=\frac{12\div 3}{15\div 3}=\frac{4}{5}$

$\frac{9}{15}$ **क्या उस की एक सम भिन्न संख्या निर्णय कर पाओगे जिसका हर 5 होगा ?**

अभ्यास कार्य 5.5

1. निम्न भिन्न संख्याओं की पाँच - पाँच सम भिन्न संख्याएँ निर्णय करो

   (क) $\frac{2}{3}$ (ख) $\frac{1}{3}$ (ग) $\frac{2}{3}$ (घ) $\frac{5}{9}$

2. $\frac{2}{5}$ भिन्न संख्या की एक सम भिन्न संख्या निर्णय करो, जिसका अंश 6 होगा ।
3. $\frac{15}{27}$ की एक सम भिन्न संख्या निर्णय करो जिसका हर 9 होगा ।
4. $\frac{2}{7}$ का एक सम संख्या निर्णय करो, जिसका हर 63 होगा ।
5. $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ हरेक भिन्न संख्या के लिए 12 हर वाली एक एक सम भिन्न संख्या लिखो ।

6. $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}$ और $\frac{7}{12}$ हरेक भिन्न संख्या के लिए 24 हर वाली एक एक सम भिन्न संख्या लिखो ।

7. $\frac{3}{8}$ की सम भिन्न संख्या लिखते समय 15, 24 और 32 में से किसे हर के रूप में व्यवहार नहीं किया जा पाएगा? कारण बताओ है?

5.7. समान और असमान भिन्न संख्या

पार्श्वस्थ कोठरी से दो-दो संख्याएँ लेकर भिन्न संख्या बनाओ।

1	2	3
4	5	6
	7	

तुम्हारी बनाई भिन्न संख्याओं में से समान हर वाली भिन्न संख्याओं को अलग करके लिखो। समान हर वाली भिन्न संख्याओं को समान भिन्न संख्या कहते हैं।

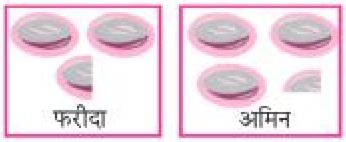
$\frac{7}{19}$ और $\frac{7}{25}$ क्या समान भिन्न संख्याएँ है कैसे हैं बताओ ?

प्रदत्त दो भिन्न संख्याओं के हर असमान होने के कारण उन दोनों भिन्न संख्याओं को **असमान भिन्न संख्याएँ** कहा जाता है ।

उत्तर दिखो -

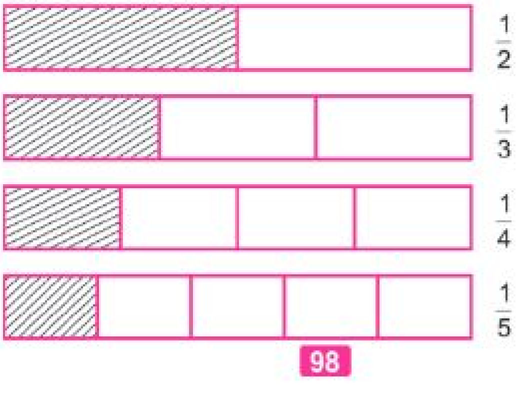
- पाँच समान भिन्न संख्याएँ लिखो ।
- पाँच असमान भिन्न संख्याएँ लिखो ।
- $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{7}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}$ भिन्न संख्याओं में से समान भिन्न संख्याओं को अलग करके लिखो ।

5.8. भिन्न संख्याओं की तुलना



फरीदा और अमिन के प्लेट पर क्रमशः $2\frac{1}{2}$ और $3\frac{1}{4}$ रोटियाँ हैं।
तो फिर किसके पास ज्यादा रोटी है? फरीदा के पास दो रोटियाँ और एक रोटी का आधा रहते समय अमिन के पास तीन रोटियों से ज्यादा रोटी है ।
$\therefore 3\frac{1}{4} > 2\frac{1}{2}$, इसलिए अमिन के पास ज्यादा रोटी है ।

निम्न चित्र को देखो



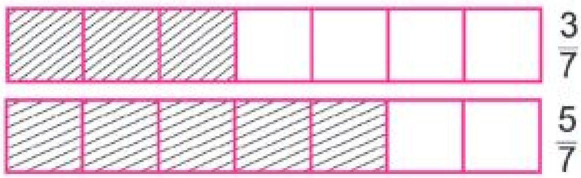
चित्रों के चित्रित अशों को मूल चित्र से भिन्नांश के रूप में दर्शाया गया है । चारों मूल चित्र बराबर हैं।

चित्रित अंश को देखते हुए भिन्न संख्याओं को बड़ी से छोटी क्रम में सजाओ।

5.8.1 समान भिन्न संख्याओं की तुलना

आओ $\frac{3}{7}$ और $\frac{5}{7}$ में तुलना करेंगे ।

नीचे दो समान आकार (आयताकार) वाले चित्र लिए गए हैं और हरेक को समान 7 भागों में बाँटा गया है । पहले चित्र में 3 भागों को चित्रित करके $\frac{3}{7}$ भिन्न संख्या दर्शायी गई है ।



बताओ तो :
दो समान भिन्न संख्याओं में बड़ी भिन्न संख्या को कैसे पहचानें ?

दूसरे चित्र का चित्रित अंश पहले चित्र के चित्रित अंश की तुलना में बड़ा है ।

इसलिए हमने देखा: : $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$

खुद करके देखो

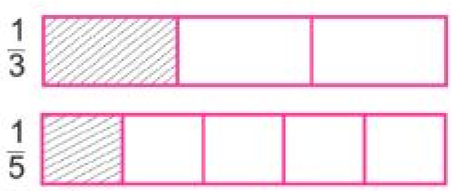
- चित्रों के जरिए $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{5}$ में तुलना करो ।
- समान आकार के दो कागज के टुकड़े लो । हरेक को आठ मोड़ करके $\frac{3}{8}$ और $\frac{7}{8}$ में तुलना करो ।

5.8.2. इकाई भिन्न संख्याओं में तुलना

हम पहले जान चुके हैं कि जिस भिन्न संख्या का अंश 1 है, उस भिन्न संख्या को इकाई संख्या कहते हैं।

(क) $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{5}$ के बीच तुलना करेंगे ।

नीचे दो समान आयताकार वाले चित्र हैं। एक को 3 बराबर हिस्सों में और दूसरे को 5 बराबर हिस्सों में बाँटा गया है ।



चित्र से पता चलता है कि $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$

क्या हम चित्र की बिना सहायता लिए $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{5}$ में बड़ी और छोटी चुन पाएँगे?

आओ देखें -

एक सेब के तीन बराबर भाग किए गए ।

पहले सेब के बराबर और एक सेब के पाँच समान भाग किए गए ।

किस स्थिति में सेब के टुकड़े छोटे होंगे और किस स्थिति में सेब टुकडे बड़े होंगे?

जरूर, सेब के जितने अधिक टुकड़े होंगे, टुकड़े उतने छोटे-छोटे होंगे

उससे स्पष्ट है कि $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$

वैसे ही $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$

याद रखो -
दो इकाई भिन्न संख्याओं में जिसका हर बड़ा है, वही भिन्न संख्या दूसरी से छोटी है।

हमने देखा, $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$

इसलिए दो $\frac{1}{5}$ < दो, $\frac{1}{3}$, यानी $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$

फिर हमने जाना, दो भिन्न संख्याओं के अंश समान होने पर जिस भिन्न संख्या का हर बड़ा है वही भिन्न संख्या दूसरी में छोटी है ।

पूर्ववर्त्ती हल से हल जान पाएँगे कि समहर वाली दो भिन्न संख्याओं (समान भिन्न संख्याओं) में से जिस भिन्न संख्याओं का अंश दूसरी भिन्न संख्या के अंश से बड़ी है, वही भिन्न संख्या दूसरी भिन्न संख्या से बड़ी है ।

यानी दो समान भिन्न संख्याओं में से वृहतर अंश वाली भिन्न संख्या दूसरी भिन्न संख्या से वृहतर है ।

अभ्यास कार्य 5.6

1. निम्न भिन्न संख्याओं में तुलना करो ।

(क) $\frac{7}{10}, \frac{8}{10}$ (ख) $\frac{11}{26}, \frac{15}{26}$ (ग) $\frac{12}{105}, \frac{8}{105}$

2. आरोही क्रम में सजाकर लिखो ।

(क) $\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}$ (ख) $\frac{12}{17}, \frac{5}{17}, \frac{10}{17}$

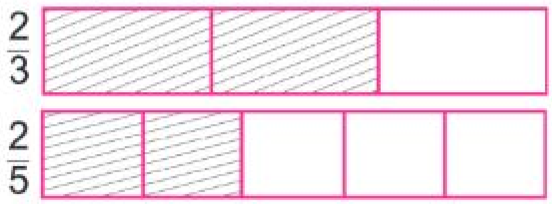
3. अवरोही क्रम में सजाकर लिखो ।

(क) $\frac{1}{5}, \frac{11}{5}, \frac{3}{5}$ (ख) $\frac{4}{13}, \frac{1}{13}, \frac{15}{13}$

5.8.3. असमान भिन्न संख्याओं में तुलना

हम पिछले अनुच्छेदों से जानते हैं कि जिन भिन्न संख्याओं के हर भिन्न हैं, उन भिन्न संख्याओं को असमान भिन्न कहा जाता है ।

(क) नीचे दो बराबर आयत चित्रों का अंकन किया जाकर, एक के $\frac{2}{3}$ और दूसरे के $\frac{2}{5}$ अंश को रेखांकित किया गया है ।



यहाँ भी चित्रों से स्पष्ट है कि $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

तुमेन जाना, समान अंश वाली दो भिन्न संख्याओं मे क्षुद्रतर हरवाली भिन्न संख्या, वृहत्तर हरवाली भिन्न संख्या से वृहत्तर है ।

(ख) भिन्न अंश और भिन्न हरवाली असमान भिन्न संख्याएँ

अब $\frac{2}{3}$ एवं $\frac{3}{4}$ में तुलना करेंगे । हम पहले समान भिन्न संख्याओं में तुलना कर जान चुके हैं। यानी सम हरवाली भिन्न संख्याओं में तुलना करना सीखा है । अगर $\frac{2}{3}$ एवं $\frac{3}{4}$ दो भिन्न संख्याओं को समहरवाली भिन्न संख्याओं में बदल पाएँगे, तो तुलना करना आसान होगा । दूसरी ओर दो भिन्न संख्याओं को सम अंश वाला कर पाने से, स्तिति-1 में वर्णित तुलना विधि अपना कर दोनों संख्याओं की भी तुलना कर पाएँगे ।

समहर वाला बनाकर तुलना करने की विधि

आओ, $\frac{2}{3}$ एवं $\frac{3}{4}$ भिन्न संख्याओं की तुलना करें । इसके लिए सम भिन्न संख्या निर्णय विधि अपना कर दोनों भिन्न संख्याओं को समहर वाली भिन्न संख्याओं में व्यक्त करेंगे।

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=\frac{12}{18}=\frac{14}{21}=\frac{16}{24}=\frac{18}{27}=\ldots\ldots\ldots$$

वैसे ही $$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\frac{18}{24}=\frac{21}{28}=\ldots\ldots\ldots$$

अब $\frac{2}{3}$ एवं $\frac{3}{4}$ की सम भिन्न संख्याओं को देखो । दोनों भिन्न संख्याओं के लिए 12 हरवाली दो भिन्न संख्याएँ हुई।

$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ और $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$

$\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ तो $\frac{3}{4} > \frac{9}{12}$ होगा।

क्या $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ सम भिन्न संख्याओं की सूची से और कोई समहरवाली भिन्न संख्या मिल रही है? तुम जरूर देख पाओगे कि $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$ और $\frac{3}{4}=\frac{18}{24}$

> **क्या तुम जानते हो ?**
> एक जोड़ी भिन्न संख्याओं के लिए अनेक जोड़ी समहरवाली भिन्न संख्याएँ पाएँगे और किसी की जोड़ी को लेकर हम तुलना कर पाएँगे ।

उदाहरण -3 : $\frac{4}{5}$ और $\frac{5}{6}$ में से कौन बड़ा है, निर्णय करो।

समाधान के लिए सूचना :

- $\frac{4}{5}$ की सम भिन्न संख्याओं का निर्णय करो।
- $\frac{5}{6}$ की सम भिन्न संख्याएँ निर्णय करो ।
- $\frac{4}{5}$ और $\frac{5}{6}$ का समहरवाली सम भिन्न संख्याओं को लो ।

हल :

$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{12}{15}=\frac{16}{20}=\frac{20}{25}=\frac{24}{30}=$..........

$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}=\frac{15}{18}=\frac{20}{24}=\frac{25}{30}=$..........

$\frac{4}{5}$ और $\frac{5}{6}$ का समहरवाली सम भिन्न संख्याएँ क्रमश: $\frac{24}{30}$ और $\frac{25}{30}$ है ।

परन्तु $\frac{25}{30} > \frac{24}{30}$ इसलिए $\frac{5}{6} > \frac{4}{6}$

- ऊपर वाले प्रश्न के हल को देखते हुए भिन्न प्रश्नों के उत्तर दो ।

(क) $\frac{4}{5}$ और $\frac{5}{6}$, दो भिन्न संख्याओं के लिए चुनी गई समहरवाली दो सम भिन्न संख्याओं का हर कितना है?

(ख) चुनी गई एक हरवाली भिन्न संख्याओं के हरों के साथ मूल दो भिन्न संख्याओं के दो हरों का क्या संबंध है?

यानी 30 से 5 और 6 का क्या संबंध है?

हमने सीखा, दी गयी दो भिन्न संख्याओं के लिए प्राप्त समहरवाली दो भिन्न संख्याओं के हर 30 है, दी गयी भिन्न संख्याओं के दो हरों का गुणाफल (यानी 5x6) से समान है । ध्यान दो - 30, 5 और 6 में लघुतम समापवर्तक होगा ।

इसलिए दो भिन्न संख्याओं की तुलना करने से पहले दो भिन्न संख्याओं को सम हरवाली बनाना पड़ेगा । एक हरवाली दो भिन्न संख्याओं को आम हर दो । भिन्न संख्याओं के हरों का गुणाफल के बराबर होगा, यानी दो हरों का सार्व गुणज होगा ।

उदाहरण - 4 : $\frac{5}{6}$ और $\frac{8}{15}$ में से वृहत्तर संख्या का निर्णय करो ।

हल :

हरेक भिन्न संख्या की सम भिन्न संख्याओं की सूची तैयार करेंगे ।

बताओ :
एक भिन्न संख्या की कितनी सम भिन्न संख्याएँ होती हैं।

$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}=\frac{15}{18}=\frac{20}{24}=\frac{25}{30}=\frac{30}{36}=$..........

$\frac{8}{15}=\frac{16}{30}=\frac{24}{45}=$............

दोनों सूचियों में सम हरवाली दो भिन्न संख्याएँ हैं -

$\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$ $\qquad$ $\frac{8}{15}=\frac{16}{30}$

चूँकि $25>16$ इसलिए $\frac{25}{30}>\frac{16}{30}$

$\therefore \frac{5}{6}>\frac{3}{15}$

क्या जानते हो ?
हम प्रदत्त दो भिन्न संख्याओं के हर के ल.स.के. समहरवाली भिन्न संख्याओं को पाने के लिए सार्व हर के रूप में चुनेंगे ।

विकल्प हल:

प्रदत्त दो भिन्न संख्याएँ हैं $\frac{5}{6}$ और $\frac{8}{15}$ दो हरों का ल.स. निर्णय करेंगे ।

6 = 2 x 3

15 = 3 x 5

दो हरों का ल.स. है = 2 x 3 x 5 = 30

$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5}$ [∴ 6 का 5 गुणा 30]

$= \frac{25}{30}$

$\frac{8}{15} = \frac{8 \times 2}{15 \times 2}$ [15 का 2 गुणा 30]

$= \frac{16}{30}$

परंन्तु 25 > 16 $\therefore \frac{5}{6} > \frac{8}{15}$

अभ्यास कार्य 5.7

1. निम्नलिखित दो भिन्न संख्याओं की तुलना करो ।

   (क) $\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{6}$ (ख) $\frac{1}{12}$ और $\frac{1}{15}$

2. निम्नलिखित दो भिन्न संख्याओं में कौन- सी बड़ी है?

   (क) $\frac{3}{8}$ और $\frac{5}{8}$ (ख) $\frac{7}{15}$ और $\frac{8}{15}$

3. नीचे वाली दो भिन्न संख्याओं के बीच खाली स्थानों में >, < और = चिह्नत में से सही चिह्न बिठाओ।

   (क) $\frac{5}{12}$ $\frac{5}{9}$ (ग) $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$

   (ख) $\frac{4}{9}$ $\frac{8}{18}$ (घ) $\frac{8}{11}$ $\frac{8}{13}$

4. (क) आरोही क्रम में सजाकर लिखो ।

   $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}$

   (ख) अवरोही क्रम में सजाकर लिखो ।

   $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}$

5. समहर वाली भिन्न संख्याओं में बदल कर दोनों भिन्न संख्याओं की तुलना करो ।

   (क) $\frac{3}{8}$ और $\frac{5}{12}$ (ख) $\frac{7}{15}$ और $\frac{4}{9}$

5.9. भिन्न संख्याओं का योग (जोड़)

पिछली कक्षा में हम समान और असमान भिन्न संख्याओं का जोड़ और घटाव के बारे में चर्चा कर चुके हैं । पिछले पाठ को याद करने के लिए आओ कई उदाहरण देखें ।

उदाहरण -1 : $\frac{5}{7}$ और $\frac{3}{7}$ का योगफल निर्णय करेंगे ।

जोड़ में व्यवहृत विधि

$$\text{योगफल} = \frac{\text{अंशों का योगफल}}{\text{सार्व हर}}$$

हल : $\frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5+3}{7}=\frac{8}{7}$

वैसे ही $\frac{7}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7+3}{12}=\frac{10}{12}$ या $\frac{5}{6}$ ।

उदाहरण - 2 : $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ का योगफल निर्णय करेंगे ।

हल : (पहली विधि)

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{3\times2}+\frac{1\times3}{2\times3}$$

$$=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$$

जोड़ में व्यवहृत विधि

पहले दी गई असमान भिन्न संख्याओं को समहरवाली भिन्न संख्याओं में बदला जाता है । फिर पूर्व विधि में वर्णित सूत्र को लेकर योगफल का निर्णय किया जाता है।

(विकल्प विधि)

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\times2+1\times3}{6}$$

$$=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$$

जोड़ में व्यवहृत विधि

$$\text{योगफल} = \frac{\text{पहला अंश x दूसरा हर + दूसरा अंश x पहला हर}}{\text{पहला हर x दूसरा हर}}$$

दो भिन्न संख्याओं को जोड़ने के कई उदाहरण देखें। दो से ज्यादा भिन्न संख्याएँ भी जोड़ने की आवश्यकता पड़ सकती है । वैसे एक उदाहरण नीचे देखो ।

उदाहरण -3 : $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ और $\frac{5}{6}$ का योगफल निर्णय करो ।

हल की सूचना : यहाँ भिन्न संख्याओं को समहरवाली भिन्न संख्याओं में बदलना जरूरी है । समहर वाली भिन्न संख्याओं का सर्वहर कितना होगा, बताओं?

अपने लिए हुए जोड़ कार्य से तुम जानते हो -

सार्व हर = प्रदत्त भिन्न संख्याओं के हरों का गुणाफल

$= 3\times4\times6=72$

यानी सार्व हर = प्रदत्त भिन्न संख्याओं का ल.स.

= 3,4 और 6 का ल.स.

= 12

हल :

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}+\frac{5\times2}{6\times2}$$

$$=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}+\frac{10}{12}$$

$$=\frac{8+3+10}{12}$$

$$=\frac{21}{12}=1\frac{9}{12}=1\frac{3}{4}$$

[$\frac{9}{12}$ का छोटा आकार $=\frac{3}{4}$]

योगफल निर्णय करो ।

1. (क) $\frac{5}{2}+\frac{3}{7}$ (ख) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$ (ग) $\frac{6}{7}+\frac{5}{7}$

(घ) $\frac{1}{4}+\frac{5}{7}$ (ङ) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ (च) $\frac{7}{8}+\frac{5}{9}$

5.10. भिन्न संख्याओं में घटाव (वियोग)

समान और असमान भिन्न संख्याओं के क्षेत्रों में जोड़ की तरह घटाव प्रक्रिया किस तरह संपादित की जाती है, उसे हमने पिछली कक्षा में सीखा है । आओ, याद करने के लिए कई प्रश्नों का हल करेंगे ।

उदाहरण - 1 : $\frac{3}{4}$ से $\frac{1}{2}$ घटाव करेंगे।

हल : $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1\times2}{2\times2}$

$=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}$

$=\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}$

घटाव (वियोग) करने की विधि

पहले दो भिन्न संख्याओं को समहरवाली भिन्न संख्याओ में बदल कर घटाव निर्णय किया जाता है।

उदाहरण-2 : $\frac{1}{5}$ में कितना जोड़ने से योगफल $\frac{1}{2}$ होगा?

हल :

निर्णय संख्या $=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$

$=\frac{1\times(10\div2)-1\times(10\div5)}{2\times5}$

$=\frac{1\times5-1\times2}{2\times5}$

$=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$

घटाय (वियोग) करने की विधि

इस प्रशन के हल के लिए पहले दी गयी भिन्न संख्याओं को समहर वाली भिन्न संख्याओं में बदलना होगा है ।

घटाव की गयी दो भिन्न संख्याओं को समहर वाली भिन्न संख्याओं में बदल कर उपरोक्त हल किया गया है । ध्यान दो कि दो भिन्न संख्याओं के हरों का ल.स. निर्णय करके हरेक भिन्न संख्याओं के हर को निर्णय किये गए ल.स. वाली समहरवाली भिन्न संख्या में बदल कर घटाव कार्य किया जाता है ।

घटाव करो -

(क) $\frac{5}{6}$ से $\frac{3}{4}$ (ख) $\frac{5}{7}$ से $\frac{1}{3}$

(ग) $\frac{8}{15}-\frac{2}{5}$ (घ) $\frac{5}{12}-\frac{1}{7}$

5.11. मिश्रित भिन्न संख्याओं का जोड़ या घटाव

मिश्रित संख्या को अभाज्य भिन्न संख्या में बदल कर उसके बाद जोड़ या घटाव करेंगे ।

उदाहरण-1

$\frac{3}{4}$ और $1\frac{2}{3}$ का योगफल निर्णय करो ।

हल :

$1\frac{2}{3}$ मिश्रित संख्या को अभाज्य भग्नांश (भिन्न) में बदलेंगे ।

$$1\frac{2}{3} = \frac{1 \times 3 + 2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{योगफल} = \frac{3}{4} + 1\frac{2}{3} = \frac{3}{4} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{3 \times 3 + 5 \times 4}{12}$$

$$= \frac{9 + 20}{12} = \frac{29}{12} = 2\frac{5}{12}$$

उदाहरण-2

$2\frac{2}{5}$ और $1\frac{3}{4}$ का योगफल निर्णय करेंगे ।

हल :

पहली विधि

$2\frac{2}{5} = \frac{12}{5}$ और $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

$$\text{योगफल} = 2\frac{2}{5} + 1\frac{3}{4}$$

$$= \frac{12}{5} + \frac{7}{4}$$

$$= \frac{12 \times 4 + 7 \times 5}{20}$$

$$= \frac{48 + 35}{20}$$

$$= \frac{83}{20} = 4\frac{3}{20}$$

विकल्प विधि

$$2\frac{2}{5} + 1\frac{3}{4}$$

$$= 2 + \frac{2}{5} + 1 + \frac{3}{4}$$

$$= (2 + 1) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}$$

$$= 3 + \frac{2 \times 4 + 3 \times 5}{20}$$

$$= 3 + \frac{8 + 15}{20} = 3 + \frac{23}{20} = 3 + 1\frac{3}{20}$$

$$= 3 + 1 + \frac{3}{20} = 4 + \frac{3}{20} = 4\frac{3}{20}$$

दोनों विधियों के योगफल समान हो रहा है । पहली विधि से विकल्प विधि कैसे अलग है, लिखो ।

$2\frac{1}{3}$ और $2\frac{2}{3}$ का योगफल दोनों विधियों में निर्णय करो ।

उदाहरण-3 :

$1\frac{1}{3}$ से $1\frac{1}{4}$ घटाव करके वियोगफल निर्णय करो ।

हल :

पहली विधि

$1\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}$

$=\frac{4}{3}-\frac{5}{4}$ (अभाज्य भिन्न संख्या में बदला गया)

$=\frac{4 \times 4 - 5 \times 3}{3 \times 4}$

$=\frac{16-15}{12}$

$=\frac{1}{12}$

विकल्प विधि

$1\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}$

$=(1+\frac{1}{3})-(1+\frac{1}{4})$

$=1+\frac{1}{3}-1-\frac{1}{4}$

$=(1-1)+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$

$=0+\frac{1 \times 4 - 1 \times 3}{12}=0+\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$

उदाहरण-4

1 से $\frac{3}{4}$ घटाव करो ।

हल :

$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{1}-\frac{3}{4}$ [1 के $\frac{1}{1}$ के रूप में लिखेंगे ।]

$=\frac{1 \times 4 - 3 \times 1}{4}$

$=\frac{4-3}{4}$

$=\frac{1}{4}$

क्या जानते हो ?

भिन्न संख्याओं के जोड़ या घटाव की स्थिति में जोड़ या घटाव के लिए निश्चित संख्याओं में एक गणन संख्या के होने पर उसे निम्न रूप से व्यक्त किया जाएगा ।

$1=\frac{1}{1}$, $2=\frac{2}{1}$, $3=\frac{3}{1}$, $8=\frac{8}{1}$ आदि।

अपनी कॉपी में नीचे दी गई जोड़ - घटाव की कोठरियाँ बनाकर खाली घर भरो ।

(क) (+ →, − ↓)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

(ख) (+ →, − ↓)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

अभ्यास कार्य 5.8

योगफल निर्णय करो ।

1. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$ 2. $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$ 3. $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{5}{9}$

4. $1\frac{2}{5}+2\frac{1}{5}$ 5. $2\frac{1}{7}+3\frac{2}{7}$ 6. $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$

7. $\frac{3}{8}+\frac{5}{16}$ 8. $\frac{5}{8}+\frac{5}{12}$ 9. $\frac{4}{9}+\frac{5}{12}$

10. $1\frac{3}{8}+2\frac{5}{12}$ 11. $1\frac{2}{5}+2\frac{3}{10}+3\frac{1}{2}$ 12. $1\frac{1}{10}+2\frac{1}{15}+3\frac{1}{6}$

वियोगफल निर्णय करो

13. $\frac{3}{8}-\frac{1}{8}$ 14. $\frac{7}{12}-\frac{5}{12}$ 15. $\frac{2}{3}-\frac{5}{12}$

16. $\frac{7}{18}-\frac{2}{9}$ 17. $\frac{5}{12}-\frac{1}{6}$ 18. $1\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$

19. $2\frac{3}{8}-1\frac{1}{4}$ 20. $3\frac{5}{12}-2\frac{3}{8}$ 21. $3\frac{7}{10}-2\frac{8}{15}$

22. $2-1\frac{3}{5}$ 23. $3-2\frac{7}{8}$ 24. $2-1\frac{5}{12}$

25. दूकान से सरिता ने $\frac{2}{5}$ मीटर लंबाई का और अलिता ने $\frac{3}{4}$ मीटर लंबाई का रिबन खरीदा । दोनों ने कुल मिलाकर कितनी लंबाई का रिबन खरीदा ?

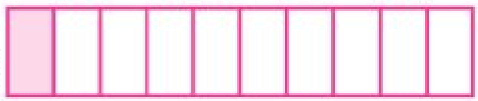
26. विद्यालय अहाते के चारों ओर एक बार घूम आने के लिए नीलू $2\frac{1}{5}$ मिनट का समय लेता है । उतना रास्ता घूमने के लिए जीतू $\frac{7}{4}$ मिनिट का समय लेता है । दोनों में से कौन कम समय लेता है और कितना कम समय लेता है ?

छठवां अध्याय

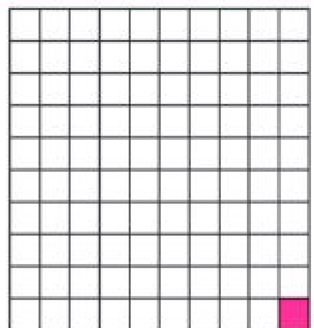
दशमलव संख्या

6.1 हमने जो सीखा है

10 बराबर हिस्सों में से एक हिस्सा $= \frac{1}{10} = 0.1$

$\frac{1}{10}$ 

100 बराबर हिस्सों में से 1 हिस्सा $= \frac{1}{100} = 0.01$

 $\frac{1}{100}$

यहाँ $\frac{1}{10}$ को एक दशांश और $\frac{1}{100}$ को एक शतांश कहते हैं ।

उसी तरह $\frac{2}{10}, \frac{3}{100}$ को प्रमश: 2 दशांश और 3 शतांश कहेंगे ।

भिन्न संख्या को दशमलव संख्या में बदलने से पाएँगे-

$$\frac{2}{10} = 0.2 \text{ और } \frac{3}{100} = 0.03$$

यह स्पष्ट है कि $\frac{2}{10}$ एक भिन्न संख्या है और 0.2 इसी भिन्न संख्या का दशमलव रूप है ।

निम्न सारणी के खाली स्थान भरो

भिन्न संख्या	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{27}{10}$	$1\frac{1}{10}$	$2\frac{1}{100}$	$15\frac{3}{10}$
दशमलव भिन्न संख्या						

पिछली कक्षा में एक दशांश, एक शतांश के बारे में चर्चा हो चुकी है फिर भी उसकी पुन: चर्चा यहाँ जरूरी है । निम्न उदाहरण को देखो ।

रवि और शरत की पेंसिलों की लंबाई क्रमशः 7 से.मी. 2 मि.मी. और 8 से.मी. 3 मि.मी. है । क्या इस लंबाई को से.मी. में व्यक्त कर पाओगे ? इसके हल के लिए आवश्यक चरणों का उत्तर दो ।

1 से.मी. = ________ मि.मी

1 मि.मी. = ________ से.मी.

रवि की पेंसिल की लंबाई =7 से.मी. 2 मि.मी. = ______ से.मी.

शरत की पेंसिल की लंबाई = 8 से.मी. 3 मि.मी. =_______ से.मी.

क्या जानते हो ?

1 मि.मी. = $\frac{1}{10}$ से.मी.

2 मि.मी. = $\frac{2}{10}$ से.मी.

रवि की पेंसिल की लंबाई=7 से.मी. 2 मि.मी.

$= 7\frac{2}{10}$ से.मी. =7.2 मि.मी.

वैसे ही शरत की पेंसिल की लंबाई = 8 से.मी. 3 मि.मि.

$= 8\frac{3}{10}$ से.मी. =8.3 मि.मी.

पिछली कक्षा में हमने दशमलव संख्या में हरेक अंक के स्थानीयमान के बारे मे चर्चा की है ।

2.35 एक दशमलव संख्या है । इस संख्या के इकाई स्थान में 2 है, दशांश स्थान में 3 है और शतांश स्थान में 5 है।

2.35 के एकक या इकाई स्थान में 2 है, इसलिए2 का मूल्य 2 एकक यानी 2 ।

दशांश स्थान में 3 है, इसलिए 3 का मूल्य 3 दशांश यानी $\frac{3}{10}$

शतांश स्थान में 5 है, इसलिए 5 का मूल्य 5 शतांश यानी $\frac{5}{100}$

क्या जानते हो ?
2.35 को 2 दशमलब 3, 5 के रूप में पढ़ा जाता है।

2.35 को प्रसारित रूप में लिखने पर-

$$2.35 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$$

स्थानीयमान सारणी का व्यवहार करते हुए दशमलव संख्या को लिखेंगे ।

2.35 को स्थानीयमान सारणी का व्यवहार करते हुए कैसे लिखा जाएगा ? ध्यान दो-

एक (इकाई)	दशांश	शतांश
2	3	5

तुम 24.57 को दोनों प्रसारित रूप में और स्थानीयमान सारणी का व्यवहार करते हुए लिखो ।

अभ्यास कार्य 6.1

1. निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव संख्या में लिखो ।

शतक 100	दशक 10	एकक 1	दशांश $\frac{1}{10}$
2	3	4	5
	1	5	7
1	0	0	3
		3	7

2. खाली स्थान भरो ।

(क) 23 से.मी. 5 मि.मी =________ से.मी. (ख) 55 से.मी. =________ से.मी. ।

2. निम्न सारणी के खाली स्थान भरो ।

संख्या का प्रसारित रूप	आम भिन्न संख्या	दशमलव भिन्न संख्या
2 एक 3 दशांश	$2\frac{3}{10}$	2.3
3 दश 5 एक 7 दशांश		
7 एक 5 दशांश		
	$8\frac{3}{10}$	
		2.3
	$15\frac{2}{7}$	
		2.3

याद रखो : एक दशमलव भिन्न संख्या को दशमलव भिन्न संख्या भी कहते हैं।

उदाहरण - 1 : निम्न संख्याओं को स्थानीयमान के अनुसार प्रसारित तरीके में लिखो ।

(क) 20.5 (ख) 31.57

हल :

संख्या	दश (10)	एक (1)	दशांश	शतांश
20.5	2	0	5	
31.57	3	1	5	7

उदाहरण - 2

नीचे प्रसारित तरीके में लिखी गई संख्याओं को दशमलव संख्या में व्यक्त करो ।

(क) तीन एक और पाँच दशांश

(ख) दो दस चार एक छह शतांश

हल :

(ग) तीन एक एवं पाँच दशांश

$= 3+\frac{5}{10}=3.5$

(घ) दो दस चार एक छह दशांश

$= 20+4+\frac{6}{10}=24.6$

बताओ तो :
दो दश छह दशांश को दशमलव में लिखने से कौन-सी संख्या होगी ?

6.2. भिन्न संख्या को दशमलव संख्या में परिवर्तन

हमने सीखा कि कैसे 10, 100 या 1000 हर वाली भिन्न संख्याओं को दशमलव संख्याओं में बदलना होता है ।

आओ, यदि एक भिन्न संख्या का हर 10 के अलावा दूसरी संख्या जैसे 2, 5, हो, तो उस भिन्न संख्या को कैसे दशमलव संख्या में बदलना होता है, एक उदाहरण के जरिए समझेंगे ।

(क) $\frac{11}{5}=\frac{22}{10}$ (10 हरवाली सम भिन्न संख्या में बदल दिया गया)

$=2\frac{2}{10}$ (मिश्रित संख्या में परिवर्तित किया गया)

$=2+\frac{2}{10}=2.2$

> **क्या जानते हो ?**
> दशमलव संख्या भिन्न संख्या का एक दूसरा रूप है । जिस भिन्न संख्या का हर 10 या 100 या 1000 संख्या हो, उसे दशमलव संख्या में बदला जा पाएगा ।

(ख) $\frac{105}{2}=\frac{105\times5}{2\times5}=\frac{525}{10}$ (10 हरवाली सम भिन्न संख्या में परिवर्तित किया गया)

$=52\frac{5}{10}=52+\frac{5}{10}$

$=50+2+\frac{5}{10}=52.5$

निम्न भिन्न संख्याओं को दशमलव संख्याओं में व्यक्त करो ।

$\frac{3}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{17}{5}$

6.2.1. दशमलव भिन्न संख्या में व्यक्त संख्या को आम भिन्न संख्या में परिवर्तन

10, 2 और 5 हरवाली भिन्न संख्या को कैसे दशमलव संख्या में बदला जा पाएगा, उसे हमने सीखा । अब दशमलव संख्या को कैसे आम भिन्न संख्या मं बदला जा एपागा उस पर चर्चा करेंगे ।

निम्न उदाहरणों को देखो ।

(क) $1.2=1+\frac{2}{10}=1\frac{2}{10}=\frac{12}{10}$

(ख) 13.57

> $\frac{2}{3}$ जैसी भिन्न संख्या को आम भिन्न संख्या, $\frac{3}{100}$ जैसी संख्या को दशमलव भिन्न संख्या कहते हैं।

13.57 को स्थानीयमान सारणी में लिखेंगे ।

दश (10)	एक (1)	दशांश	शतांश
1	3	5	7

यहाँ दशक स्थान में 1 है, इसलिए 1 का स्थानीयमान एक दश या 10 है ।

एकक (इकाई) के स्थान में 3 है, इसलिए 3 का स्थानीयमान तीन एक या 3 है ।

दशांश के स्थान में 5 है, इसलिए 5 का स्थानीयमान 5 दशांश यानी $\frac{5}{10}$ है ।

शतांश के स्थान में 7 है, इसलिए 7 का स्थानीयमान 7 शतांश यानी $\frac{7}{100}$ है ।

इसे ऐसे लिखा जा सकेगा -

$$13.57 = 10 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$$
$$= 13 + \frac{57}{100} = 13\frac{57}{100} = \frac{1357}{100}$$

अभ्यास कार्य 6.2

1. निम्न भिन्न संख्याओं को दशमलव संख्याओं में व्यक्त करो ।

(क) $\frac{7}{10}$ (ख) $\frac{7}{100}$ (ग) $\frac{11}{100}$ (घ) $\frac{135}{100}$

(ङ) $\frac{27}{5}$ (च) $\frac{16}{5}$ (छ) $\frac{35}{2}$

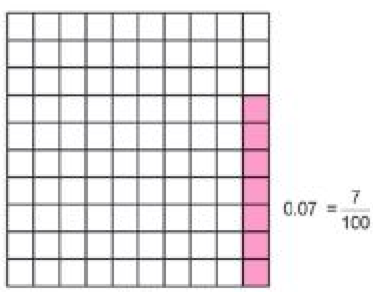
2. निम्न दशमलव संख्याओं को आम भिन्न संख्याओं में व्यक्त करो ।

(क) 12.3 (ख) 17.53 (ग) 8.23 (घ) 31.7

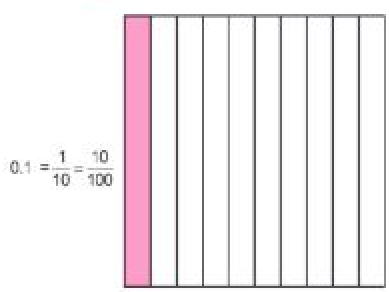
6.3. दशमलव संख्याओं में तुलना

क्या अब तुम बता पाओगे कि, 0.07 और 0.1 में से कौन सी बड़ी दशमलव संख्या है ?

निम्न प्रश्नों के उत्तर दो ।



- 0.07 को आम भिन्न संख्या में व्यक्त करो ।
- 0.1 को आम भिन्न संख्या में बदलो ।
- दोनों स्थितियों में भिन्न संख्याओं के हरों को समहरों में बदलने से क्या होगा ?
- समहरवाली दोनों भिन्न संख्याओं को लिखो ।
- दोनों में तुलना करने से कौन-सी भिन्न संख्या वृहत्तर होगी ?



अब प्रदत्त प्रश्नों के उत्तरों को एक साथ लिखकर हल करेंगे।

$$0.07 = \frac{7}{100} \quad \text{और} \quad 0.1 = \frac{1}{10}$$

0.07 एवं 0.1 की आम भिन्न संख्याओं को समहरवाली भिन्न संख्याओं में बदलने से क्रमश: $\frac{7}{100}$ एवं $\frac{10}{100}$ होगी ।

अब हमने देखा $\frac{10}{100} > \frac{7}{100}$

यानी 0.1 > 0.07 होगा ।

क्य जानते हो ?

0.1 > 0.07 को 0.07 < 0.1 के रूप में लिखा जाता है । उसी तरह 0.1 > 0.01 > 0.001 को 0.001 < 0.01 < 0.1 के रूप में लिखा जाता है ।

अभ्यास कार्य 6.3

1. हरेक स्थिति में दोनों दशमलव संख्याओं को चित्रों में दिखाओ और बड़ी संख्या को दर्शाओ ।

   (क) 0.47 और 0.3 (ख) 0.5 और 0.05 (ग) 1.5 और 0.68

2. हरेक स्थिति में दशमलव संख्याओं में से कौन-सी बड़ी है ?

   (क) 0.93 और 0.093 (ख) 1.1 और 1.01

   (ग) 0.83 और 0.083 (घ) 1.5 और 1.50

   (ङ) 0.099 और 0.19

3. अपने मन में किन्हीं दो दशमलव संख्याएँ लो और उन दोनों में बड़ी संख्या को चुनो । बड़ी संख्या को कैसे चुना, लिखो ।

6.4. दशमलव संख्या का प्रयोग

6.4.1. रुपए-पैसे के हिसाब में दशमलव संख्या-

हम जानते हैं कि 100 पैसों से एक रुपया होता है ।

अत: 1 पैसा $\frac{1}{100}$ रुपए = 0.01 रुपए

वैसे ही 65 पैसा $\frac{65}{100}$ रुपए = 0.65 रुपए

और 5 पैसा $\frac{5}{100}$ रुपए = 0.05 रुपए

क्या अब बता पाओगे कि 207 पैसे = कितने रुपए ?

207 पैसे = 2 रुपए 7 पैसे = 2.07 रुपए ।

क्या जानते हो ?

एक पैसे को रुपए में व्यक्त करने से 0.01 रुपया होगा परंतु 10 पैसे को रुपए में 0.10 रुपये लिखा जाता है । इसलिए 0.10 या 0.1 > 0.01

उत्तर लिखो - रुपए में बदलो

(क) 2 रुपए 5 पैसे (ख) 2 रुपए 50 पैसे

(ग) 20 रुपए 17 पैसे (घ) 21 रुपए 75 पैसे

6.4.2. लंबाई माप में दशमलव संख्या :

हम जानते हैं, 100 से.मी = 1 मीटर

1 से.मी. = $\frac{1}{100}$ मीटर 0.01 मीटर

इसलिए 56 से.मी. = $\frac{56}{100}$ मीटर =0.56 मीटर

क्या अब बता पाओगे कि 156 से.मी. = कितना मीटर है ?

156 से.मी. = 100 से.मी. + 56 से.मी.

= 1 मी. + $\frac{56}{100}$ मी.

= 1.56 से.मी.

दशमलव संख्या में बदलो

(क) 4 मि.मी. को से.मी में बदलो ।

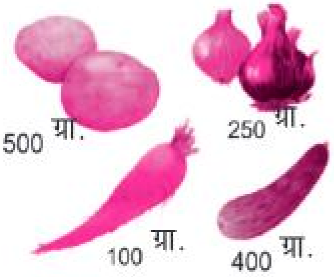
(ख) 7 से.मी. 5 मि.मी को से.मी. में बदलो ।

(ग) 52 मीटर को कि.मी. में बदलो ।

(घ) 152 मीटर को कि.मी. में बदलो ।

6.4.3. वजन-माप में दशमलव संख्या-

सुब्रत बाजार से 500 ग्राम आलू, 250 ग्रा. प्याज, 400 ग्रा. कक्कड़ी और 100 ग्रा. गाजर लाया । वह कुल मिलाकर कितने वजन की सब्जी लाया ?



आओ, कुल वजन जानने के लिए उसके द्वारा लायी गई सब्जी को जोड़ेंगे -

500 ग्रा. + 250 ग्रा. + 400 ग्रा.+ 100 ग्रा. =1 250 ग्रा.

हम जानते हैं, 1 कि.ग्रा. =1000 ग्राम

यानी 1000 ग्रा. =1 कि.ग्रा.

इसलिए 1250 ग्रा. =1000 ग्रा. + 250 ग्रा.

= 1 कि.ग्रा. + $\frac{250}{1000}$ कि.ग्रा.

=1 कि.ग्रा. + 250 ग्रा. = 1. 250 कि.ग्रा.

यानी वह कुल 1.250 कि.ग्रा. वजन की सब्जी लाया ।

हम जानते हैं, 1000 ग्राम =1 कि.ग्रा.

1 ग्रा.= $\frac{1}{1000}$ कि.ग्रा. = 0.001 कि.ग्रा.

18 ग्राम $= \frac{18}{1000}$ कि.ग्रा. = 0.018 कि.ग्रा.

2350 ग्राम् $= \frac{2350}{1000}$ कि.ग्रा. $= \left(2 + \frac{350}{1000}\right)$ कि.ग्रा.

= 2 कि.ग्रा. + 0.350 कि.ग्रा. = 2.350 कि.ग्रा.

क्या अब बता पाओगे कि 2 कि.ग्रा. 9 ग्रा. कितने कि.ग्रा. के बराबर है ?

2 कि.ग्रा. 9 ग्रा. = 2 कि.ग्रा. $+ \frac{9}{1000}$ कि.ग्रा.

$= \left(2 + \frac{9}{1000}\right)$ कि.ग्रा.

= 2.009 कि.ग्रा.

दशमलव संख्या में बदलो

(क) 456 ग्राम को कि.ग्रा. में बदलो ।

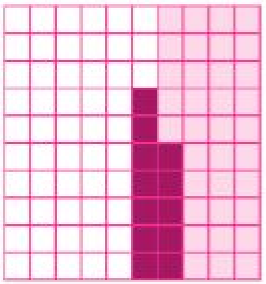
(ख) 2015 ग्राम को कि.ग्रा. में बदलो ।

(ग) 3 कि.ग्रा. 25 ग्रा. को कि.ग्रा. में बदलो ।

6.5 दशमलव संख्या का जोड़ (योग)

दशमलव संख्या के जोड़ से संबंधित कई उदाहरण देखेंगे ।

उदाहरण - 1 0.35 और 0.12 का योगफल निर्णय करेंगे ।



हल : आओ, 100 कोठरियों वाला एक चित्र बनाएँगे ।

- इस चित्र में दशमलव 0.35 को एक रंग में सूचित करेंगे ।
- 0.35 का मतलब $\frac{35}{100}$ यानी 100 भागों से 35 भाग
- अब ऐसे ही 0.12 को दूसरे रंग के सूचित करेंगे ।
- चित्र देखकर बताओ, कुल कितनी कोठरियों में रंग भरा गया है ।
- ध्यान दो, 100 कोठरियों में से 47 कोठरियों में रंग भरा गया है । यानी आम भिन्न संख्या में इसे $\frac{47}{100}$ लिखा जाएगा और दशमलव संख्या में 0.47 लिखा जाएगा ।

निम्न सारणी को देखो, यहाँ दोनों दशमलव संख्याओं को स्थानीयमान के अनुसार नीचे की ओर लिखा गया है ।

संख्या	एक	दशांश	शतांश
0.35 →	0	3	5
0.12 →	0	1	2
योगफल →	0	4	7

0.35 में 3 का स्थानीयमान 3 दशांश है और 5 का स्थानीयमान 5 शतांश है ।

वैसे ही 0.12 में 1 का स्थानीयमान 1 दशांश है और 2 का स्थानीयमान 2 शतांश है ।

$\therefore$ 0.35 + 0.12 = 0.47

उदाहरण - 2 क्या अब 0.63 और 1.581 का योगफल निर्णयकर पाओगे ?

हल :

संख्या	एक	दशांश	शतांश	सहस्रांश
0.63 ⟶	0	6	3	0
1.581 ⟶	1	5	8	1
योगफल ⟶	2	2	1	1

क्या जानते हो ?
0.63 को भी 0.630 लिखा जाता है । दोनों का मूल्य समान है । इसका कारण क्या है ?

$\therefore$ निर्णय योगफल 0.63 + 1.581 = 2.211

हमने क्या सीखा ?

जिन दशमलव संख्याओं को योग करने के लिए कहा जाता है, पहले उन्हें स्थानीयमान के अनुसार नीचे की ओर लिखा जाता है । उसके बाद प्राकृत संख्याओं की भाँति योग करना पड़ता है ।

उदाहरण - 3

मिहिर ने एक पेंसिल और एक कलम को क्रमश: 2.50 रुपए और 9.50 रुपए में खरीदा । कुल मिलाकर उसने कितने रुपए खर्च किए थे ?

हल : कलम का दाम = रु. 9.50
पेंसिल का दाम = रू. 2.50
कुल रुपए = रु 9.50 + रु 2.50
= 12.00 रुपऐ।

उदाहरण - 4

साम्सन 5 कि.मि. 52 मीटर बस से और 2 कि.मी. 265 मीटर कार से जाकर एक स्थान पर पहुँचा । उसने कुल कितने किलोमीटर का रास्ता तय किया ?

हल : बस से गया हुआ रास्ता = 5 कि.मी. 52 मी.
= 5.052 कि.मी.

कार से गया हुआ रास्ता = 2 कि.मी. 265 मी.
= 2.265 कि.मी.

कुल गया हुआ रास्ता = (5.052 + 2.265) कि.मी.
= 7.317 कि.मी.

अभ्यास कार्य 6.4

1. प्रत्येक का योगफल निर्णय करो।

   (क) 8.5 + 0.03

   (ख) 15 + 12.5 + 0.523

   (ग) 0.75 + 10.531 + 3.7

2. ममता के जन्मदिन पर उसके पिता जी ने उसे 15.50 रूपये और उसकी माँ ने उसे 23.75 रूपये दिये। इस तरह दोनों ने कुल मिलाकर ममता को कितने रूपये दिये ?

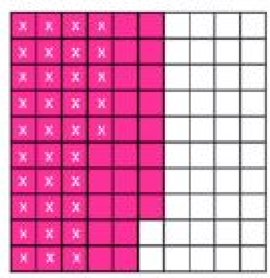
3. अकमल हर दिन सुबह 2 किमी. 35 मी और शाम को 1 किमी. 7 मी का रास्ता पैदला चलते हुए तय करते हैं। अतएब हर दिन वे कितना रास्ता पैदल तय करते हैं ?

4. संजय ने सरकोरी ग्राहक दुकान से 5 कि.ग्रा. 400 ग्रा. चावल, 2 कि.ग्रा. 50 ग्रा. चीनी और 10 कि.ग्रा. 750 ग्रा. गेहूँ खरीदे । उसने कुल कितने वजन का सामान खरीदा ?

6.6. दशमलव संख्याओं का घटाव (वियोग)

0.58 से 0.35 को वियोग करने हुए वियोगफल निर्णय करो ।

- आओ पहले 0.58 को चित्र में दर्शाएँगे । 0.58 को आम भिन्न संख्या में बदलने पर $\frac{58}{100}$ होगा । इसका मतलब है 100 हिस्सों से 58 हिस्सा । निम्न चित्र में इसे रंग देकर सूचित किया गया है ।
- अब उससे 0.35 को वियोग करेंगे । 0.35 यानी $\frac{35}{100}$ जिसका मतलब है 100 हिस्सों से 35 हिस्सा ।
- पहले रंग हुए 58 घरों से 35 घरोह को (x) चिह्न दिया गया है । बचे हुए रंगवाले घरों की संख्या कितनी है ?
- बचे हुए रंगीन घरों को आम भिन्न संख्या में व्यक्त करने से $\frac{23}{100}$ होगा, इसे दशमलव संख्या में 0.23 लिखा जाता है ।



आओ, दोनों संख्याओं को नीचे की और नीचे स्थानीय मान सारणी में लिखेंगे । निम्न स्थानीयमान सारणी को देखो ।

संख्या	एक	दशांश	शतांश
0.58 →	0	5	8
0.35 →	0	3	5
वियोगफल →	0	2	3

∴ 0.58 - 0.35 = 0.23 ।

उदाहरण - 2: 3.5 से 1.74 वियोग करो ।

संख्या		एक	दशांश	शतांश
3.5	→	3	5	0
1.74	→	1	7	4
वियोगफल	→	1	7	6

3.5 - 1.74 = 1.76

उदाहरण - 3

राम के पास 7.75 रुपए, थे । उसमें से 5.25 रुपए का चॉकलेट खरीदा । उसके बाद कितने रुपए बचे ?

हल : राम के पास रुपए थे = 7.75 रुपए

चॉकलेट खरीदने के लिए खर्च किया = 5.25 रुपए

बचे हुए रुपए का परिमाण = 7.75 रुपए − 5.25 रुपए

= 2.50 रुपए

उदाहरण - 4

निहार ने 5 कि.ग्रा. 200 ग्राम् वजन का एक तरबूज खरीद कर उसमें से 2 कि.ग्रा. 750 ग्राम तरबूज पड़ोसी को दिया था । निहार के पास कितने वजन का तरबूज बचा ?

खरीदे गए तरबूज का वजन = 5.200 कि.ग्रा.

पड़ोसी को दिए गए तरबूज टुकड़े का वजन = 2.750 कि.ग्रा.

बचे तरबूज के टुकड़े का वजन = 5.200 कि.ग्रा. – 2.750 कि.ग्रा.

= 2.450 कि.ग्रा.

∴ निहार के पास बचे हुए तरबूज के टुकड़े का वजन 2.450 कि.ग्रा. ।

अभ्यास कार्य 6.5

1. घटाव करो।

(क) 18.50 रूपये से 5.75 रूपये।

(ख) 105.58 मि. से 97.65 मि. ।

(ग) 6.725 कि.ग्रा. को 9.950 कि.ग्रा. से।

2. कविता रु. 33.65 दाम की एक किताब खरीद कर दुकानदार को 50 रुपए दिए । दुकानदार कविता को कितना रुपया लौटाएगा ?

3. टीना के पास 10 मी. 5 से.मी. एक कपड़ा था । उसमें से 4 मी. 50 से.मी. कपड़े की एक बेड़सिट बनाई । उसके पास कितने परिमाण का कपड़ा बचा ?

4. एक दिन में ओड़िशा के छह शहरों के तापमान को निम्न सारणी में दिया गया है ।

शहर	तापमान
भुवनेश्वर	39.8°C
संबलपुर	45.6°C
मालकानगिरि	48.1°C
टिटिलागड़	48.4°C
केंदुझर	35.6°C
पुरी	34.4°C

- किस शहर का तापमान सर्वाधिक है और किस शहर का सर्वानिम्न ?
- भुवनेश्वर का तापमान पुरी के तापमान से कितना ज्यादा है ?
- मालकानागिरि का तापमान केंदुझर के तापमान से कितना ज्यादा है ?
- टिटिलागड़ का तापमान मालकानगिरि के तापमान से कितना ज्यादा है ?

तुम ऐसे ही कई सवाल बनाओ और अपने मित्र को उनके उत्तर देने के लिए बोलो ।

सातवां अध्याय

व्यावसायिक गणित

7.1 अनुपात

7.1.1. हमने जो सीखा है :

घर में माँ कैसे चाय बनाती है, तुम सब जानते हो । पानी, दूध, चीनी और चाय डालकर चाय बनाई जाती है । किसी दिन चाय ज्यादा अच्छी होती है तो औरं किसी दिन अच्छी नहीं लगती । क्योंकि जितनी मात्रा (परिमाण) की जो चीज डाली जानी चाहिए, वह नहीं होती। उसी प्रकार भोज में क्षीर बनाने के लिए चावल, अमूल आदि सही परिमाण में डाले जाने से क्षीर स्वादिष्ट लगती है, इसलिए कौन-सी चीज कितने परिमाण में मिलाई जानी चाहिए, वह जानना जरूरी है, इसी तरह दैनंदिन जीवन चर्चा में कई घटनाएँ घटती हैं, जिनमें हमें विविध वस्तुओं की तुलना करना जरूरी होता है । तुम ऐसे कई उदाहरण दो ।

7.1.2. दो मापों में तुलना

खुद करके देखो

- अपनी कक्षा के छात्रों औरं छात्राओं में तुलना करो ।
- कक्षा-कमरे की लंबाई और चौड़ाई में तुलना करो ।
- श्यामपट्ट की लंबाई और चौड़ाई में तुलना करो ।
- दो बच्चों के वजन में तुलना करो ।

✦ अनेक बार दो परिमाणों के बीच तुलना करनी पड़ती है ।

तुलना करने की पहली विधि

दो परिमाणों में फर्क निर्णय करते हुए एक से दूसरा कितना ज्यादा या कितना कम है, पता चलता है । दो परिमाणों के बीच ज्यादा-कम संपर्क के जरिए उक्त दो परिमाणों की तुलना की जाती है ।

21 मि. – 7 मि. = 14 मि.

21 मि.लंबाई कपड़ा 7 मि. बाले कपड़े से 14 मी. ज्यादा है- ऐसा कहा जाता है ।

यह हुई घटाव क्रिया के जरिए तुलना ।

तुलना करने की दूसरी विधि

दो परिमाणों में से ज्यादा वाले परिमाण को कमवाले परिमाण से भाग करके पहला दूसरे का कितना गुना (या दूसरा पहले का कितना अंश) पता चलता है । कितना गुना या कितना अंश संपर्क द्वारा दो परिमाणों की तुलना की जाती है ।

21 मि. ÷ 7 मि. = 3

21 मि.लंबा कपड़ा 7 मि. लंबे कपड़े का 3 गुना है, ऐसा कहा जाता है ।

यह हुई भाग क्रिया के जरिए तुलना ।

7.1.3. दो मापों में अनुपात

उपर्युक्त दो तरह की तुलनाओं में से दूसरी विधि की स्थिति में यानी भागक्रिया द्वारा तुलना-विधि से तुलना के नतीजे को कैसे व्यक्त किया जाता है, वह देखो ।

(क) तुम्हारा और दोस्त का वजन क्रमश: 32 कि.ग्रा. और 30 कि.ग्रा. है ।

तो फिर तुम्हारा वजन और तुम्हारे दोस्त के वजन का अनुपात 32 ÷ 30 या $\frac{32}{30} = \frac{16}{15}$ यानी 16 : 15, 16 : 15 को 16 अनुपात 15 के रूप में पढ़ा जाता है ।

(ख) एक कक्षा में 15 छात्र और 18 छात्राएँ पढ़ती हैं । छात्रों और छात्राओं की संख्याओं का अनुपात है $\frac{16}{18} = \frac{5}{6}$ यानी 5 : 6, इसे 5 अनुपात 6 के रूप में पढ़ा जाता है ।

उपर्युक्त दोनों उदाहरणों से हमने जाना-

- **अनुपात को दर्शाने के लिए ':' चिह्न व्यवहृत होता है ।**
- **अनुपात में दो पद होते हैं । अनुपात के पहले पदों 'पूर्व पद' और दूसरे पद को 'परपद' कहा जाता है।**
- **एक अनुपात, दो संख्याओं को लेकर बनी एक भिन्न संख्या है। भिन्न संख्या का दूसरा रूप है अनुपात ।**

दो मापों की तुलना करते समय एक माप दूसरी माप का कितना भाग या अंश है, उसे हम कहते हैं, यदि दोनों माप एक कोटि (समजातीय) की हो तो अनुपात में कोई इकाई नहीं रहेगी ।

समजातीय मापों को इकट्ठा करके लिखो ।

20 लीटर, 72 ग्राम, 30 रुपए, 40 घंटे

80 पैसे, 120 डेसीग्राम, 100 मि.ली. 108 मिनट

समजातीय मापों की तुलना करते वक्त उन्हें एक माप की इकाई में व्यक्त किया जाता है । यानी दो वजन मापों की तुलना करते वक्त दोनों को कि.ग्रा. में या दोनों का ग्राम में व्यक्त किया जाता है । कई स्थितियों में भिन्न मापों की भी तुलना की जाती है । जैसे कि दूरी और समय का अनुपात लिया जाकर गति निर्णय किया जाता है ।

प्रदत्त दो मापो में तुलना करो (अनुपात में व्यक्त करो)

जैसे; 120 कि.ग्रा. और 40 कि.ग्रा. का अनुपात 120:40 = 3:1

(क) 108 मी. और 72 मी.

(ख) 30 घंटे और 80 घंटे

(ग) 72 लि. और 100 लि.

नीचे दी गई संख्या-जोड़ियों में अनुपात निकालो और उसे लघुतम आकार में बदलो ।

(क) 33 और 55

(ख) 125 और 175

(ग) 108 और 60

(घ) 27 और 108

क्या तुम जानते हो ?
दो मापों के बीच अनुपात निकालने समय दूसरा शून्य (0) नहीं होना चाहिए ।

आओ, निम्न उदाहरणों को देखें ।

उदाहरण : 1

गोविंद के पास 50 पैसे हैं और हरि के पास 2 रूपए हैं। गोविंद और हरि के पास रखे हुए रूपए-पैसे का अनुपात कितना है ?

हल : गोविंद के पास 50 पैसे हैं । हरि के पास 2 रुपए यानी 200 पैसे हैं।

$$\frac{\text{गोविंद का पैसा}}{\text{हरि का पैसा}} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

गोविंद का पैसा : हरि का पैसा =1 : 4

∴ गोविंद और हरि के पास वाले रुपए पैसे का अनुपात है 1 : 4 ।

उदाहरण - 2

सीता और गीता के पास कुल मिलाकर 60 फल हैं। सीता के पास रखे फल और गीता के पास वाले फल का अनुपात 8 : 7 होने पर किसके पास कितने फल हैं ?

हल : सीता के पास रखे फलों की संख्या = 8 गुणा

गीता के पास रखे फल संख्या = 7 गुणा

सीता + गीता के पास स्थित फलसंख्या = 8 गुणा + 7 गुणा = 15 गुणा

कुल 15 गुणा को 60 फल

1 गुणा को =60 ÷ 15 = 4 फल

इसलिए सीता के पास रखे फल की संख्या = 8 x 4 = 32

गीता के पास रखे फल की संख्या = 7 x 4 = 28

∴ सीता के पास 32 फल हैं और गीता के पास 28 फल हैं ।

और एक विधि :

सीता और गीता के फलों का अनुपात = 8 : 7

यदि सीता के फलों की संख्या 8 है, तो गीता के फलों की संख्या 7 होगी ।

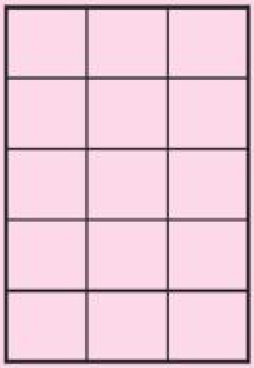
कुल फलों की संख्या 8 + 7 = 15

जब कुल फलों की संख्या 15 है तब सीता के फलों की संख्या = 8

जब कुल फलों की संख्या 1 है तब सीता के फलों की संख्या $= \frac{8}{15}$

जब कुल फलों की संख्या 60 है तब सीता के फलों की संख्या $= \frac{8}{15} x 60 = 8x4 = 32$

गीता के फलों की संख्या = 60 – 32 = 28



ऊपर दिए गए चित्र की तरह तूम अपनी कॉपी में एक चित्र अंकन करो । इसके $\frac{4}{5}$ अंश में (*) चिह्न दो । कितनी कोठरियों में (*) चिह्न देकर अब (*) चिह्न दिए गए कोठरियों में $\frac{2}{3}$ अंश में रंग भरो । कितनी कोठरियों में रंग भरा ? दोनों रंग दिए गए और (*) चिह्नवाली कोठरियों की संख्या कितनी है ? यह कुल कोठरियों की संख्या का कितना हिस्सा है ? प्राप्त भिन्न संख्या को हम $\frac{4}{5}$ का $\frac{2}{3}$ या $\frac{4}{5} x \frac{2}{3}$ के रूप में लिख पाएँगे ।

अभ्यास कार्य 7.1

1. प्रदत्त दो मापों में अनुपात निर्णय करो ।

(क) 600 ग्राम और 20 ग्राम

(ख) 500 ग्राम और 2 कि.ग्रा.

(ग) 25 पैसे और 1 रुपए

(घ) 20 मिनट और 5 घंटे

(ङ) 15 मीटर और 90 से.मी.

2. यदि एक कक्षा के छात्रों की संख्या 40 और छात्राओं की संख्या 25 हो, तो

(क) छात्रों और छात्राओं की संख्या का अनुपात कितना है ?

(ख) छात्राओं और छात्रों की संख्या का अनुपात कितना है ?

(ग) छात्र-संख्या और कुल बच्चों की संख्या का अनुपात कितना है ?

(घ) और 15 छात्र कक्षा में प्रवेश लेने के उपरांत छात्रों की संख्या और छात्राओं की संख्या का अनुपात कितना होगा ?

३. एक विद्यालय में शिक्षकों की संख्या 28 और छात्रों की संख्या 1176 हैं । उस विद्यालय में शिक्षकों और छात्रों की संख्या का अनुपात कितना है ?

4. हरि 5 घंटों में 17 कि.मी. का रास्ता तय करता है और राम 3 घंटों में 34 कि.मी. का रास्ता तय करता है । प्रतिघंटा उनकी गति का अनुपात कितना है ?

5. राम और श्याम के प्रति घंटे की गति का अनुपात 3 : 5 है । राम 5 घंटों में $22\frac{1}{2}$ कि.मी. का रास्ता तय करता है। श्याम की प्रति घंटा गति कितनी है।

6. सकिला एक हफ्ते में 1008 रूपए व्यय करती है । और रोज 216 रुपए आय करती है । उसकी दैनिक आय और व्यय का अनुपात निर्णय करो ।

7.2 समानुपात

7.2.1 अनुपात और समानुपात में संबंध

नीचे दिए गए उदाहरण को ध्यान से देखो -

5 कलमों का दाम 45 रूपए हैं और 8 कॉपियों का दाम 72 रूपए हैं ।

कलमों की संख्या और कॉपियों भी संख्या में अनुपात = 5 : 8

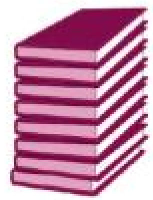
45 रूपये

कलमों का दाम और कॉपियों के दाम से अनुपात = 45 : 72 यानी 5 : 8

($\frac{45}{72} = \frac{5}{8}$ की वजय से अनुपात है 5 : 8)

हमने देखा, कलमों और कॉपियों का अनुपात = उनके दाम का अनुपात

यानी 5 : 8 = 45 : 72



72 रूपये

इसे हम निम्न रूप से भी लिखते हैं 5 : 8 :: 45 : 72

हम कहते हैं 5, 8, 45 और 72 समानुपाती हैं।

दो अनुपातों के बीच वाले समान (=) चिह्न को " : : " के रूप में लिखा जाता है ।

इस तरह दो अनुपातों की समानता को एक समानुपात कहा जाता है ।

दो संख्याओं का अनुपात दूसरी दो संख्याओं के अनुपात से बराबर होने पर चारों संख्याओं को समानुपात में होना कहा जाता है ।

उपर्युक्त चर्चा से क्या जाना ?

- ': :' चिह्न को समानुपात के चिह्न के रूप में प्रयोग किया जाता है ।
- ': :' चिह्न को पढ़ने समय 'समान' के रूप में पढ़ा जाता है ।

ऊपर वर्णित समानुपात को हम 5 : 8 = 45 : 72 यानी 5 : 8 :: 45 : 72 के रूप में लिख सकते हैं।

7.2.2. समानुपात से जुड़े कई पद :

एक समानुपात में स्थित पहले अनुपात का 'पूर्वपद' और दूसरे अनुपात के 'पर पद' को समानुपात का 'प्रांतपद' कहा जाता है । वैसे ही, पहले अनुपात का 'पर पद और दूसरे अनुपात के 'पूर्वपद' को समानुपात का 'मध्यपद' कहा जाता है। और फिर दूसरे अनुपात के 'परपद' को 'चतुर्थ समानुपाती' कहा जाता है ।

5 : 8 = 45 : 72 समानुपात में 5 और 72 प्रांतपद है एवं 8 और 45 मध्यपद है ।

उपर्युक्त समानुपात में चतुर्थ समानुपाती 72 है ।

इनमें से पहले अनुपात के साथ कोई दूसरा अनुपात एक समानुपात बनाते हैं पर उसे चुनो और दायीं ओर के खाली घर में लिखो । पहले प्रश्न का उत्तर देखकर दूसरे प्रश्नों के उत्तर लिखो ।

(क)	1 : 2, 3 : 4, 8 : 20, 8 : 16	1 : 2 : : 8 : 16
(ख)	3 : 4, 4 : 3, 30 : 40, 36 : 60	
(ग)	8 : 11, 16 : 22, 24 : 13, 11 : 18	
(घ)	10 : 21, 20 : 63, 30 : 63, 40 : 88	
(ङ)	5 : 9, 20 : 18, 20 : 36, 15 : 36	

7.2.3. एक समानुपात के प्रांत पद (बाह्यपद) और मध्यपद में संबंध :

5 : 6 : : 60 : 72 (60 : 72 को भिन्न संख्या के रूप में लेकर लघुत्तम आकार में बदलने पर $\frac{5}{6}$ पाएँगे)

इसी समानुपात में 5 और 72 प्रान्तपद (बाह्यपद) है एवं 6 और 60 मध्यपद है ।

आओ देखें, यहाँ प्रांतपद (बाह्यपद) और मध्यपद के बीच क्या संबंध है ?

दो प्रांतपदों का गुणनफल = 5 x 72 = 360

दो मध्यपदों का गुणनफल = 6 x 60 = 360

खुद करके देखो :

निम्न समानुपात में दो प्रांतपदों का गुणनफल और दो मध्यपदों के गुणनफल के बीच क्या संबंध है ?

- 1 : 2 : : 8 : 16
- 3 : 4 : : 54 : 72
- 5 : 9 : : 15 : 27

क्या देख रहे हो, लिखो ।

हमने सीखा,

दो प्रांतपदों का गुणनफल - दो मध्यपदों का गुणनफल

आओ, निम्न उदाहरणों को देखें -

उदाहरण - 1 : 10, 20, 30, 60 क्या ये चार संख्याएँ समानुपाती हैं ?

हल : 10 और 20 का अनुपात $= 10 : 20 = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

30 और 60 का अनुपात $= 30 : 60 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

अत: 10 : 20 = 30 : 60

$\therefore$ 10, 20, 30, 60 समानुपाती हैं।

उदाहरण - 2 : 4, 7, 8, 14 आदि संख्याएँ क्या समानुपाती हैं ?

हल :

पहली विधि से हल

4 और 7 का अनुपात $= 4 : 7 = \frac{4}{7}$

8 और 14 का अनुपात $= 8 : 14 = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

अत: 4 : 7 = 8 : 14

4, 7, 8, 14 समानुपाती हैं।

दूसरी विधि से हल

दो प्रांतपदों का गुणनफल $4 \times 14 = 56$

दो मध्यपदों का गुणनफल $7 \times 8 = 56$

दो प्रांतपदों का गुणनफल = दो मध्यपदो का गुणनफल

अत: 4 : 7 : : 8 : 14

4, 7, 8, 14 समानुपाती हैं।

उदाहरण - 3 : 190 : 76 :: 10 : 4 समानुपात सही है या गलत, परखो ।

हल : पहला अनुपात $= 190 : 76 = \frac{190}{76} = \frac{10}{4}$

पहला अनुपात = दूसरा अनुपात

$\therefore$ अत: प्रदत्त समानुपात सही है ।

उदाहरण - 4 : एक कक्षा में छात्रों और छात्राओं की संख्या का अनुपात 2 : 3 है । यदि छात्राओं की संख्या 21 है तो छात्रों की संख्या कितनी है ?

हल : छात्रों की संख्या छात्राओं की संख्या = 2 : 3

छात्रों की संख्या 2 होने पर, छात्राओं की संख्या 3

छात्राओं की संख्या 3 होने पर, छात्रों की संख्या 2

छात्राओं की संख्या 1 होने पर, छात्रों की संख्या $\frac{2}{3}$

छात्राओं की संख्या 21 होने पर, छात्रों की संख्या $\frac{2}{3} \times 21 = 14$

$\therefore$ छात्रों की संख्या = 14

अभ्यास कार्य 7.2

1. कौन-सी चार संख्याएँ समानुपाती हैं ?

   (क) 10, 15, 20, 30 (ख) 15, 20,3, 5

   (ग) 35, 30, 105, 120 (घ) 18, 20, 90, 4

   (ङ) 54, 72, 81, 108 (च) 15, 18, 10, 20

2. जो समानुपात सही हैं, उन्हें अपनी कॉपी में लिखो ।

   (a) 16 : 36 :: 12 : 27 (b) 12 : 18 :: 28 : 42

   (c) 21 : 6 :: 35 : 14 (d) 8 : 9 :: 24 : 27

   (e) 15 : 18 :: 10 : 15 (f) 5.2 : 3.9 :: 4 : 3

3. निम्न उक्तियों में से सही उक्तियों को चुनो ।

   (a) 99 कि.ग्रा. : 45 कि.ग्रा. :: 44 रुपये : 20 रुपये

   (b) 32 मि. : 64 मि. :: 6 सेकेंड : 12 सेकेंड

   (c) 40 लोग : 200 लोग = 15 लिटर : 75 लिटर

   (d) 45 कि.मि. : 60 कि.मि. = 12 घंटे : 15 घंटे

4. हरि और राम के पासवाले फलों का अनुपात 4 : 5 । दोनों के कुल फल 63 हैं तो किसके पास कितने फल हैं ?

7.3 प्रतिशत

7.3.1 प्रतिशत की अवधारणा

एक बच्चे ने तीन विषयों की परीक्षाओं में जो-जो अंक प्राप्त किए हैं, नीचे दिए गए हैं।

उसने किस विषय में सबसे अच्छा किया है ?

साहित्य में उसके सबसे ज्यादा अंक है । क्या बता पाएँगे कि उसका साहित्य में दूसरे दो विषयों की तुलना में अच्छा हुआ है ? यदि तीनों विषयों में बराबर कुल अंक होते, तो इसका जिस विषय में ज्यादा अंक है, उस विषय में उसका सबसे अच्छा हुआ है, ऐसा कहा जा सकता। आओ, हरेक विषय के कुल अंकों को 100 लेकर, उसके प्राप्त किए अंक कितने हैं, उसक हिसाब लगाएँगे ।

साहित्य

कुल अंक 80 से उसके अंक 48 हैं

कुल अंक 1 से उसके अंक होंगे $\frac{48}{80}=\frac{6}{10}$

कुल अंक 100 से उसके अंक होंगे $\frac{6}{10}\times100=60$

गणित

कुल अंक 60 से उसके अंक हैं 42

कुल अंक 1 से उसके अंक होंगे $\frac{42}{60}=\frac{7}{10}$

कुल अंक 100 से उसके अंक होंगे $\frac{7}{10}\times100=70$

विज्ञान

कुल अंक 50 से उसके अंक हैं 40

कुल अंक 1 से उसके अंक होंगे $\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$

कुल अंक 100 से उसके अंक होंगे $\frac{4}{5}\times100=80$

बताओ तो :
किस विषय में बच्चे ने अच्छा किया है ?

विविध विषयों में बच्चे के द्वारा प्राप्त किए हुए अंक है।

साहित्य में 100 से 60 । इसे हम 60 प्रतिशत कहते हैं।

गणित में 100 से 70 । इसे हम 70 प्रतिशत कहते हैं।

उसी तरह विज्ञान में उसने प्राप्त किया है 80 प्रतिशत ।

अब देखा गया, उसके सबसे अच्छे अंक विज्ञान के हैं।

हम जो सीखेंगे :

- **'प्रतिशत' का मतलब 'सौ से' । प्रतिशत का चिह्न % ।**
- **'सौ से 80', इस बात को हम 80 प्रतिशत कहते हैं और लिखते हैं 80 % ।**
- **'प्रतिशत' भी एक तरह की तुलना है ।**

7.3.2. प्रतिशत को भिन्न संख्या अनुपात और दशमलव में दर्शाओ

प्रतिशत को भिन्न संख्या में दर्शाएंगे ।

75% का मतलब है 100 से 75 । यहाँ 75 को 100 से तुलना की गई है । भिन्न संख्या के जरिए 75 को 100 से तुलना करने पर हम लिखते हैं $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ ।

$\therefore 75\%=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ $\quad 34\%=\frac{34}{100}=\frac{17}{50}$ $\quad 70\%=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$

उसी तरह,

$15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ $\quad$ $17\% = \frac{17}{100}$

$38\% = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$

क्या जानते हो ?

प्रतिशत भी एक भिन्न संख्या है, जिसका हर 100 है।

$19\% = \frac{19}{100}$

निम्न प्रतिशतों को भिन्न संख्याओं में बदलो :

(क) 25% (ख) 20% (ग) 7 % (घ) 150 %

(b) प्रतिशत को अनुपात में दर्शाएँगे

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 3:4$ (क्योंकि $\frac{3}{4}$ को $3:4$ लिखने की बात तुम जानते हो)

निम्न प्रतिशतों को अनुपात में बदलो

(क) 40% (ख) 45% (ग) 125% (घ) 75 %

प्रतिशत को पहले भिन्न संख्या में लिखेंगे, भिन्न संख्या को लघुत्तम आकार में लिखेंगे एवं उसके उपरांत भिन्न संख्या को अनुपात में दर्शाएँगे ।

(c) प्रतिशत को दशमलव संख्या में व्यक्त करेंगे ।

नीचे कई प्रतिशतों को दशमलव संख्याओं में व्यक्त किया गया है । ध्यान से देखो -

$2\% = \frac{2}{100} = 0.02$ $\quad$ $70\% = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = 0.7$

$5\% = \frac{5}{100} = 0.05$ $\quad$ $175\% = \frac{175}{100} = 1.75$

प्रतिशत को 100 हरवाली भिन्न संख्या में बदल कर दशमलव संख्या में व्यक्त किया जाता है ।

नीचे प्रतिशतों को दशमलव संख्याओं में बदलो -

(a) 25% (b) 20% (c) 10% (d) 5% (e) 28%

हमने क्या सीखा ?

- प्रतिशत को भिन्न संख्या में बदलने के लिए प्रतिशत चिह्न (%) को हटा दिया जाता है एवं बची हुई संख्या को 100 से भाग किया जाता है, भिन्न संख्या को लघुत्तम आकार मं व्यक्त किया जाता है ।

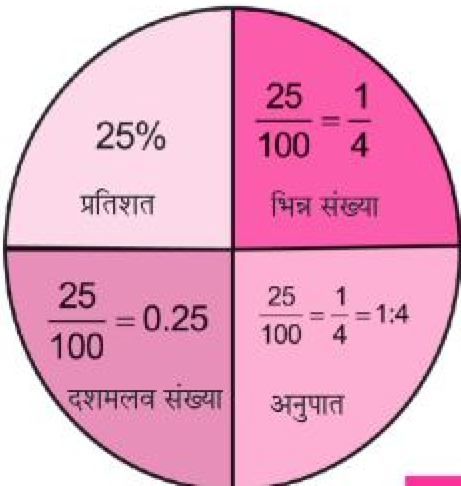
- प्रतिशत को अनुपात में बदलने के लिए प्रतिशत चिह्न (%) को हटा दिया जाता है और बची हुई संख्या को 100 से भाग करते हुए लघुत्तम बनाया जाता है । व्यक्त भिन्न संख्या को अनुपात में व्यक्त किया जाता है ।

- प्रतिशत को दशमलव संख्या में व्यक्त करने के लिए प्रतिशत चिह्न (%) को हटा दिया जाता है ओर दशमलव बिंदु को बायीं ओर दो स्थान सरका दिया जाता है । प्राप्त संख्या को दायीं ओर से गिनकर दो अंकों के बाद दशमलव बिंदु बिठा दिया जाता है । एक अंक वाला प्रतिशत होने पर प्रतिशत चिह्न हटा देने के बाद सिर्फ एक अंकवाली संख्या बचेगी । उसकी बायीं ओर 0 लिख कर 0 की बायीं ओर दशमलव बिंदु बिठाना होगा। जैसे कि नीचे दिखाया गया है -

8% ⟶ 8 ⟶ 08 ⟶ .08

8%	8	08	.08
	प्रतिशत बिंदु हटा दिया गया	8 की बायीं ओर 0 लिखा गया	शून्य की बायीं ओर दशमलव बिंदु बिठा दिया गया

चित्र को देखो, 25% को विविध रूपों में व्यक्त किया गया है ।



खुद कर के देखो -

बगल वाले चित्र दर्शाए गए प्रतिशत की भाँति 35% और 75% को विविध रूपों में व्यक्त करो।

अभ्यास कार्य 7.3

1. भिन्न संख्या में बदलो ।

   8%, 25%, 80%

2. अनुपात में बदलो ।

   15%, 19%, 49%

3. दशमलव संख्या में बदलो

   3%, 7%, 26%, 123%, 200%

4. निम्न सारणी के खाली घरों को भरो ।

प्रतिशत संख्या	भिन्न संख्या	अनुपात	दशमलव संख्या
4%			
38%			
25%			
100%			
320%			

7.4 भिन्न संख्या, अनुपात, और दशमलव संख्या को प्रतिशत में व्यक्त करेंगे ।

प्रतिशत को भिन्न संख्या, अनुपात और दशमलव संख्या में बदलने की विधि हम सीख चुके हैं। अब भिन्न संख्या अनुपात और दशमलव संख्या को प्रतिशत में बदलने की विधि जानेंगे ।

7.4.1. भिन्न संख्या को प्रतिशत में व्यक्त करेंगे ।

आओ, $\frac{3}{4}$ को प्रतिशत में व्यक्त करेंगे ।

प्रदत्त भिन्न संख्या के हर को बदलकर 100 कर देने से हम प्रदत्त संख्या को प्रतिशत में बदल पाएँगे ।

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 25}{4\times 25}=\frac{75}{100}=75\%$$

उपर्युक्त उदाहरण को ध्यान से देखने पर हम पाएँगे -

$\frac{3}{4}$ का प्रतिशत मूल्य $\left(\frac{3}{4}\text{ x } 100\right)\% = 75\ \%$

- $\frac{5}{7}$ को प्रतिशत में व्यक्त करने से कितना होगा ?

$\frac{5}{7}$ का प्रतिशत मूल्य $=\left(\frac{5}{7}\text{ x } 100\right)\% = 71\frac{3}{7}\ \%$

बताओ तो :
$\frac{3}{4}$ और $\frac{4}{5}$ में कौन बड़ा है ?
(दोनों को प्रतिशत में व्यक्त करते हुए बताओ)

हमने जाना,

प्रदत्त भिन्न संख्या को 100 से गुणा करने से इसका प्रतिशत मूल्य प्राप्त होता है ।

7.4.2. अनुपात को प्रतिशत में व्यक्त करेंगे :

आओ, 2:5 को प्रतिशत में व्यक्त करेंगे । $2:5 = \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\text{ x } 100\right)\% = \frac{200}{5}\% = 40\%$

15:20 को प्रतिशत में व्यक्त करने से $15:20 = \frac{15}{20} = \left(\frac{15}{20}\text{ x } 100\right)\% = \frac{1500}{20} = 75\%$ होगा।

7.4.3. दशमलव संख्या को प्रतिशत में व्यक्त करो :

आओ, 0.25, 1.37 और 1.5 को प्रतिशत में व्यक्त करो।

(क) $0:25 = \frac{25}{100} = \left(\frac{25}{100} \times 100\right)\% = 25\%$ यानी, 0.25 का प्रतिशत मूल्य = 25%

(ख) $1:37 = \frac{137}{100} = \left(\frac{137}{100} \times 100\right)\% = 137\%$ यानी, 1.37 का प्रतिशत मूल्य = 137%

(ग) $1:5 = \frac{15}{10} = \frac{150}{100} = \left(\frac{150}{100} \times 100\right)\% = 150\%$

हमने सीखा : **दशमलव संख्या के दशमलव बिंदु को दो स्थान दायीं ओर खिसका देने से प्रतिशत मूल्य प्राप्त हो रहा है ।**

✍ **प्रतिशत में व्यक्त करो ।**

(क) $\frac{7}{20}, \frac{3}{5}, 2\frac{3}{2}, \frac{7}{9}$

(ख) 3:4, 6:8, 11:12, 7: 18, 5:7

(ग) 0.2, 0.19, 0.123, 5.87, 2.05

7.5. प्रतिशत का प्रयोग

नीचे दिए गए उदाहरण पर ध्यान दो ।

उदाहरण - 1 5 मि. 60 से.मि. का 25% कितना ?

हल : 5 मि. 60 से.मि. का 25%

= (5 मि. 60 से.मि.) $\times \frac{25}{100}$

= 560 से.मि. $\times \frac{1}{4}$

= 140 से.मि.

= 1 मि. 40 से.मि.

$\therefore$ 5 मि. 60 से.मि. का 25% है 1 मि. 40 से.मि. ।

उदाहरण - 2 राम ने गणित में 80 से 48 अंक प्राप्त किए थे । उसने कितना प्रतिशत अंक रखा ?

हल : राम ने 80 अंकों से 48 अंक रखे हैं।

राम का प्रतिशत अंक $= \left(\frac{48}{80} \times 100\right)\%$

$= \left(\frac{3}{5} \times 100\right)\%$

$= 60\%$

(भिन्न संख्या को प्रतिशत में बदलने के लिए हमें 100 से गुणा किया जाता है)

$\therefore$ राम ने गणित में 60% अंक रखा था ।

उदाहरण - 3

गोविंद बाबू की मासिक आय रु.6000.00 हैं। वे अपनी आय का 20% बचत करते हैं। उनके मासिक व्यय का परिमाण कितना है ?

हल : गोविदं बाबू की बचत परिमाण = रु. 6000.00 का 20%

$= रु.\ 6000.00 \times \frac{20}{100}$

= रु. 1200.00

व्यय का परिमाण = रु. 6000.00 – रु. 1200.00

= रु. 4800.00

∴ गोविंद बाबू के मासिक व्यय का परिमाण है रु 4800.00 ।

क्या जुम जानते हो ?

आय - व्यय = बचत

आय - बचत = व्यय

व्यय + बचत = आय

अभ्यास कार्य-7.4

1. विभिन्न विषयों में प्राप्त किए अंकों को उस विषय के कुल अंकों के प्रतिशत में बदलो ।

कुल अंक	100	100	200	200	500	600	800
प्राप्त किए अंक	64	32	64	124	230	486	336
प्रतिशत अंक							

2. छह ग्रामों की कुल जनसंख्या और साक्षर संख्या दी गई है । उस साक्षर संख्या को प्रतिशत में लिखो ।

कुल जनसंख्या	1000	3000	2500	1500	1200	3200
साक्षर जनसंख्या	590	1800	1600	1175	960	1856
प्रतिशत साक्षर						

3. एक शार्ट का दाम 350 रुपए लिखा गया है । दुकानदार ने 20% छूट दी । शॉर्ट का असली बिक्री दाम कितना है ?

क्या जानते हो ?

दुकानदार बेचनेयवाली वस्तु के लिखित दाम से कभी कभी कुछ कम कर देता है । कम किए जाने वाले परिमाण को छूट कहा जाता है ।

10% छूट का मतलब है यह लिखित दाम का 10%

4. एक शहर से राम का घर 120 कि.मी. दूरी पर है । वह बस से 36 कि.मी. आया । वह कुल दूरी का कितना प्रतिशत है ?

5. मीता ने वार्षिक परीक्षा में 600 अंकों से 500 अंक रखे और गीता ने 500 अंकों से 415 अंक रखे । किसका प्रतिशत अंक ज्यादा है और कितना ज्यादा है ?

7.6 औसत

निम्न स्थितियों को ध्यान से देखो ।

(क) तुम्हें तुम्हारी माँ ने पहले दिन 5 लड्डू और दूसरे दिन 3 लड्डू खाने को दिए ।

- तुम्हें कुल कितने लड्डू दिए ?
- कितने दिनों में उतने लड्डू खाने को दिए ?
- यदि रोज तुम्हारी माँ ने तुम्हें समान संख्यक लड्डू दिए हो ने, तो उतने लड्डू को तुम्हें रोज कितने करके देती ?

अब बताओ, तुम्हारी माँ ने तुम्हें दो दिनों में कुल कितने लड्डू दिए थे ? यदि हर रोज समान संख्यक लड्डू दिए होते, तो एक दिन के लिए कितना करके देने से, 2 दिनों में कुल 8 लड्डू देंगी ?

जरूर तुम कहोगे $8 \div 2 = 4$ करके लड्डू।

(ख) एक दुकानदार 5 दिनों में बेचे हुए पंखों की संख्या नीचे गई है।

पहला दिन   दूसरा दिन   तीसरा दिन   चौथा दिन   पाँचवाँ दिन

- कुल कितने पंखे बेचे गए हैं ? उत्तर : $4 + 5 + 3 + 6 + 2 = 20$
- कुल दिनों की संख्या कितनी है ? उत्तर : 5 दिन
- यदि दुकानदार ने उन पाँच दिनों में रोज समान संख्यक पंखे बेचे होते तो उसने रोज कितने पंखे बेचे होते ?

उदाहरण : (क) में, दैनिक समान संख्या में दी जा रही लड्डू-संख्या को दैनिक औसत लड्डू संख्या कहा जाता है ।

उदाहरण : (ख) में, दैनिक समान संख्या में बेचे जा रहे पंखों की संख्या को दैनिक औसत पंखों की बिक्री संख्या कहा जाता है ।

इससे हमने क्या सीखा :

$$\text{एकाधिक संख्याओं का औसत मूल्य} = \frac{\text{राशियों का योगफल}}{\text{राशियों की संख्या}}$$

नीचे दिए गए उदाहरण को देखो ।

उदाहरण - 1:

एक विद्यालय में पहली, दूसरी, तीसरी, चौथी, पाँचवी, छठी और सातवीं कक्षाओं में क्रमश: 25, 32, 48, 38, 45, 56 और 36 बच्चों ने नाम लिखवाया था । प्रति कक्षा औसतन कितने बच्चों ने नाम लिखवाया था ?

हल :

$$\text{औसत संख्या} = \frac{\text{सभी कक्षा में नाम लिखवाये बच्चों की संख्या}}{\text{कक्षाओं की संख्या}}$$

$$= \frac{25+32+48+38+45+56+36}{7}$$

$$= \frac{280}{7}$$

$$= 40$$

∴ प्रति कक्षा औसतन 40 बच्चों ने नाम लिखवाया था ।

उदाहरण - 2 :

तुम्हारे तीन दोस्तों का गणित में औसत अंक 80 होने पर उन्होंने कुल कितने अंक रखे थे ?

हल :

तीन दोस्तों का औसत नंबर 80 है ।

हम जानते हैं,

$$\text{औसत नंबर} = \frac{\text{कुल नंबर}}{\text{बच्चों की संख्या}}$$

$$\text{या} \quad 80 = \frac{\text{कुल नंबर}}{3}$$

या कुल नंबर $= 80 \times 3 = 240$

∴ तीन दोस्त गणित में कुल 240 नंबर रखे थे ।

> **क्या तुम जानते हो ?**
>
> राशियों के कुल मूल्य को राशियों की संख्या द्वारा भाग करने पर औसत मूल्य मिलता है । इसलिए इस विभाजन प्रक्रिया में -
> **भाज्य** = कुल मूल्य, **भाजक** = राशियों की संख्या और
> **भागफल** = औसत मूल्य ।
> हम जानते हैं, भाज्य = भाजक × भागफल
> इसलिए, कुल मूल्य = औसत मूल्य × राशि संख्या

उदाहरण - 3

गोविंद, हरि, श्याम और राम की ऊँचाई क्रमश: 124 से.मी., 128 से.मी., 123 से.मी. और 121 से.मी. होने पर प्रति बच्चा औसत ऊँचाई निर्णय करो ।

हल :

बच्चों की कुल ऊँचाई = 124 से.मी. + 128 से.मी. + 123 से.मी. + 121 से.मी. = 496 से.मी.

प्रति बच्चा औसत ऊँचाई $= \frac{\text{बच्चों की कुल ऊँचाई}}{\text{बच्चों की संख्या}}$

$= \frac{496}{4}$

= 124 से.मी. ।

∴ प्रति बच्चा औसत उँचाई 124 से.मी. है ।

खुद करके देखो :

(क)

- तुम्हारा वजन और तुम्हारे तीन दोस्तों का वजन मापकर निर्णय करो ।
- चारों का कुल वजन निकालो
- हरेक का औसत वजन निर्णय करो।

(ख) तुम अपने दैनंदिन जीवन की विविध परिस्थितियों में औसत धारणा का प्रयोग करते होगे । इसके पाँच उदाहरण दो ।

अभ्यास कार्य-7.5

1. 35, 48, 31 और 22 का औसत निर्णय करो ।

2. खलिल बाबू ने अपनी तीन साइकिल के लिए तीन सीट्कबर खरीदे । एक का दाम 28 रुपए हैं, और एक का दाम 24 रुपए तथा तीसरे का दाम 23 रुपए हैं । उनके द्वारा खरीदे गए तीन सीट कवरों का प्रति एक कवर औसत दाम कितना है ?

3. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने पांच एक दिवसीय मैच में 45, 30, 102, 113 और 70 रन किए थे । उन्होंने प्रति मैच औसत कितना रन किया था ?

4. छह बच्चोंवाले एक दल में प्रति बच्चो की औसत उम्र 10 साल होने पर उनकी कुल उम्र कितनी है ?

5. बारह थैलियों में रखी गई कुल चीनी का कुल वजन 111 कि. 600 ग्रा. होने पर प्रति थैली चीनी का औसत वजन कितना है ?

6. सात पुस्तकों का कुल दाम 310 रुपए और दूसरी तीन किताबों का प्रति किताब का औसत दाम 68 रुपए होने पर इन दस किताबों का प्रति किताब का औसत दाम निर्णय करो ।

पूर्णांक

8.1 हमने जो सीखा है

वस्तुओं को गिनने के लिए मनुष्यों ने विविध संकेत पैदा किए । इसके द्वारा सींक, कंकड या बीज की मदद से उसके कितने पालतू जानवर या कितने पेड़ या उसके परिवार के कितने सदस्य हैं, उन्हें हिसाब करने की समस्या दूर हुई ।

जितनी वस्तुएँ, उतनी संख्या । उसने भी एक समस्या खड़ी कर दी । अनेक संकेतों को याद रखना भी मुश्किल का काम हुआ । उससे बचने के लिए स्थानीयमान व्यवस्था और शून्य पैदा हुआ ।

इसके बाद आवश्यकता के अनुरूप योग, वियोग, गुणन और भाग आदि प्रक्रियाएँ पैदा हुईं । गणन संख्यायों के साथ उपर्युक्त प्रक्रियायों के प्रयोग से प्राकृत संख्या-व्यवस्था या प्रसारित प्राकृत संख्या व्यवस्था मनुष्य की ज्यादा अपनी बन गई ।

8.2. दो दिशाओं में विपरीत संख्याओं का प्रसार

कई परिस्थितियाँ पैदा हुईं, जहाँ मनुष्य ने देखा, शून्य को बाद देने से जो बची हुई प्राकृत संख्याएँ रहीं, वे दो विपरीत अवस्थाओं से जुड़ी हुई हैं । ऐसी कई परिस्थितियों की सूचना नीचे दी गई हैं ।

पहली परिस्थिति

शालपड़ा, हातीबंधा और टुकुणा नामक तीन स्थानों को जोड़नेवाला एक सीधा रास्ता है । इस रास्ते को मापने के लिए हम विविध प्रकार के उपाय करते हैं । दूसरे पन्नों वाले चित्र 8.1, 8.2 और 8.3 को देखो ।

जैसा (i) शालपड़ा से हातीबंधा से होकर टुकुणा को गया हुआ रास्ता ।

या (ii) टुकुणा से हातीबंधा से होकर शालपड़ा को गया हुआ रास्ता ।

या (iii) हातीबंधा से शालपड़ा की ओर टुकुणा की ओर गये हुए दो रास्ते ।

यदि रास्ते की लंबाई मापने का उपाय करना हो तो ऐसी स्थिति में रास्ते का आंरभ शालपड़ा को संख्या शून्य (0) द्वारा चिह्नित किया जाता है । क्रमशः कि.मी. की दूरी पर कि.मी. की खुंटियाँ गाड़ी जाती हैं और उन्हें 1, 2, 3....... आदि संख्याओं से चिह्नित किया जाता है ।

इसलिए हम कहते हैं-

शालपड़ा से 4 कि.मी. की दूरी पर हातीबंधा स्थित है ।

शालपड़ा से 9 कि.मी. की दूरी पर टुकुणा स्थित है ।

(ii) ऐसी परिस्थिति में रास्ते का आरंभ टुकुणा को संख्या शून्य (0) द्वारा चिह्नित किया जाता है । क्रमश: 1 कि.मी. की दूरी पर कि.मी. की खुंटियाँ गाड़ी जाती हैं और उन्हें 1, 2, 3....... आदि संख्याओं से चिह्नित किया जाता है ।

इसलिए हम कहते हैं -

टुकुणा से 5 कि.मी. की दूरी पर हातीबंधा स्थित है ।

टुकुणा से 9 कि.मी. की दूरी पर शालपड़ा स्थित है ।

हातीबंधा से 4 कि.मी. की दूरी पर शालपड़ा स्थित है ।

(iii) ऐसी परिस्थिति में हम रास्ते का आरंभ हातीबंधा पर है- ऐसा मान लेते हैं। इसलिए हातीबंधा को संख्या शून्य द्वारा चिह्नित किया जाता है । हातीबंधा से आरंभ करके क्रमश: 1 कि.मी. की दूरी पर शालपड़ा की ओर कि.मी की खुंटियाँ गाड़ी जाती हैं और उन्हें क्रमश: 1, 2, 3....... आदि संख्याओं से चिह्नित किया जाता है । पुनश्च हातीबंधा से आरंभ करके टुकुणा की ओर 1 कि.मी. की दूरी पर कि.मी. की खुंटियाँ गाड़ी जाती हैं एवं उन्हें 1, 2, 3....... आदि संख्याओं से चिह्नित किया जाता है ।

इसलिए हम कहते हैं कि हातीबंधा से दायीं ओर 5 कि.मी. की दूरी पर टुकुणा स्थित है ।

हातीबंधा से बायीं ओर 4 कि.मी. की दूरी पर शालपड़ा स्थित है ।

ऐसी स्थिति में, रास्ते पर 1 चिह्नित दो बिंदु, 2 चिह्नित दो बिंदु, 3 चिह्नित दो बिंदु आदि का रहना दिख रहा है । हालांकि एक 1 चिह्नित बिंदु हातीबंधा से दायीं ओर रहा है तो दूसरा 1 चिह्नित बिंदु हातीबंधा से बायीं ओर जा रहा है ।

इसलिए दो 1 होने पर भी उनमें स्थितिगत फर्क रहा हैं।

इसी फर्क को दर्शाने के लिए हम निम्न तरीका अनुसरण कर सकते हैं।

अब हमने देखा कि एक 1 दायीं ओर को है और दूसरा 1 बायीं ओर को है, इसी तरह एक 2 दायीं ओर को एवं दूसरा 2 बायीं ओर को है ।

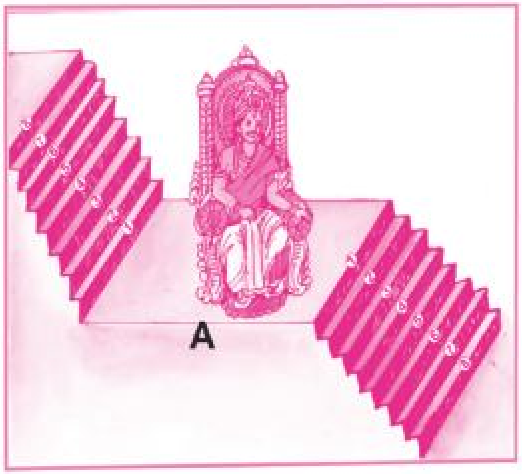
इसी फर्क को संक्षिप्त बनाने के लिए मनुष्य ने 'दायें' के लिए '+' चिह्नित और 'बाएँ' के लिए '–' चिह्न के प्रयोग की बात सोची । फलत: उपयुक्त रास्ते की कि.मी. सूचक खुटियाँ निम्न रूप से सूचित हुईं।

यहाँ पर 'हातीबंधा' पर दो विपरीत दिशाओं को प्रसारित रास्तों का आरंभ होने के कारण उसे 'मूलबिंदु' या 'आरंभ बिंदु' का नाम दिया गया तथा इसके नामकरण के लिए अंग्रेजी अक्षर 0 का व्यवहार किया गया ।

यह चर्चा सुनने के बाद शरत ने कहा - 'मैं एक परिस्थिति बताऊँगा ।' उसके बाद उसने निम्न परिस्थिति बनाई ।

दूसरी परिस्थिति

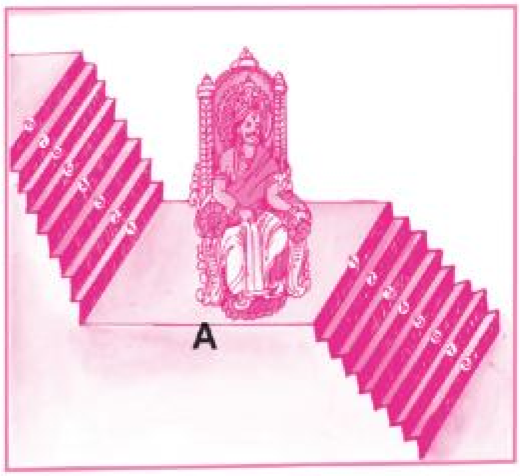
एक राजा ने अपनी धन-दौलत को सुरक्षित रखने के लिए जमीन के नीचे एक घर बना रखा था । जमीन पर स्थित घर की चट्टान से छत पर जाने के लिए सीढ़ियाँ बनाई गई थी तथा जमीन के नीच वाले घर को जाने के लिए भी सीढ़ियाँ थीं



उभय सीढ़ियों का आरंभ 'A' नामक एक ही स्थान से ।

A से ऊपर की सीढ़ियों को 1, 2, 3.... आदि संख्याओं से एवं A से नीचे की सीढ़ियों को भी 1, 2, 3..... आदि संख्याओं से चिह्नित किया गया था । इसलिए 'नीचे की 3 नंबर वाली सीढ़ी या ऊपर की 3 नंबर वाली सीढ़ी न कहने पर कौन-सी 3 नंबर वाली सीढ़ी है, पता नहीं चलता था ।

इस समस्या को दूर करने के लिए मन्त्री ने कहा जहाँ वे सीढ़ियों शुरू हुई हैं, उस स्थान को शून्य (0) से चिह्नित किया जाय एवं ऊपर की ओर जाने वाली सीढ़ियों को +1, +2,+3... संख्याओं से और नीचे की और जानेवाली सीढ़ियों को -1, -2, -3... आदि संख्याओं से चिह्नित किया जाय । बगलवाले चित्र को नई व्यवस्था के अनुरूप दर्शाया गया है ।



8.3 पूर्णांक समूह व्यवस्था

हमने देखा, दो विपरीत अवस्थाओं को दर्शा रही संख्याआं के लिए +1, +2, +3.... और -1, -2, -3..... आदि संख्याआं का प्रयोग क्रिया गया । इस स्थिति में जहाँ विपरीत अवस्था सूचक संख्या गणना की शुरुआत है, उसे **'मूलबिंदु' (आरंभबिदु)** कहा गया एवं इसे संख्या शून्य (0) से सूचित किया गया ।

हमें प्राप्त संख्या समूह हुआ - { ...., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2 +3, +4, ... }

इन संख्याओं को **पूर्णांक समूह** नाम दिया गया एवं इस संख्या समूह को दर्शाने को लिए अंग्रेजी अक्षर का प्रयोग किया गया ।

पूर्णांक समूह के अन्तर्गत -1, -2, -3... आदि संख्याओं को ऋणात्मक संख्या के नाम से सूचित किया गया एवं +1, +2, +3......... आदि संख्याओं को **धनात्मक संख्या** के नाम से सूचित किया गया ।

'धनात्मक और ऋणात्मक संख्या' नामकरण कयों ?

हमारे पास वाले रुपए पैसे और दूसरी दौलत को हम अपनी धन-दौलत मानते हैं, परंतु यदि हम कर्म करते हैं, तो हम अपनी धन दौलत से जरुरत के अनुसार कुछ हम कर्जदाता को देकर अपना कर्ज चुकाते हैं। इसलिए कर्ज या ऋण धन की विपरीत अवस्था है । क्योंकि धन अपनी दौलत को बढ़ाता है एवं ऋण अपनी दौलत को कम करता है ।

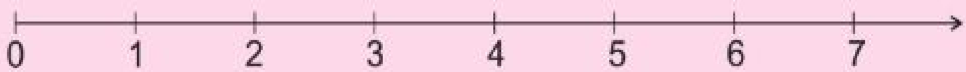
इसी बजह से पूर्णांक के अन्तर्गत +1, +2, +3…… आदि संख्याओं के लिए धनात्मक संख्या एवं –1, –2, –3...... आदि संख्याओं के लिए ऋणात्मक संख्या का नामकरण किया गया है ।

नीचे एक दुकानदार की कई चीजों की बिक्री को लाभ और हानि में दर्शाया गया है । लाभ और हानि विपरीत अवस्थाएँ हैं। लाभ को '+' संकेत द्वारा दर्शाया जाता है और हानि को '–' संकेत द्वारा दर्शाया जाता है । कई परिस्थितियों का वर्णन किया गया है, संकेत का व्यवहार करते हुए लिखो-

चीजों के नाम	लाभ	हानि	सही चिह्न का प्रयोग करके दर्शाना
सरसों का तेल	150 रुपये		
चावल		250 रुपये	
गोलमिर्च	225 रुपये		
गेहूँ	200 रुपये		
आलू		50 रुपये	

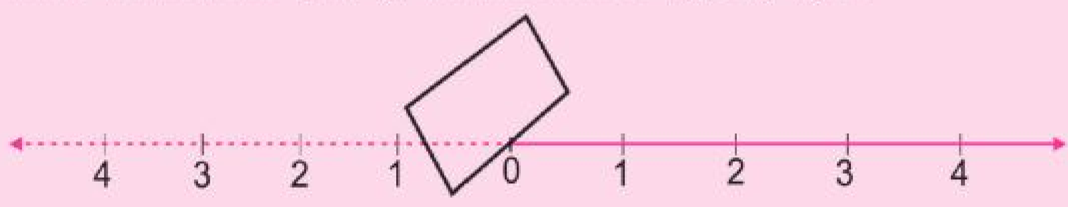
खुद करके देखो

- सफेद कागज के पन्ने पर किरण अंकन करते हुए उस पर संप्रसारित प्राकृत संख्याओं को दर्शाओ । (नीचेवाले चित्र की भाँति)



- एक आईना काँच लाकर उसकी एक धार को कागज पर लगाए रखो, जैसे कि आईने का प्रांतभाग कागज के साथ लंबाई के रुप में रहेगा एवं कागज को लगे रहे आईने की धार कागज पर अंकन की गई संख्या-रेखा पर की गई लंबाई के रुप में रहेगी ।

- अब आईने की धार संख्या रेखा की संख्या शून्य (0) के साथ लगाए रखो वैसे कि इसका प्रतिबिंव किरण की ऊपरवाली संख्याओं की तरफ रहेगा । ऐसी परिस्थिति निम्न चित्र की तरह दिखाई जाएगी ।



- तुम्हारे आईने को देखने पर तुम्हारे द्वारा आंकी गई किरण और इसके ऊपर वाली 1, 2, 3 आदि संख्याएँ आईने में दिखाई जाएँगी एवं वे 0 से बायीं ओर को क्रमश: बढ़ती हुई दिखाई पड़ेगी ।

- आईने के पीछे की ओर दिखाई दे रही 1, 2, 3........ आदि संख्याओं को -1, -2, -3.... आदि संख्याओं के रुप माना जाता है ।

इस कार्य को तुम देखो-

- तुमसे आँकी गई किरण और आईने में दिख रहा प्रतिबंब (किरण का प्रतिबिंब) मिलकर एक रेखा पैदा करेंगे एवं इस रेखा को ऊपर स्थित 0 (शून्य) सूचक बिंदु की दायीं ओर 1, 2, 3...... आदि तुम्हारे द्वारा लिखी संख्याएँ रहेंगी और बायीं ओर इन संख्याओं की प्रतिबिंब संख्याएँ 1, 2, 3.... आदि रहेंगी ।

- आईने को उठाते हुए और तुमसे पहले अंकन की गई किरण को बायीं ओर को बढ़ाने से क्या होगा ?

  पहले अंकित किरण से जुड़ा हुआ हिस्सा मूल किरण की विपरीत किरण के रूप में रहेगा । दोनों किरणें मिलकर एक सरलरेखा पैदा करेंगी । मूल किरण की विपरीत किरण ही तुम्हारे आईन में देखी हुई प्रतिबिंब किरण है। इसके ऊपर पहले ली गई क्रमिक संख्या सूचक दो बिंदुओं में अंतर के बराबर अंतर लेकर बिंदुओं को संकेतित करो और उन्हें 0 सूचक बिंदु की बायीं ओर वाले बिंदु से शुरू करके -1, -2, -3.... आदि संख्याओं द्वारा नामित करो । तुम निम्न चित्र पाओगे ।

जरूर ही इस चित्र में 0 (शून्य) सूचक बिंदु की दायीं ओर वाले बिंदओं के पास पहले 1, 2, 3...... आदि संख्याएँ लिखी गई थीं । अब उन बिंदुओं के साथ '+' चिह्नन लिखो । फलस्वरूप संख्याएँ +1, +2, +3.... में बदलेंगी । (+1 और 1 के बीच संख्यागत फर्क नहीं है)

पूर्णांक समूह में +1 और -1 परस्पर विपरीत है । इस विपरीत संख्या जोड़ी को हम (+1, -1) के रूप में लिखते हैं । वैसे ही दूसरी विपरीत संख्या जोड़ियाँ हैं (+2, -2), (+3, -3), (+4, -4) आदि ।

+5 का विपरीत पूर्णांक -5

-5 का विपरीत पूर्णांक +5

क्या जानते हो ?
0 का विपरीत पूर्णांक वह खुद है । यानी 0 = – 0

जहाँ से विपरीत परिस्थितियों के साथ जुड़ी होती है । वहाँ एक परिस्थिति के साथ धनात्मक संख्या को और इसकी विपरीत परिस्थिति के साथ ऋणारत्मक संख्या को जुड़ा जाता है । विपरीत परिस्थिति के कई उदाहरण नीचे दिए गए हैं।

दूरी मापन की स्थिति में : बायाँ-दायाँ, नीचे-ऊपर, अगला-पिछला, ऊँचा-गहरा आदि विपरीत परिस्थितियाँ हैं। साधारणत:-

'दायाँ, के लिए धनात्मक संख्याएँ और 'बायाँ' के लिए ऋणात्मक संख्याएँ,

'ऊपर' के लिए धनात्मक संख्याएँ और 'नीचे' के लिए ऋणात्मक संख्याएँ'

'ऊँचा' के लिए धनात्मक संख्या और 'गहरा' के लिए ऋणात्मक संख्याओं का प्रयोग किया जाता है ।

यह चर्चा सुनने के बाद रमन ने पूछा- "+4 और -7" को आपस में विपरीत संख्या कह पाएँगे ?

रमन के पूछे गए प्रश्न का उत्तर जानने के लिए आओ, नीचे दिया गया कार्य करेंगे ।

खुद करके देखो

- ऊपरिस्थ संख्या रेखा को देखते हुए निम्न प्रश्नों के उत्तर दो ।

  शून्य (0) सूचक बिंदु से दायीं ओर 3 एकक जाओ, कौन-सी संख्या प्राप्त कीया ?

  शून्य (0) सूचक बिंदु से बायीं ओर 3 एकक जाओ, कौन-सी संख्या प्राप्त कीया ?

- शून्य सूचक बिंदु से इसके विपरीत पार्श्व में बराबर बराबर दूरी पर स्थित दो संख्याओं को आपस में विपरीत कहा जाता है । इसलिए +3 और –3 आपस में ावपरीत संख्याएँ हैं।

  क्योंकि +4 और –7 दोनों संख्याएँ से बराबर बराबर दूरी पर नहीं हैं, इसलिए क्या उन्हें आपस में विपरीत संख्याएँ कहा जाएगा ?

आपसी विपरीत संख्याओं के बारे में और एक काम करेंगे ।

खुद करके देखो

- तुम और तुम्हारे मित्र मिलकर बैठो ।
- तुम्हारे पास -1, -2, -3, ..., -8 लिखे संख्या-कार्ड रखो ।

  तुम्हारे पास कितने संख्या कार्ड रहे ?
- उसी तरह तुम्हारे मित्र को +1, +2, +3, ..., +8 लिखे संख्या कार्ड दो ।
- तुम -1 कार्ड (दिखने पर अपने दोस्त को -1 का विपरीत संख्या-कार्ड दिखाने को कहो । आपसी विपरीत संख्या कार्ड दोनों को एकत्र रखो ।
- इसी तरह तुम्हारे दोस्त के एक संख्या-कार्ड दिखाने पर तुम उसी संख्या के विपरीत संख्या-कार्ड को दिखाओ । इस प्रकार सारे संख्या-कार्ड खतम होने तक यह कार्य करो ।
- इसी भाँति खेलते हुए आपसी विपरीत संख्या-जोड़ियों का निर्णय करे ।

8.3.1. ऋणात्मक चिह्न (-) का अर्थ

अब तक घटाव प्रक्रिया के लिए (-) चिह्नन का प्रयोग किया जाता था । हमारे लिए 5 - 3 का मतलब था 5 से 3 का घटाव करना । परंतु '-3' के लिए कोई अर्थ हमारे पास न था, जब तक हम सिर्फ प्राकृत संख्याओं से परिचित थे ।

अब '–' चिह्न का एक दूसरा अर्थ हमने पाया । यह है विपरीत परिस्थिति सूचक चिह्न ।

यानी, +5 की विपरीत संख्या – 5

+5 और – 5 आपस में विपरीत संख्याएँ हैं, इसलिए

5 की विपरीत संख्या = 5 या , – (–5) = +5

उसी तरह, – (–7) = +7

8.4 पूर्णांकों में बड़ा-छोटा क्रम

प्राकृत संख्याओं को संख्या-रेखा में दर्शाते समय हमने देखा था-

हरेक संख्या की अपेक्षा वृहत्तर संख्या संख्या-रेखा उपरिस्थ के ऊपर उक्त संख्या सूचक बिंदु की दायीं ओर को रहती है और उसी संख्या से छोटी संख्या उक्त संख्या सूचक बिंदु की बायीं ओर को रहती है ।

संख्या-रेखा में पूर्णांकों को दिखाते समय भी संख्याओं के क्रम के बारे में वही नियम मानेंगे । इसलिए हमने देखा

0 की तुलना में -1 छोटा है

-1 की तुलना में -2 छोटा है

-2 की तुलना में -3 छोटा है

-8 की तुलना में -9 छोटा है

नीचेवाली दो बातों को लक्ष्य करो -

-8 की तुलना में 9 बड़ा है (यह हम जानते हैं)

-8 की तुलना में -9 छोटा है (अब जाना)

कक्षा में हो रही यह सारी चर्चा सुनकर रमेश ने पूछा- 'क्या ऐसी एक परिस्थिति है जहाँ -9 की तुलना में -8 बड़ा है ऐसा पता चलेगा ? सीमा ने उत्तर दिया-

हम तो जानते हैं, लाभ परिमाण को धनात्मक संख्या से सूचित किया जाता है और हानि के परिमाण को ऋणात्मक संख्या द्वारा सूचित किया जाता हैं। सबने कहा - हाँ । रहीम और शंकर ने प्रत्येक 5000 रुपए मूलधन लेकर व्यापार किया था ।

एक हफ्ते के अंत में देखा गया-

रहीम ने 200 रुपए का घाटा किया है और

शंकर ने 50 रुपए का घाटा किया है ।

तो फिर बताओ, अब किसकी मूल जमाराशि का परिमाण कितना है ?

रहीम की अब मूल जमा राशि का परिमाण = 5000 रु – 200 रु

= 4800 रु

शंकर की अब मूल जमा राशि का परिमाण = 5000 रु – 50 रु

= 4950 रु.

तो फिर 200 रु. घाटा करने वाले व्यापारी की जमा राशि ज्यादा है, या 50 रुपए घाटा करने वाले व्यापारी की जमाराशि ज्यादा है ?

इसलिए 200 रुपए (या - 200) का घाटे की तुलना में 50 रुपए (-50) का घाटा बड़ा है । - 50 > - 200

क्षुद्रत्तर (<) चिह्न प्रयोग करके अब पूर्णांकों का क्रम होगा-

1 < 2
0 < 1 → (हम जानते थे)

-1 < 0
-2 < -1
-3 < -2
-12 < -11 → (अब हमने जाना)

- निम्न पूर्णांकों के क्रम के बारे में हमने निम्न बातें सीखीं
- प्रत्येक धनात्मक संख्या 0 (शून्य) की तुलना में बड़ी है ।
- प्रत्येक धनात्मक संख्या, किसी भी ऋणात्मक संख्या की तुलना में बड़ी है ।
- 9 > 7 और -9 < -7,   5 > -3 और -5 < 3,   -7 < -4 और 7 > 4

  यानी दो पूर्णाकों में जिस तरह असमानता (बड़ा या छोटा) होती है, दो संख्याओं की विपरीत संख्याओं में पूर्व असमानता की विपरीत असमानता होती है ।
- प्रत्येक दो क्रमिक पूर्णांक सूचक बिंदु द्वय की दूरी है 1,

  जैसे 6 - 5 = 1 (हम जानने हैं)

  वैसे -2 - (- 3) = 1

  -3 - (- 4) = 1   आदि
- संख्या रेखा पर स्थित दो संख्याओं में से दायीं ओर वाली संख्या, बायीं ओर वाली संख्या से बड़ी है । फलस्वरूप बायीं ओर वाली संख्या दायीं ओर वाली संख्या से छोटी है ।

अभ्यास कार्य-8.1

1. निम्न परिस्थितियों की विपरीत परिस्थिति लिखो

(क) जनसंख्या वृद्धि
(ख) बैंक में रुपए जमा करना
(ग) व्यय करना
(घ) उत्तर की ओर जाना
(ङ) तापमान वृद्धि

2. '+' या '−' चिह्न का प्रयोग करके लिखो-

(क) 400 रुपए का लाभ
(ख) दायीं ओर को 4 कि.मी.
(ग) बैंक से 300 रूपये निकालना
(घ) 5 गोलो से हारना
(ङ) भूमि से 200 मी. की ऊँचाई
(च) 2,00,000 रुपए की आय

3. निम्न संख्या जोड़ियों में से कौन-सी विपरीत संख्या जोड़ियाँ हैं, दर्शाओ।

(2, −3), (−5, 5), (−7, −8), (−1, 0), (−11, +11), (17, −17)

4. एक निर्दिष्ट दिन में भारत के छह स्थानों के तापमान नीचे दिए गए हैं।

स्थान	तापमान
सियाचीन	0°C से 10°C कम
भुवनेश्वर	0°C से 22°C अधिक
शिमला	0°C से 3°C कम
दारिंगबाड़ी	0°C से 1°C कम
कोरापुट	0°C से 8°C अधिक
लद्दाख	0°C से 8°C कम

(क) प्रत्येक स्थान के तापमान को पूर्णांक में व्यक्त करो।

(ख) एक संख्या-रेखा अंकन करते हुए प्रत्येक स्थान के तापमान को उसमें दर्शाओ।

(ग) किस स्थान का तापमान सबसे ज्यादा और किस स्थान का तापमान सबसे कम है ?

5. नीचेवाले क्रमों में से सही क्रम को बताओ।

3 < 4, -7 > -8, -9 > +5, -3 < 0, -8 < +2, +1 > -300, -0 < 0

6. प्रदत्त संख्याओं की विपरीत संख्याएँ लिखो।

(क) 7 (ख) -9 (ग) -10 (घ) 0 (ङ) 17

7. नीचे दिए गए पूर्णांक दिय के मध्यवर्त्ती पूर्णांको को छोटे से बड़े क्रम में लिखो ।

(क) 2 और 8 (ख) –3 और –7

(ग) –5 और +2 (घ) –1 और +1

(ङ) –7 और 0

8. खाली बाक्स में >, < और =1 चिह्नों में से सही चिह्न भरो जैसे कि क्रम ठीक रहेगा ।

(क) 2 □ - 5 (ख) -7 □ 3 (ग) 0 □ - 4

(घ) 0 □ - 0 (ङ) -0 □ - 3 (भ) - 3 □ - 7

9. निम्न उक्तियों में से सही उक्ति को चुनकर अपनी कॉपी में लिखो ।

(क) लघुतम पूर्णांक है 0 । (ख) –225 की तुलना में -80 छोटा है ।

(ग) -444 की तुलना में 0 छोटा है । (घ) -2 < 0 < 7

(ङ) - 0 = 0 (च) शून्य (0) धनात्मक या ऋणात्मक नहीं है ।

10. (क) छोटे से बड़े क्रम में सजाओ ।

5, 0, -11, 14, -20, 25, - 4

(ख) बड़े से छोटे क्रम में सजाओ ।

- 8, 2, 5, -6, 0, 15, -111

11. संख्या रेखा को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दो ।

(क) +5 सूचक बिंदु से दायीं ओर 3 एकक दूरी पर जाने से कौन-सी संख्या पाओगे ?

(ख) +5 सूचक बिंदु से बायीं ओर 3 एकक दूरी पर जाने से कौन-सी संख्या पाओगे ?

(ग) +7 सूचक बिंदु से कितनी एकक दूरी पर -4 सूचक बिंदु रहा है ?

(घ) -7 सूचक बिंदु से जितनी दूरी पर -4 सूचक बिंदु रहा है, -7 सूचक बिंदु की बायीं ओर उतनी दूरी पर कौन-सी संख्या रही है ?

22. संख्या रेखा पर

(क) – 3 और – 8 सूचक बिंदुद्वय के बीच दूरी कितनी है ?

(ख) – 2 और +3 सूचक बिंदुद्वय के नीचे दूरी कितनी है ?

8.5. पूर्णांकों में जोड़ और घटाव प्रक्रिया ।

8.5.1. पूर्णांकों में जोड़ :

प्राकृत संख्याओं में जोड़ प्रक्रिया से तुम लोग परिचित हो ।

+ 5 और 5 के बीच कोई फर्क नहीं है । इसलिए 5 + 3 एवं (+5) + (+3) में कोई फर्क नहीं है । इसलिए तुम बोल पाओगे : (+5) + (+3) = +8

तो फिर यही योगफल कैसे पाया था, आओ याद करो।

तीन फूलों से एक लाकर 5 फूलों के साथ मिलाया

दो फूलों से एक लाकर 6 फूलों के साथ मिलाया-

बचे एक फूल को लाकर 7 फूलों से मिलाया-

संख्या क्रम के अनुसार 3 से 1, 1 और बचा 1 लाकर 5 के साथ क्रम से मिलाकर पाये 8 ।

उस कार्य को संख्या रेखा पर निम्न रूप से किया जा पाएगा ।

पहली संख्या को दिखाने के लिए शून्य (0) सूचक बिंदु से शुरू करके पहले संख्या सूचक बिंदु तक जाएगा ।

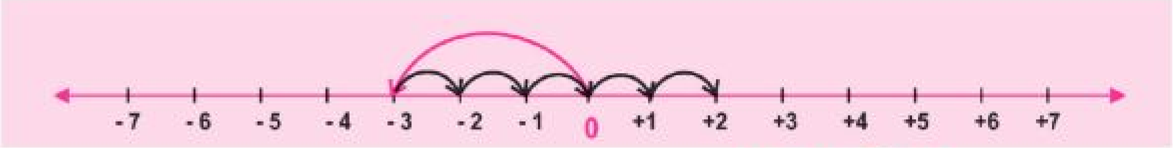
(+5) और (+3) का योगफल निर्णय करने के लिए शून्य सूचक बिंदु से 5 घर दायीं ओर जाकर +5 बिंदु के पास पहुँचने के बाद, गिन-गिनकर 3 या 3 एकक घर दायीं ओर गए । अब पहुँचे +8 के पास ।

इसलिए जाना, (+5) + (+3) = +8

इस विधि से निम्न योग प्रक्रियाओं का संपादन करेंगे ।

(क) (-3) + (+5) = ?

योगक्रिया की पहली संख्या -3 होने के कारण शून्य (0) सूचक बिंदु से -3 तक जाकर -3 बिंदु के पास पहुँचे ।



+5 जोड़ने का कार्य करने के लिए एक-एक घर लेकर पाँच घर (या एकक) गिनकर दायीं ओर जाएँगे । हम जिस संख्या के निकट पहुँचे, वह हुई +2 ।

इसलिए (-3) + (+2) = +2

बताओ तो :
संख्या रेखा का इस्तेमाल करके –4 से +6 योग करने पर योगफल कितना होगा ?

8.5.2. पूर्णाकों में घटाव :

हम जानते हैं, 'फायदा' को धनात्मक संख्या द्वारा और 'घाटा' को ऋणात्मक संख्या द्वारा सूचित किया जाता है ।

इसे एक मामूली बात के जरिए समझ पाएँगे। वह हुई- फायदा कम होता है । यदि घाटा ज्यादा होता है, इस बात के लिए एक उदाहरण देखेंगे ।

गोविंद ने आलू बेचकर 10 रुपए का फायदा किया औरं प्याज बेचकर 4 रुपए का घाटा किया ।

तब उसका कुल फायदा हुआ = 10 रु. – 4 रु. = 6 रु.

उसके अगले दिन उसकी आलू-विक्री से फायदा हुआ 10 रु. परंतु प्यार बिक्री से घाटा हुआ 5 रुपए । यानी उसका कुल घाटा 1 रुपया ज्यादा हुआ ।

कुल फायदा हुआ = 10 रु. – 5 रु. = 5 रु.

अब हमने देखा,

दूसरे दिन उसका घाटा 1 रुपया बढ़ जाने से (4 रु. के बदले 5 रु. घाटा होने से) उसका कुल फायदा 1 रु. कम हो गया (6 रु. के बदले 5 रु. फायदा हुआ) । इसलिए हमने जाना, घाटा जितना बढ़ता है, फायदा उतना कम होता है ।

इससे हमने क्या सीखा ? **-3 जोड़ना जो है, +3 घटाव करना वही है ।**

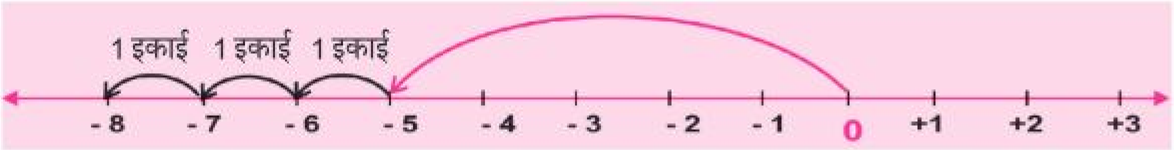
इसलिए (-5) + (+3) = – 5 – (+3)

हम 7 से 3 का घटाव कैसे करते हैं ?

$$7-3 = (7-1)-2$$
$$= (6-1)-1$$
$$= 5-1 = 4$$

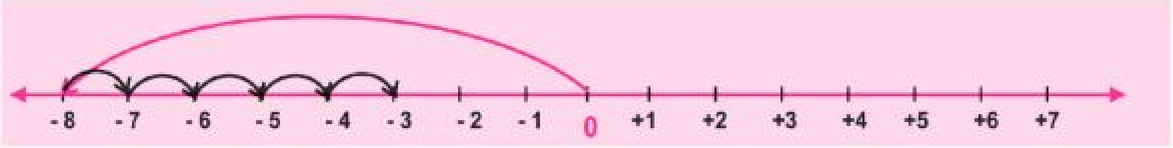
अर्थात 7 से बार-बार करके 3 बार 1 को कम करके हम 7 से 3 घटाव करते हैं । 1 कम करने का मतलब है वही संख्या पाना, जो संख्या रेखा की पूर्ण संख्या की बायीं ओर होती है, इसलिए धनात्मक संख्या घटाव करते समय हम बायीं और जाते हैं।

$(-5)+(-3) = -5-(+3)$



शून्य (0) सूचक बिंदु से -5 सूचक बिंदु तक जाने के बाद, 3 वियोग करने के लिए 3 घर (एकक) बायीं ओर गए । $-5+(-3) = -5-(+3) = -8$

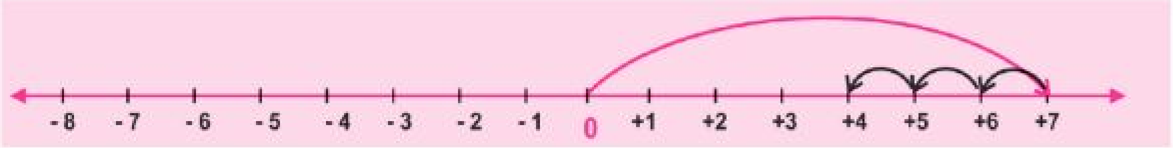
(ख) $(-8)+(+5) = ?$



हमने देखा : $-8+(+5) = -3$

(ग) $(+7)-(+3) = ?$

हम जान चुके हैं घटाव करने के लिए 3 एकक बायीं ओर जाना होगा ।

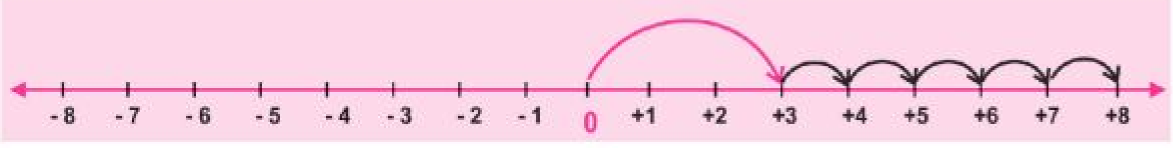


$(+7)-(+3) = +4$

(घ) $(+3)-(-5) = ?$

-5 घटाव करने का मतलब है - 5 की विपरीत संख्या 5 को जोड़ना ।

$(+3)-(-5) = (+3)+(+5)$



इसलिए, $(+3)-(-5) = (+3)+(+5) = +8$

संख्या रेखाकी मदद से योग (जोड़) और वियोग (घटाव) कार्य के बारे में कई जानने वाली बातें।

- योग या वियोग करने समय हम शून्य (0) सूचक बिंदु से शुरू करते हैं।
- धनात्मक संख्या का योग करते समय हम दायीं ओर जाते हैं।
- धनात्मक संख्या का वियोग (घटाव) करते समय हम बायीं ओर जाते हैं ।
- जो धनात्मक संख्या योग करती होती है, एक-एक करके उतने ही घर (एकक) गिनकर हम दायीं ओर जाते हैं।
- जो धनात्मक संख्या घटाव करती होती है, एक-एक करके उतने ही घर (एकक) गिनते हुए हम बायीं ओर जाते हैं।
- **एक ऋणात्मक संख्या को योग करने के लिए उसी संख्या की विपरीत संख्या को लेकर घटाव करेंगे** । इसलिए जहाँ ऋणात्मक संख्या योग करनी होती है, वहाँ इस संख्या की विपरीत संख्या का घटाव करना होता है ।

  जैसे - (+5) + (-7) = (+5) - (+7)

- **एक ऋणात्मक संख्या घटाव करने के लिए इस संख्या की विपरीत संख्या को योग करना होता है ।**

  जैसे - (+3) - (-5) = (+3) + (+5)

अभ्यास कार्य 8.2

1. एक संख्या रेखा अंकन करने हुए उसमें पूर्णांकों को दर्शाओ। उसी संख्या रेखा की मदद से निम्न प्रश्नों के उत्तर दो ।

   (क) -3 सूचक बिंदु से उसी संख्या की विपरीत संख्या सूचक बिंदु की दूरी कितनी एकक है ?

   (ख) -7 सूचक बिंदु और -4 सूचक बिंदु में कितनी दूरी है ?

   (ग) +7 सूचक बिंदु और +4 सूचक बिंदु में दूरी कितनी है ?

2. एक रेखा अंकन करते हुए उसमें पूर्णांको को दर्शाओ। उस संख्या रेखा को देखते हुए निम्न प्रश्नों के उत्तर दो ।

   (क) -2 सूचक बिंदु से 4 एकक बायीं ओर आने पर किस संख्या सूचक बिंदु के पास पहुँचोगे ?

   (ख) 4 सूचक बिंदु से 7 एकक बायीं ओर आने पर किस संख्या सूचक बिंदु के पास पहुँचोगे ?

   (ग) -5 सूचक बिंदु से 4 एकक दायीं ओर आने पर किस संख्या के पास पहुँचोगे ?

   (घ) -2 सूचक बिंदु से 5 एकक दायीं ओर जाने पर किस संख्या के पास पहुँचोगे ?

3. संख्या रेखा की मदद से योग करो । हरेक प्रश्न के समाधान के लिए एक संख्या रेखा की मदद लो ।

(क) (+3) + (+2) (ख) (-2) + (+5) (ग) (+8) + (-3)

(घ) (-7) + (+4) (ङ) (-3) + (-4) (च) (+5) + (0)

4. हरेक प्रश्न के लिए एक संख्या-रेख अंकन करते हुए घटाव करो ।

(क) (+5) - (+3) (ख) (+7) - (-4) (ग) (+5) - (+8)

(घ) (+4) - (-7) (ङ) (-4) - (+3) (च) (-6) - (-5)

8.6 पूर्णांकों में योग प्रक्रिया के विविध नियम

(क) हमने जिन योग कार्यों का संपादन किया है, उन में देखा है ।

दो पूर्णांकों का योगफल भी एक पूर्णांक है, इसलिए योग प्रक्रिया **'सवृत नियम'** अनुसरण करती है ।

(ख) योग प्रक्रिया में क्रम विनिमय नियम

खुद करके देखो

- कोई भी दो धनात्मक पूर्णांक लो । पहली संख्या के साथ दूसरी संख्या को मिलाओ (जोड़ो) ।
- अब दूसरी संख्या के साथ पहली संख्या को मिलाओ । क्या दोनों के योगफल बराबर हुए ?
- एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक लेकर वैसा काम करो । दानों योगफलों में क्या लक्ष्य करते हो ?
- दो ऋणात्मक पूर्णांक लेकर पहली संख्या के साथ दूसरी संख्या को जोड़कर योगफल कितना हुआ, लिखो । अब दूसरी संख्या से पहली संख्या को योग करते हुए योगफल निर्णय करो । क्या दोनों के योगफल बराबर हो रहे हैं ?
- ऊपर किए गए तीन कामों से हमने क्या सीखा ?

हमने देखा-

दो पूर्णांकों को किसी भी क्रम से योग करने पर भी योगफल समान होता है ।

योग प्रक्रिया क्रम विनिमय नियम अनुसरण करती है ।

बताओ तो :
क्या पूर्णांकों में वियोग (घटाव) प्रक्रिया क्रम विनिमय नियम अनुसरण करती है ?

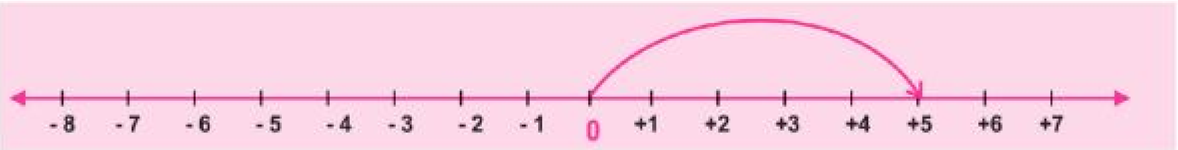
(ग) { (+2) + (-3)} + (+6) = (-1) + (+6) = +5

पुनश्च (+2) + {(-3) + (+6)} = (+2) + (+3) = +5

हमने देखा,तीन संख्याओं में पहली और दूसरी के योगफल को तीसरी से यागे करने पर जो परिणाम मिलता है, पहली को दूसरी और तीसरी के योगफल से योग करने पर वही योगफल मिलता है। यानी योग प्रक्रिया **साहचर्य नियम** पालन करती है ।

(घ) एक पूर्णांक से शून्य (0) को योग करना

(+5) + (0) = ?



+5 में शून्य (0) योग करते समय, पहले संख्या रेखा में +5 सूचक बिंदु पर जाना पड़ेगा । शून्य मिलाने का मतलब और आगे (दायीं ओर) नहीं जाएँगे । इसलिए, +5 से शून्य योग करने से योगफल +5 होगा ।

(+5) + (0) = +5

वैसे ही (0) + (+5) = +5

> **जानते हो ?**
> शून (0) यागात्मक अभेद होता है।

इसलिए (+5) + 0 = 0 + (+5) = +5

अर्थात् पूर्णांक में योग प्रक्रिया अभेद नियम मानती है,

हमने देखा-

कोई भी पूर्णांक + 5 = 0 + वही पूर्णांक = वही पूर्णांक

(ङ) दो विपरीत संख्याओं का योग

संख्या रेखा के प्रयोग से कई विपरीत संख्या जोड़ियों का योगफल निर्णय करेंगे ।

- (+4) + (-4) = कितना ?
- (-7) + (+7) = कितना ?
- (+ 8) + (- 8) = कितना ?

उपर्युक्त तीन योगफलों से क्या लक्ष्य करते हो ?

दो परस्पर विपरीत संख्याओं का योगफल है शून्य (0) ।

इसे योग प्रक्रिया का **विलोम नियम** कहा जाता है ।

8.7 पूर्णांकों का परममान या विशुद्ध मान या निरपेक्ष मान

संख्या रेखा के शून्य (0) सूचक बिंदु से +3 सूचक बिंदु तक जाने के लिए कितने एकक (इकाई) की दूरी तय करनी होगी ? उत्तर होगा : 3 एकक (इकाई)

पुनश्च 0 (शून्य) सूचक बिंदु से -3 सूचक बिंदु तक जाने के लिए कितनी इकाई की दूरी तय करनी होगी ? उत्तर होगा - 3 इकाई ।

यद्यपि +3 दर्शाता है कि यह 0 से 3 इकाई दायीं ओर स्थित है और -3 दर्शाता है कि यह 0 से 3 इकाई बायीं ओर स्थित है । यहाँ '+' चिह्न दायीं दिशा का सूचक है एवं '–' चिह्न 'बायीं' दिशा का सूचक है।

परंतु दोनों संख्या 3 और –3 की एक आम विशेषता है कि हरेक शून्य (0) से 3 इकाई दूरी पर स्थित है ।

इसलिए हमने देखा, +3 और –3 हरेक संख्या 3 से जुड़ी है । 3 को +3 और –3 हरेक का परममान माना जाता है। संकेत में-

-3 के परममान को |–3| के रूप में लिखा जाता है एवं |–3|=3

इसी तरह +3 के परम मान को |+3| के रूप में लिखा जाता है ।

|+3|=3, |+2|=2, |-2|=2, |-15|=15, |+15|=15

> **क्या जानते हो ?**
> - परममान का मतलव है परिमाण सूचकमान।
> - 0 का परममान है 0 ।
>
> क्योंकि हम पहले जानते हैं 0 = 0
> इसलिए |0| = |-0| = 0

–12, +6, –1394 और +1579 का परम मान निर्णय करो ।

8.8 संख्यारेखा का प्रयोग न करते हुए पूर्णांकों की योग और घटाव प्रक्रिया का संपादन।

(क) पूर्णाकों का योग

हमने संख्या रेखा की सहायता से पूर्णाकों का योग और वियोग कार्य संपादन किया है। अब संख्या रेखा के बिना पूर्णांकों का योग और वियोग कार्य करेंगे।

संख्या के विश्लेषण की सहायता से योग प्रक्रिया

इस प्रक्रिया के लिए पहले हम एक संख्या की विश्लेषण प्रक्रिया से परिचित होंगे। एक संख्या को विश्लेषण करने का मतलव है इसे दो या ज्यादा संख्याओं के योगफल के रूप में व्यक्त करना।

जैसे कि +5 = (+4) + (+1), वैसे ही हम पाएँगे +5 = (+3) + (+2)
= (+2) + (+3)
= (+1) + (+4)

यह है +5 का विविध विश्लेषण यानी +5 को जितने प्रकार दो धनात्मक संख्याओं के समूह के रूप में लिखना संभव है, वह यहाँ किया गया है।

+8 को विविध प्रकार से दो धनात्मक राशि के समूह के रूप में लिखो ।

हम जान पाएँगे कि 1 रुपए की हानि तथा और 1 रुपए की हानि होने पर कुल हानि होगी 2 रुपया ।

दूसरे शब्दों में : (–1) + (–1) = – 2

2 रुपए की हानि के साथ और 1 रुपए की हानि होने से कुल हानि 3 रुपए की होगी अर्थात्, (–2) +(–1) = –3

इससे हमने जाना कि-

-3 = (-2) + (-1)
= (-1) + (-2)

वैसे ही -5 = (-4) + (-1)
= (-3) + (-2)
= (-2) + (-3)
= (-1) + (-4)

यह हुआ -5 कार विश्लेषण ।

अब हम पूर्णांकों के विश्लेषण के जरिए योग कार्य करेंगे ।

उदाहरण - 1 (-3) + (+5) = ?

(-3) + (+5) = (-3) + (+3) +(+2) [+5 के (+3) + (+2) रूप में लिया गयाहै]

= 0 + (+2) [विपरीत संख्या (-3) और (+3) का योगफल 0 होने की बजह से]

= +2 [अभेद नियम के अनुसार 0+(+2)=+2]

अवश्य ऐसा भी लिखा जा पाता (-3) + (+5) = (+5) +(-3)

= 5 - 3 = 2

क्या जानते हो ?

एक धनात्मक और एक ऋणात्मक संख्या का योग करते समय किस संख्या का विश्लेषण किया जाएगा ? यह जानने के लिए दोनों संख्याओं का परममान निर्णय किया जाएगा। जिस संख्या का परममान ज्यादा है उसी का विश्लेषण किया जाएगा।

उदाहरण -2 (-8) + (+6)=?

(-8) + (+6) = (-2) + (-6) + (+6)
= (-2) + { (-6) +(+6)}
= (-2) + 0
= -2

ध्यान दो : उदाहरण (1) में +5 का विश्लेषण किया गया था, परंतु प्रश्न (2) में – 8 का विश्लेषण किया गया ।

(ख) संख्या के विश्लेषण के जरिए घटाव प्रक्रिया

एक संख्या का घटाव करने का मतलब इसके योज्य प्रतिलोमी (विलोमी) या इसकी विपरीत संख्या का योग करना ।

अर्थात्

(i) $+5 - (-3) = +5 + (+3)$

(ii) $-3 - (+5) = -3 + (-5)$

इसी तरह हरेक घटाव-प्रक्रिया को एक योग प्रक्रिया में बदला जा पाएगा । घटाव प्रक्रिया को योग प्रक्रिया में बदला जाने के बाद योग विधि में कार्य संपादन करना होगा ।

(iii) $(-5)-(+3) = (-5)+(-3)$
$= (-5)+(-1)+(-2)$
$= (-6)+(-1)+(-1)$
$= (-7)+(-1)$
$= -8$

(iv) $(-3)-(-5) = (-3)+(+5)$
$= (-3)+(+3)+(+2)$
$= 0+(+2)$
$= +2$

क्या जानते हो ?

- +3 का योज्य प्रतिलोम है -3।
- -5 का योज्य प्रतिलोम है +5।
- किसी पूर्णांक और उसके योज्य प्रतिलोम का समूह 0।

अभ्यास कार्य 8.3

1. निम्न प्रश्नों के उत्तर दो -

(क) (+5) एक पूर्णांक है, (– 6) एक पूर्णांक।

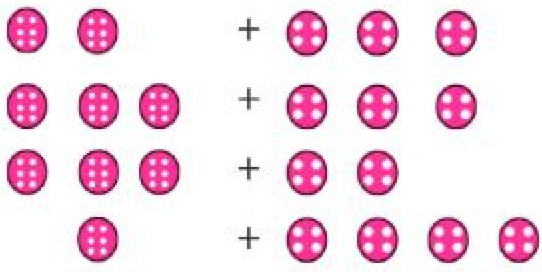
(+5) + (-6) = (-1) यहाँ दो पूर्णांको का योगफल एक पूर्णांक हुआ । इससे योग प्रक्रिया किस नियम का पालन करने का पता चला ?

(ख) पूर्णांकों के योग प्रक्रिया अभेद नियम पालन करती है- एक उदाहरण देकर समझाओ ।

(ग) एक धनात्मक पूर्णांक लो । इसका योज्य प्रतिलोम निर्णय करो । तुम से ली गई धनात्मक संख्या और उसके योज्य प्रतिलोम का समूह कितना है, निर्णय करो ।

2. यह (+1) को सूचित करता है, वैसे ही यह (-1) को सूचित करता है,

तब निम्न योगफलों का निर्णय करो ।



= ______ + ______ = ______

= ______ + ______ = ______

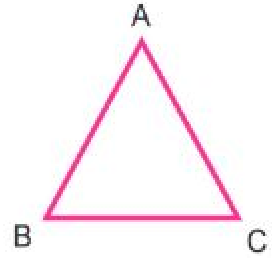
= ______ + ______ = ______

= ______ + ______ = ______

समतल पर ज्यामितीय आकृतियाँ

9.1. त्रिभुज

9.1.1. हमने जो सिखा है



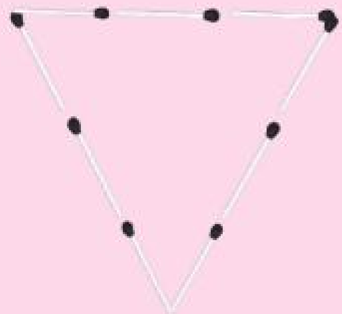
A, B, C एक रेखार पर स्थित न होने वाले तीन बिंदु है ।
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{CA}$ रेखाखंडों से बना एक त्रिभुज है ।
हरेक त्रिभुज की तीन बाहेंया भुजाएँ, तीन शीर्षबिंदु और तीन कोण होते हैं।

हम भी विविध त्रिभुजों के बारे में जानते हैं। भुजा की लंबाई के अनुसार त्रिभुजों को तीन भागों में बाँटा गया है । वे हैं (क) समबाहु त्रिभुज (ख) समद्विबाहु त्रिभुज (ग) विषम बाहु त्रिभुज

वैसे ही कोण के परिमाप के अनुसार त्रिभुजों को तीन भागों में बाँटा गया है । वे हैं- (क) समकोण त्रिभुज (ख) न्युनकोण त्रिभुज और (ग) अधिककोण त्रिभुज

खुद करके देखो

- कई दियासलाई तिलियाँ लो । तिलियों का व्यवहार करते हुए त्रिभुज आकृति बनाने का प्रयास करो ।
- तुम अलग-अलग बार निम्न संख्यक तिलियाँ लो ।



तीन तिलियाँ

चार तिलियाँ

पाँच तिलियाँ

छह तिलियाँ

(याद रखो, हर बार ली गई सभी तिलियों का व्यवहार किया जाएगा)

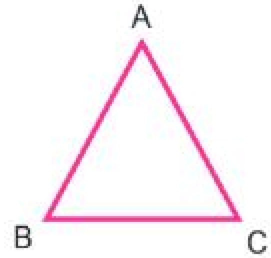
- हरेक बार बनाये त्रिभुजों का नामकरण करो । अगर तुम त्रिभुज बना नहीं पाते हो, उसका कारण सोचो ।

पार्श्वस्थ चित्र को लक्ष्य करो, $\overline{AB}$, और $\overline{BC}$ का उभयनिक बिंदु 'B' है । 'B' बिंदु त्रिभुज का एक शीर्ष बिंदु है ।

बिंदु पर स्थित कोण ∠ABC को ∠B भी कहते हैं।

यहाँ ∠B की सम्मुख भुजा $\overline{AC}$ है ।

$\overline{AC}$ की लंबाई को '*b*' कहा जाता है ।



निम्न प्रश्नों के उत्तर दो ।

(क) ∠A की समुख भुजा कौन है ?

(ख) किस भुजा की लंबाई को '*a*' के रूप में नामित किया जाता है ?

(ग) $\overline{BC}$ की लंबाई को कैसे नामित किया जाएगा ?

(घ) $\overline{AB}$ और $\overline{AC}$ के छेद से बने शीर्ष का नाम क्या है ?

$\overline{BA}$ और $\overline{CA}$ भुजा द्वय का अन्तर्गत कोण है ∠BAC।

वैसे $\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ का अन्तर्गत कोण है ∠ABC।

$\overline{BC}$ और $\overline{AC}$ के अन्तर्गत कोण का नाम बताओ ?

याद रखो !

$\overline{BC}$ के संलग्न कोण द्वय ∠ABC और ∠ACB।

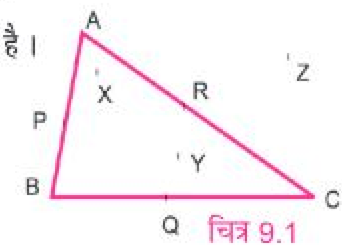
$\overline{AC}$ के संलग्न कोण द्वय ∠BAC और ∠ACB।

$\overline{AB}$ के संलग्न कोण द्वय ∠ABC और ∠BAC।

9.1.2. त्रिभुज का अन्त:भाग और बहि:भाग ।

संलग्न ABC त्रिभुज को देखो और नीचे दिये गए खाली स्थान भरो ।

- ΔABC ________, ________ और ________ रेखाखंड त्रय का समाहार है ।
- P बिंदु ________ भुजा पर स्थित है ।
- Q बिंदु ________ भुजा पर स्थित है ।
- R बिंदु ________ भुजा पर स्थित एक बिंद है ।
- A,B,C बिंदुओं के अलावा चित्र में ________, ________ और ________ तीन बिंदु हैं।

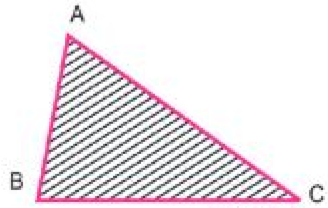


चित्र 9.1

चित्र 9.1. में हमने देखा कि X, Y और Z बिंदु त्रय त्रिभुज पर (यानी त्रिभुज की किसी भुजा पर) स्थित नहीं है । तो वे कहाँ पर स्थित हैं ?

जरूर तुमने सोचा होगा कि, X और Y बिंदु त्रिभुज ABC के अन्दर स्थित हैं। X और Y की भाँति अनेक बिंदु हैं जो त्रिभुज ABC के अन्दर स्थित हैं। उन सारे बिंदुओं को लेकर बने क्षेत्र को त्रिभुज ABC का **अन्त:भाग** कहा जाता है ।

चित्र 9.2. में चित्रित क्षेत्र त्रिभुज ABC का अन्त:भाग है ।
यह स्पष्ट है कि चित्र 9.1 में Z बिंदु ABC त्रिभुज के अन्त:भाग में नहीं है या त्रिभुज पर नहीं है । यह त्रिभुज के **बहि:भाग** में स्थित है ।



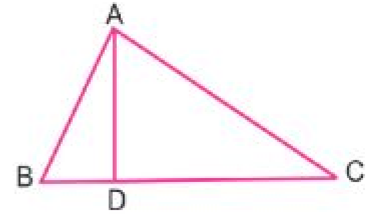
चित्र 9.2

त्रिभुज ABC और इसके अन्त:भाग को छोड़कर अन्य सारे हिस्से को त्रिभुज ABC का बहि:भाग कहा जाता है ।

अभ्यास कार्य 9.1

1. Δ ABC का चित्र अंकन करो । इस त्रिभुज के अन्त:भाग में P बिंदु है और इसके बहि:भाग में Q बिंदु चिह्नित करो । क्या A बिंदु Δ ABC अन्त:भाग या बहि:भाग में स्थित है ?

2. (क) पार्श्वस्थ चित्र में स्थित तीन त्रिभुजों के नाम लिखो ।
   (ख) इस चित्र में स्थित सात कोणों के नाम लिखो ।
   (ग) छह रेखाखंडों के नाम लिखो ।
   (घ) किन दो त्रिभुजों में $\angle B$ एक उभयनिष्ठ कोण है ?

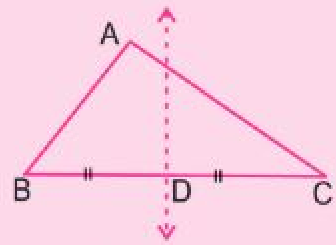


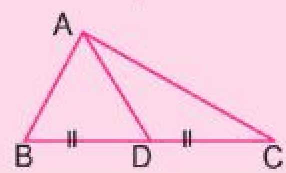
9.1.3. त्रिभुज की मध्यमा

कागज को मोड़कर दिए गए रेखाखंड का समद्विखंड लंब पाने के तरीका हम जानते हैं।

खुद करके देखो

- एक कागज को Δ ABC आकार में काट लो ।
- कागज को मोड़कर $\overline{BC}$ बाहु का समद्विखंड लंब चिह्नित करो ।
- मोड़े गये कागज की मोड़, $\overline{BC}$ बाहु को जिस बिंदु पर छेद करता है, उसका नाम 'D' दो ।
- अब 'A' बिंदु और D बिंदु को जोड़ने से हम $\overline{AD}$ पाएँगे । इस $\overline{AD}$ को त्रिभुज की मध्यमा कहा जाता है ।





Δ ABC में भुजा $\overline{BC}$ का मध्यबिंदु D है । $\overline{BC}$ का सम्मुख शीर्ष A है । रेखाखंड $\overline{AD}$ को त्रिभुज की एक मध्यमा कहा जाता है । उसी तरह, $\overline{AC}$ भुजा का मध्यबिंदु E है और शीर्ष B को जोड़नेवाला रेखाखंड $\overline{BE}$ त्रिभुज ABC की एक दूसरी मध्यमा है।

त्रिभुज के एक शीर्ष बिंदु को उसकी विपरीत भुजा के मध्यबिंदु के साथ जोड़नेवाले रेखाखंड को त्रिभुज की एक मध्यमा कहते हैं।

एक त्रिभुज के हरेक शीर्ष से होकर सिर्फ एक मध्यमा का अंकन संभव है ।

क्या जानते हो ?

- एक त्रिभुज की सर्वाधिक तीन मध्यमाएँ हैं।
- एक मध्यमा के दो प्रांत बिंदुओं को छोड़कर दूसरे सारे बिंदु त्रिभुज के अन्त:भाग में स्थित हैं।

अभ्यास कार्य 9.2

1. क्या एक त्रिभुज की मध्यमा पूर्णत: त्रिभुज के अन्त:भाग में रहती है ? अपने उत्तर की सार्थकता दर्शाओ ।

2. एक चित्र अंकन करते हुए दर्शाओ ।

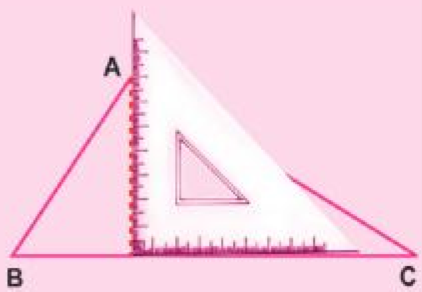
(क) Δ ABC अंकन करो । जैसे कि AB = AC (कोई भी माप लो)। $\overline{AD}$ मध्यमा अंकन करो । चाँद की मदद से $\angle$ADB का परिमाण निर्णय करो ।

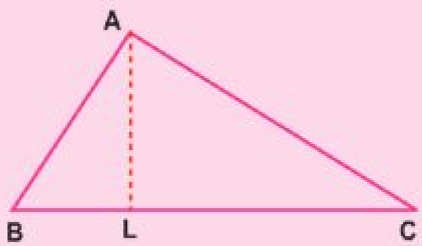
(ख) AB = AC लेकर दूसरा एक त्रिभुज अंकन करो । $\overline{BE}$ और $\overline{CF}$ मध्यमा अंकन करो । अंकित मध्यमा द्वय की लंबाई की माप में क्या लक्ष्य करते हो ?

9.1.4. त्रिभुज की ऊँचाई

खुद करके देखो

- कार्डवार्ड में एक ΔABC बनाओ ।
- उसे एक टेबल पर लंब के तौर पर पकड़े रखो । जैसे $\overline{BC}$ का किनारा टेबल से लगा रहेगा ।
- त्रिभुज का शीर्षबिंदु टेबल के ऊपरी भाग से कितनी ऊँचाई पर है, एक स्केल से माप कर बताओ ।
- शीर्षबिंदु A से आधा $\overline{BC}$ की सबसे कम दूरी या लंब दूरी को त्रिभुज की ऊँचाई कहा जाता है ।
- एक सेट्स्कोयार की मदद से यह लंब अंकन करो और लंब की लंबाई मापो । यह लंबाई त्रिभुज के A शीर्ष से $\overline{BC}$ आधार के प्रति ऊँचाई है $\overline{AL}$ की लंबाई त्रिभुज की एक ऊँचाई है ।

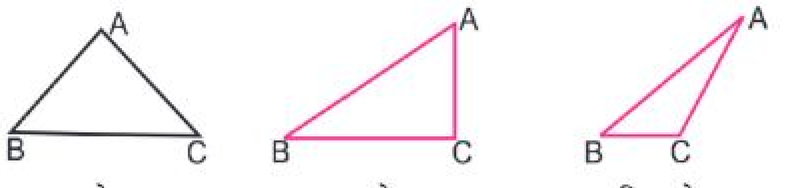




किसी त्रिभुज के एक शीर्षबिंदु से इसकी विपरीत भुजा के प्रति लंब के रूप में अंकित रेखाखंड की लंबाई को उस भुजा के प्रति ऊँचाई कहा जाता है । और इसी रेखाखंड को पूर्वोक्त भुजा के प्रति लंब कहा जाता है । हरेक शीर्ष बिंदु से इसकी विपरीत भुजा के प्रति निर्दिष्ट ऊँचाई होती है ।

अभ्यास कार्य 9.3

1. एक त्रिभुज की कितनी ऊँचाई होती है ?
2. (क) दूसरे पन्ने में स्थित चित्र 9.3 में दिए जाने की तरह तीन त्रिभुज अंकन करो और सेट्स्कोयार के प्रयोग से इन चित्रों में A बिंदु से $\overline{BC}$ के प्रति लंब अंकन करो एवं उसका नाम दो $\overline{AD}$ ।



(ख) समकोण Δ ABC में D बिंदु की स्थिति कहाँ होना देखते हो ?

(ग) क्या अधिक कोणी में A बिंदु से विपरीत भुजा $\overline{BC}$ के प्रति लंब अंकन संभव हुआ ?

(सूचना : $\overleftrightarrow{BC}$ रेखा अंकन करो और उस पर $\overline{AD}$ लंब अंकन करो)

3. प्रश्न नं. 2 में अंकन किए हुए चित्र को देखकर उत्तर दो ।

(क) किस प्रकार त्रिभुज में शीर्षबिंदु A से $\overline{BC}$ के प्रति अंकित लंब के प्रांतबिंदु द्वय के अलावा बचा हुआ अंश $\angle$ABC का अन्त:भाग में रहा ?

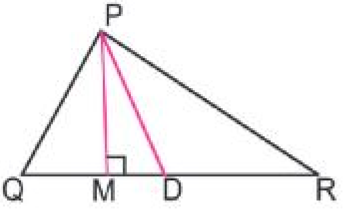
(ख) किस प्रकार के त्रिभुज में शीर्षबिंदु A से $\overline{BC}$ के प्रति अंकित लंब के प्रांतबिंदु A के अलाव बचा हुआ अंश Δ ABC के बहिर्भाग में रहा ?

(ग) किस प्रकार के त्रिभुज में शीर्षबिंदु A से $\overline{BC}$ प्रति अंकित लंब Δ ABC की एक भुजा से पूर्ण रूप से मिल गया ?

4. किस प्रकार के त्रिभुज के दो शीर्षबिंदुओं से विपरीत् भुजा के प्रति अंकित ऊँचाई, उसी त्रिभुज की दोनों भुजाओं की लंबाई के बराबर है ?

5. किस प्रकार के त्रिभुज में एक शीर्षबिंदु से इसकी विपरीत भुजा के प्रति अंकित लंब और मध्यमा अभिन्न है ?

6. Δ PQR में 'D' $\overleftrightarrow{QR}$ का मध्यबिंदु है ।
$\angle$PQR का परिमाण 90° होने पर,



(क) $\overline{PM}$, त्रिभुज के ______ शीर्षबिंदु से ______ भुजा के प्रति ______

(ख) $\overline{PD}$, त्रिभुज के ______ शीर्षबिंदु से ______ भुजा के प्रति ______ ।

(ग) क्या $\overline{QM}$ और $\overline{MR}$ की माप बराबर है ?

7. नीचे दी गई परिस्थितियों को दर्शात हुए एक-एक चित्र अंकन करो ।

(क) Δ ABC की, $\overline{BE}$ मध्यमा ।

(ख) Δ PQR में, शीर्षबिंदु P से $\overline{QR}$ के प्रति लंब $\overline{PM}$ और शीर्षबिंदु Q से $\overline{PR}$ के प्रति लंब $\overline{QN}$ है।

(ग) ΔABC में शीर्षबिंदु Y से विपरीत भुजा के प्रति अंकित लंब Y के बिंदु के अलावा बचा अंश त्रिभुज के बहिर्भाग में स्थित है ।

(घ) ΔPQR में शीर्षबिंदु P से इसकी विपरीत भुजा के प्रति लंब $\overline{PM}$ एवं शिर्षबिंदु R से इसकी विपरीत भुजा के प्रति लंब $\overline{RN}$ एवं $\overline{PM} = \overline{RN}$

तुम्हारे लिए कुछ कार्य :

कागज से विविध प्रकार त्रिभुजों की आकृति (समबाहु त्रिभुज), समद्विबाहु त्रिभुज, बिषमबाहु त्रिभुज) अंकन करो और उनके हरेक शीर्षबिंदु से विपरीत भुजा के प्रति लंब और मध्यमा दर्शाओ । ऊँचाई और मध्यमा की लंबाई निर्णय करो । उसमें स्थित विशेषता के बारे में तुम अपने दोस्तों से चर्चा करो ।

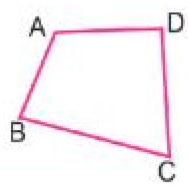
9.2. चतुर्भुज

9.2.1. हमने जो सीखा है ।

हम विविध प्रकार के ज्यामितीय चित्रों के बारे में जान चुके हैं। इससे पहले हमने त्रिभुज के बारे में चर्चा की है । एक त्रिभुज तीन रेखाखंडों से गठित चित्र है । परंतु यहाँ हम चार रेखाखंडों से गठित एक चित्र के बारे में जानेंगे ।

अपनी कॉपी में चार बिंदु A, B, C और D ऐसे लो जैसे कि इनमें से कोई तीन एक रेखा में न होंगे । अब $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ रेखाखंड अंकन करो। तुमने एक चित्र पाया ।

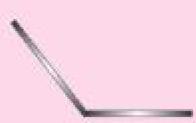
पार्श्वस्थ चित्र देखो । यह चार रेखाखंडों से बना एक चित्र है ।



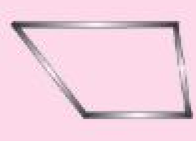
इस नए प्रकार के चित्र का नाम **चतुर्भुज** है ।

खुद करके देखो

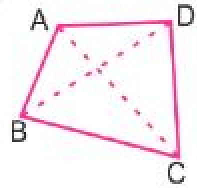
- दो सीकें लो । उन दोनों के एक-एक सिरो को जोड़कर रखो और दूसरे दो सिरो को एक दूसरे से अलग रखो, जैसे कि सीकें एक सरल रेखा में नही रहेंगी।



- दूसरी दो सीकें लेकर उन दोनों के एक-एक सिरो को पहले रखी गई दो सीकों के आसपास जन होनेवाले सिरों से लगाए रखो ।
- अब दोनों सीकों के अन्य दो सिरों को जोड़ दो । आसपास (यानी सिरे से सिरा लगा हुआ) दो सीकों जैसे एक सरल रेखा में न रहें, इसके प्रति ध्यान देना जरूरी है ।

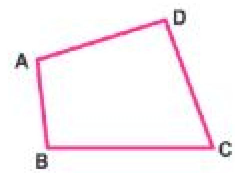


पिछले कार्य से उत्पन्न चित्र तीलियों से बना है । प्रत्येक तीली एक रेखाखंण्ड की स्थूल अवस्था है । यह आकृति एक चतुर्भुज को दर्शाती है । हरेक तीली इस चतुर्भुज की एक - एक भुजा को सूचित करती है ।



इसी चतुर्भुज के चार शीर्ष बिंदु, चार भुजाएँ और चार कोण रहे हैं। दो विपरीत शीर्ष बिंदुओं को जोड़नेवाली रेखाखण्ड कों चतुर्भूज का **विकर्ण** कहा जाता है । पार्श्वस्थ चित्र वाले ABCD चतुर्भुज में $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ एक - एक विकर्ण है ।

ऊपर वाली चर्चा से हमने जाना कि एक समतल (कागज का पन्ना या श्यामपट्ट) पर चार बिंदु A,B,C,D होने से और उन चार बिंदुओं में से कोई तीन एक सरल रेखा में न होने पर $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ और $\overline{DA}$ द्वारा गठित चित्र को एक चतुर्भुज कहते हैं ।



किसी चतुर्भुज की चार भुजाएँ, चार शीर्ष बिंदु और चार कोण होते हैं। पार्श्वस्थ चित्र वाले चतुर्भुज का नाम क्या है ?

- एक चतुर्भुज की जिन दो भुजाओं का एक उभयनिष्ठ अंत बिंदु होता है, उन दो भुजाओं को **आसन्न भुजाएँ** कहा जाता है । $\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ जोड़ी आसन्न भुजाएँ हैं। हरेक चतुर्भुज की चार जोड़ी आसन्न भुजाएँ होती है ।

ऊपरवाले चित्र की चार जोड़ी आसन्न भुजाओं के नाम लिखो ।

- जिन दो भुजाओं का एक उभयनिष्ठ अंत बिंदु नहीं होता, अत: दो भुजाओं को **विपरित भुजाएँ** कहा जाता है । $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ एक जोड़ी विपरित भुजाएँ हैं। हरेक चतुर्भुज की दो जोड़ी विपरित भुजाएँ होती हैं ।

उपरिस्थ चित्र वाली दो जोड़ी विपरित भुजाओं के नाम लिखो ।

- किसी भी चतुर्भुज की एक भुजा को दो अंत बिंदुओं को उस चतुर्भुज के एक जोड़ा **क्रमिक शीर्षबिंदु** कहा जाता है । जो दो शीर्षबिंदु क्रमिक नहीं होते, उन दोनों को **विपरित शीर्षबिंदु** कहा जाता है । A और B एक जोड़ा क्रमिक शीर्षबिंदु हैं, A और C एक जोड़ा विपरित शिर्षबिंदु हैं ।

दूसरे कौन से जोड़े शीर्षबिंदु क्रमिक हैं और कौन से जोड़े शीर्षबिंदु विपरित है, उन्हें चित्र से चुनकर लिखो ।

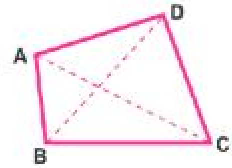
- क्रमिक शीर्षबिंदु में स्थित दो कोणों को **क्रमिक कोण** एवं विपरित शीर्षबिंदु वाले दो कोणों को **विपरित कोण** कहते हैं।

ऊपरवाले चित्र के चतुर्भुज के क्रमिक कोणों और विपरित कोणों के नाम लिखो ।

अभ्यास कार्य 9.4

1. एक चतुर्भुज का चित्र अंकन करते हुए उसका नाम PQRS दो । उसकी सारी भुजाओं, कोणों, शीर्षबिंदुओं और विकर्णों के नाम लिखो।

2. पार्श्वस्थ चित्र देखके निम्न प्रश्नों के उत्तर दो ।



(क) ∠B का विपरीत कोण _______ और ∠A का विपरीत कोण _______ ।

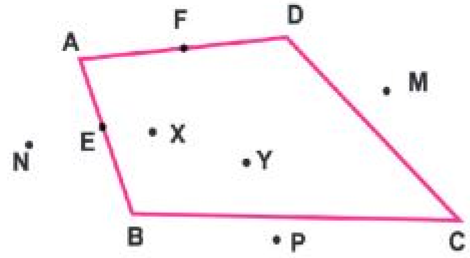
(ख) $\overline{DA}$ भुजा के दो आसन्न कोण हैं _______ और _______ ।

(ग) चतुर्भुज में एक भुजा के _______ आसन्न कोण होते हैं।

(घ) B शीर्षबिंदु का विपरीत शीर्षबिंदु है _______ ।

(ङ) _______ विकर्ण की लंबाई, _______ विकर्ण की लंबाई से ज्यादा है ।

9.2.2. चतुर्भुज का आंतरिक और बाह्य क्षेत्र



बगलवाले चित्र को देखो और निम्न प्रश्नों के उत्तर दो ।

(क) कौन-कौन से बिंदु चतुर्भुज के उपरिस्थ बिंदु हैं ?

(ख) कौन-कौन से बिंदु चतुर्भुज के आंतरकि बिंदु हैं ?

(ग) कौन कौन बिंदु चतुर्भुज के बाह्य बिंदु हैं ?

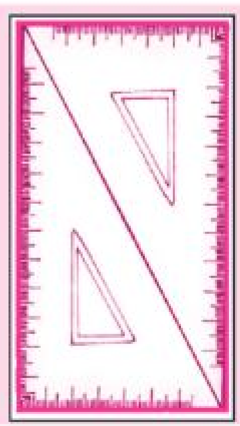
ABCD चतुर्भुज में X,Y बिंदुओं की भाँति अनगिनत आंतरिक बिंदु हैं। उन सारे बिंदुओं के समहार से बने क्षेत्र को ABCD चतुर्भुज का आन्तरिक क्षेत्र कहा जाता है । एक चतुर्भुज के सारे आंतरिक बिंदुओं के समाहार से बने क्षेत्र को चतुर्भुज का **आंतरिक क्षेत्र** कहा जाता है ।

कागज के पन्ने (समतल) का जो क्षेत्र ABCD चतुर्भुज के बाहर होता है, उसे ABCD चतुर्भुज का बाह्य भाग (क्षेत्र) कहा जाता है। चतुर्भुज की चार भुजाएँ उसके आंतरिक क्षेत्र के अलावा चतुर्भुज को धारण करनेवाले समतल के बाकी क्षेत्र को चतुर्भुज का **बाह्य** कहा जाता है । इसलिए आंतरिक क्षेत्र सीमित है परंतु **बाह्य क्षेत्र** असीम है ।

क्या जानते हो ?
किसी चतुर्भुज और उसके आन्तरिक भाग को मिला लेने से एक चतुर्भुज का क्षेत्र बनता है ।

9.2.3 कई खास प्रकार के चतुर्भुज

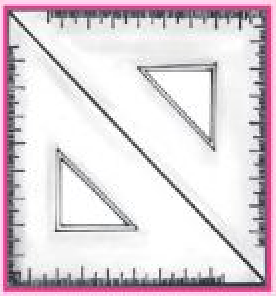
खुद करके देखो



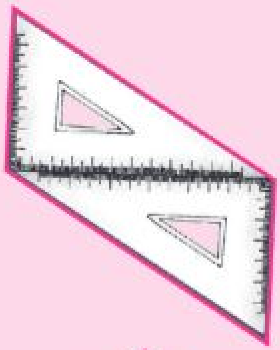
- तुम्हारे ज्यामिति बक्से में दो सेटस्कोयार हैं। एक को 60°-30° सेटस्क्वोयार और दूसरो को 45°-45° सेटस्क्वोयार कहा जाता है ।
- तुम अपने और अपने दोस्त के 30° सेटस्क्वोयारों को चित्र में दर्शाए जाने की भाँति जोड़कर रखो ।
- अब बताओ कि बने चतुर्भुज के हरेक कोण का परिमाण कितना है तथा चतुर्भुज की विपरीत भुजाओं के बीच किस तरह का संबन्ध है ?

इस प्रकार के चित्र को आयत चित्र कहा जाता है । इससे हमने सीखा कि जिस चतुर्भुज के हरेक कोण का परिमाण 90° है, उसे आयत चित्र कहा जाता है ।

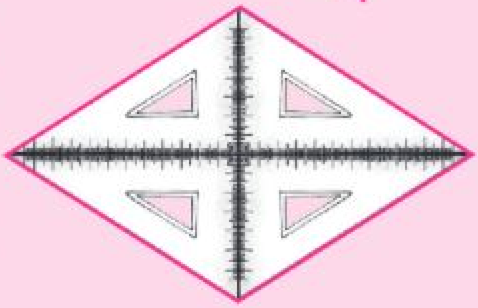
खुद करके देखो



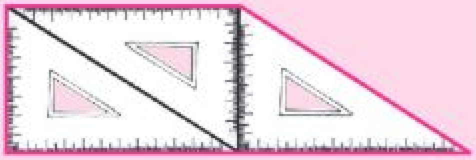
- 45°-45° सेटस्क्वोयार द्वय को चित्र में दर्शाए जाने की भाँति जोड़ कर रखने से हम इस प्रकार का चतुर्भुज पाएँगे । इस आकृति को देखने से पाएंगे कि, इस प्रकार के चतुर्भुज के हरेक कोण का परिमाण 90° है और सारी भुजाओं की लंबाई बराबर है। इस प्रकार के चतुर्भुज को **वर्गचित्र** कहा जाता है ।



- अब तुम दो 60°-30° सेटस्क्वोयारों को चित्र में दर्शाए जाने की भाँति मिलाए रखो । इसबार तुम एक और प्रकार का चतुर्भुज पाओगे । ध्यान दो, चित्र वाले इस चतुर्भुज की विपरीत भुजाएँ आपस में समांतर और बराबर हैं। इस प्रकार के चतुर्भुज को **समांतर चतुर्भुज** कहा जाता है ।



- चार 60°-30° सेटस्क्वोयारों को चित्र में दर्शाए जाने की भाँति मिलाकर रखने से वह एक अलग प्रकार के चतुर्भुज की आकृति का निर्माण करेगा। इस चित्र में स्थित चतुर्भुज की विपरित भुजाएँ परस्पर समांतर हैं और सारी भुजाओं की लंबाई बराबर है। इस चतुर्भुज को **रंबस** (सम चतुर्भुज) कहा जाता हैं।



- तीन 60°-30° सेटस्क्वोयारों को चित्र में दर्शाए जाने की भाँति मिलाए रखो । यह एक प्रकार के चतुर्भुज की आकृति बनाएगा । उस चतुर्भुज को **ट्रापिजियम्** (समलंब चतुर्भुज) कहा जाता है । उसकी भुजाओं की केवल एक युग्म विपरीत भुजाएँ समांतर हैं।

9.2.4 विविध प्रकार के चतुर्भुजों के कोणों के परिमाणों के बीच संबध

हरेक प्रकार के चतुर्भुज के जो चित्र पहले दिए गए हैं उनमें से कोणों के परिमाण तुम प्रोट्राक्टर की मदद से मापो । सारणी के खाली घरों में सही या गलत लिखो ।

चतुर्भुज का नाम	विपरीत कोणों का परिमाण	चारों कोणों का परिमाण बराबर
आयत		
वर्ग		
समांतर		
रंबस		
ट्रापिजियम्		

तुमने जरूर देखा होगा कि आयत और वर्ग दोनों स्थितियों में, सारे कोणों का परिमाण बराबर है तथा हरेक कोणों 90° है । आयत, वर्ग, समांतर और रंबस की स्थितियों में विपरीत कोणों का परिमाण बराबर है ।

अभ्यास कार्य 9.5

1. नीचे दी गई सारणी को भरो जैसे कि समांतर चतुर्भुज के बारे में हाँ या नहीं भरा गया है ।

चतुर्भुज	विपरीत भुजाएँ		सारी भुजाएँ	विपरीत कोण	विकर्ण द्वय	
	समांतर	बराबर लंबाईवाली	बराबर लंबाईवाली	बराबरा परिमाणवाले	बराबर लंबाईवाले	परस्पर प्रति लंब
समांतर	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं
आयत						
वर्ग						
रंबस (सम चतुर्भुज)						
ट्रापिजियम् (समलंब चतुर्भुज)						

2. हरेक उक्ति के नीचे वाले कोष्ठक में से सही तथ्य चुनकर खाली स्थान भरो ।

(क) एक समांतर चित्र के —— बराबर होने से चित्र रंबस होता है ।

[कोणों का परिमाण, सारी भुजाओं की लंबाई, दोनों विकर्णों की लंबाई]

(ख) एक —— के कोण बराबर होने पर, चित्र आयत होगा ।
(वर्ग चित्र, समांतर चित्र, रंबस)

(ग) एक आयत चित्र के —— बराबर होने पर चित्र वर्ग चित्र होगा ।
(सारी भुजाओं की लंबाई, सारे कोणों का परिमाण)

(घ) किसी चतुर्भुज की एक युग्म विपरीत भुजाएँ समांतर होने पर चित्र —— होगा ।
(रंबस, वर्ग चित्र, ट्रापिजियम्)

(ङ) किसी चतुर्भुज की विपरीत भुजाओं के दो युग्म समांतर होने पर चित्र —— होगा ।
(वर्ग चित्र, आयत चित्र, समांतर चित्र)

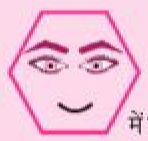
(च) ABCD चतुर्भुज के $\overline{AB}$ समांतर $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ समांतर $\overline{BC}$ और $\angle ABC$ का परिमाण 90° होने पर, चतुर्भुज एक _________ होगा ।
(रंबस, आयत चित्र, वर्ग चित्र)

3. नीचेवाली उक्तियों में से सही उक्ति के अंत में सही चिह्न (√) और गलत उक्ति के अंत में गलत चिह्न (×) लगाओ ।

(क) आयत का हरेक कोण एक समकोण है ।
(ख) आयत की विपरीत भुजाओं की लंबाई बराबर है ।
(ग) एक वर्ग के दोनों विकर्ण परस्पर के प्रतिलंब हैं।
(घ) एक रंबस की सारी भुजाओं की लंबाई बराबर है ।
(ङ) एक समांतर चित्र की सारी भुजाओं की लंबाई बराबर है ।
(च) एक ट्रापिजियम् की विपरीत भुजाएँ समांतर हैं।

बताओ तो :
क्या वर्ग को एक विशेष प्रकार का आयत कहा जाएगा ? कारण क्या है बताओ ।

4. एक चतुर्भुज की सारी भुजाएँ बराबर लंबाई वाली और सारे कोण बराबर परिमाण वाले होने पर उसे सुषम चतुर्भुज कहा जाता है । सुषम चतुर्भुज कौन है, लिखो ।



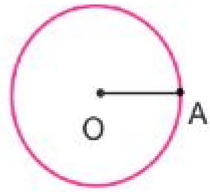
9.3. वृत्त

पिछली कक्षा में खुले हाथों से एवं परकार की मदद से कैसे वृत्त अंकन किया जाता है, वह तुम लोग जान चुके हो। इसी पाठ में हम लोग वृत्त के बारे में कई खास तथ्य जानेंगे ।

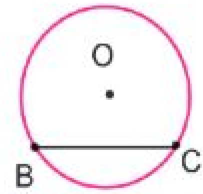
9.3.1 वृत्त और वृत्त से जुड़े कई शब्द

तुम अपनी कॉपी के एक पन्ने पर एक बिंदु लो । उसी बिंदु पर परकार (कंपास) के नुकीले भाग को रखकर एक वृत्त अंकन करो । बिंदु का नाम 'O' दो । उसी 'O' बिंदु को अंकित वृत्त का **केंद्र** कहा जाता है । वृत्त के उपर और एक बिंदु 'A' लो ।

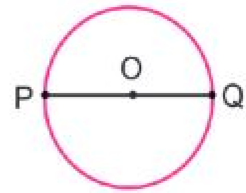
स्केल की सहायता से $\overline{OA}$ अंकन करो । $\overline{OA}$ को वृत्त को एक **त्रिज्या** कहा जाता है । **वृत्त के केन्द्र और वृत्त के ऊपर किसी भी बिंदु को जोड़ने वाले रेखाखण्ड की लंबाई को वृत्त की त्रिज्या कहा जाता है।** वृत्त की त्रिज्या एक लंबाई माप को दर्शाती है ।



वृत्त के ऊपर दो बिंदु B और C लो । $\overline{BC}$ रेखाखण्ड अंकन करो। अब $\overline{BC}$ को वृत्त का एक **जीवा** कहा जाता है ।



वृत्त उपरिस्थ दो बिंदु P और R ऐसे लो जैसे कि $\overline{PQ}$ जीवा वृत्त के केन्द्र 'O' से गुजर कर जाएगी । $\overline{PQ}$ को वृत्त का एक **व्यास** कहा जाता है । **यानी केन्द्र बिंदुगामी जीवा को वृत्त का एक व्यास कहा जाता है** । चित्र में यही व्यास वृत्त की वृहत्तम जीवा है । वृत्त के किसी भी व्यास लंबाई को उस वृत्त का व्यास कहा जाता है । इसलिए वृत्त का व्यास एक लंबाई माप को दर्शाता है ।



खुद करके देखो ।

- 3 से.मी., 4 से.मी. और 5 से.मी. परिमाण त्रिज्यिवाले तीन अलग-अलग वृत्त अंकन करो (परकार की मदद से) । उन्हें पहले, दूसरे और तीसरे वृत्त के रूप में नामित करो ।
- हरेक वृत्त में एक-एक त्रिज्या और व्यास अंकन करो ।
- हरेक वृत्त में त्रिज्या और व्यास को माप कर उनमें क्या संबध है निर्णय करो।

हमने सीखा, **वृत्त का व्यास = 2 x वृत्त की त्रिज्या**

अगर किसी वृत्त की त्रिज्या 3.5 से.मी. हो,

तो उसका व्यास = 3.5 x 2 = 7 से.मी होगा ।

बताओ तो :
वृत्त का व्यास पता होने पर उसकी त्रिज्या कैसे निकलेगी ?

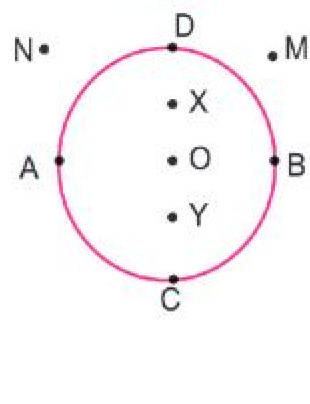
9.3.2. वृत्त का बहिर्भाग और अन्त : भाग

चित्र देखकर उत्तर दो ।

(क) C,D,A और ________ बिंदु वृत्त की परिधि पर स्थित हैं।

(ख) M और ________ वृत के बहि:स्थ बिंदु हैं।

(ग) X,O और ________ वृत्त के अन्तस्थ बिंदु हैं ।

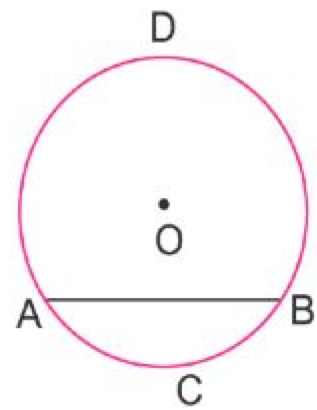


वृत्त के अन्त:स्थ बिंदुओं के समाहर से वृत्त का **अंत:भाग** बनता है । यह वृत्त की परिधि के अंदर का भाग है । यह एक सीमित क्षेत्र है । वृत्त और वृत्त का अन्त: भाग मिलकर वृत्त आकृति का क्षेत्र बनाते हैं। वृत्त के बहि:स्थ बिंदुओं के समाहार से वृत्त का **बहि:र्भाग** बनता है । यह असीम रूम से विस्तृत है ।

याद रखो :
जिस समतल पर वृत्त अकिंत होता है, वही समतल ही वृत्त, वृत्त का अन्त:भाग और वृत्त का बहिर्भाग ऐसे तीन भागों में बंटा होता है ।

9.3.3. वृत्त का चाप

पार्श्वस्थ चित्रवाले वृत्त का $\overline{AB}$ जीवा है । A और B बिंदुओं के अलवा वृत्त परिधि पर 'C' अन्य एक बिंदु लो । वृत्त के ACB हिस्से को वृत्त का एक **चाप** कहा जाता है । इसे $\overset{\frown}{ACB}$ संकेत से व्यक्त किया जाता है । $\overline{AB}$ जीवा के जिस पार्श्व में C बिंदु हैं, उसके विपरीत पार्श्व में वृत्त की परिधि पर और एक बिंदु D लो । $\overset{\frown}{ADB}$ एक दूसरा चाप है । $\overset{\frown}{ACB}$ और $\overset{\frown}{ADB}$ चाप युग्म आपस में विपरीत चाप हैं। चित्र में $\overset{\frown}{ACB}$ एक छोटा चाप है और $\overset{\frown}{ADB}$ एक बड़ा चाप है । $\overset{\frown}{ACB}$ और $\overset{\frown}{ADB}$ दोनों चापों के A और B दो अभयष्ठि **प्रांत बिंदु** हैं। चित्र वाले वृत्त को ACB या CBD या BCD नाम दिया जाता है । यानी वृत्त उपरिस्थ तीन बिंदुओं से वृत्त का नामकरण किया जाता है ।



उत्तर लिखो ।

(क) $\overset{\frown}{DAC}$, $\overset{\frown}{DBC}$ _______ और _______ प्रदत्त वृत का एक-एक चाप है ।

(ख) $\overset{\frown}{DBC}$ चाप के _______ और _______ दो प्रांत बिंदु हैं।

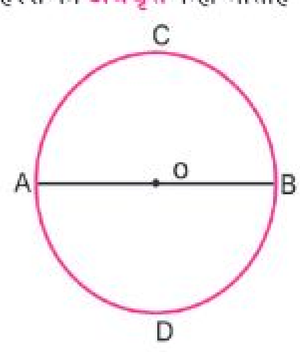
(ग) $\overset{\frown}{ADB}$ चाप और _______ चाप के संयोग से संपूर्ण वृत्त बनता है ।

(घ) $\overset{\frown}{ACB}$ चाप के A बिंदु और _______ बिंदु के अलावा अन्य सारे बिंदु चाप के अन्त:स्थ बिंदु हैं।

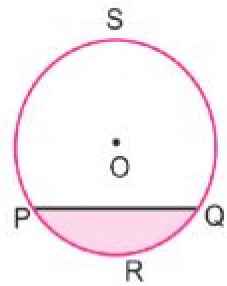
अर्धवृत

वृत्त का एक व्यास वृत्त को जिन दो हिस्सों में बाँटता है, उन दो हिस्सों में से हरेक हिस्स को **अर्धवृत्त** कहा जाताहै ।

$\overline{AB}$ वृत्त का एक व्यास है । $\overset{\frown}{ACB}$ और $\overset{\frown}{ADB}$ दो अर्धवृत्त हैं, यानी वृत्त का व्यास वृत्त को दो अर्धवृत्तों में बाँटता है । हरेक चाप की एक लंबाई होती है । यहाँ, $\overset{\frown}{ACB}$ और $\overset{\frown}{ADB}$ चाप द्वय की लंबाई बराबर है । $\overset{\frown}{ACB}$ और $\overset{\frown}{ADB}$ चाप द्वय की कुल लंबाई संपूर्ण ABC वृत्त की लंबाई के बराबर है । संपूर्ण वृत्त की लंबाई को वृत्त की **परिधि** कहा जाता है।

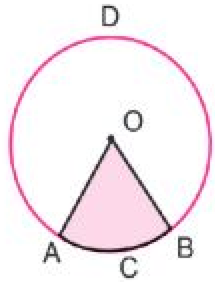


वृत्तखंड



पार्श्वस्थ चित्र में जीवा $\overline{PQ}$ और चाप $\overset{\frown}{PRQ}$ से बने चित्र को एक **वृत्तखंड** कहा जाता है। वैसे ही $\overline{PQ}$ जीवा और $\overset{\frown}{PSQ}$ चाप से बना चित्र एक दूसरा वृत्तखंड है । इसलिए किसी वृत्त का एक चाप और उससे जुड़ी जीवा से बने चित्र को उस वृत्त का एक वृत्तखंड कहा जाता है ।

वृत्त का त्रिज्य खंड



पार्श्वस्थ चित्र में $\overline{OA}$ और $\overline{OB}$ दो त्रिज्याएँ हैं । A और B बिंदुओं से $\overset{\frown}{ACB}$ और $\overset{\frown}{ADB}$ दो चाप पैदा हुए हैं। $\overset{\frown}{ACB}$ चाप, $\overline{OA}$ त्रिज्या और $\overline{OB}$ त्रिज्या द्वारा बने चित्र को एक **त्रिज्यखंड** कहा जाता है । $\angle AOB$ इसका एक केन्दीय कोण है । वैसे ही $\overset{\frown}{ADB}$ चाप, $\overline{OA}$ त्रिज्या $\overline{OB}$ त्रिज्या से बने चित्र भी एक त्रिज्यखंड है ।

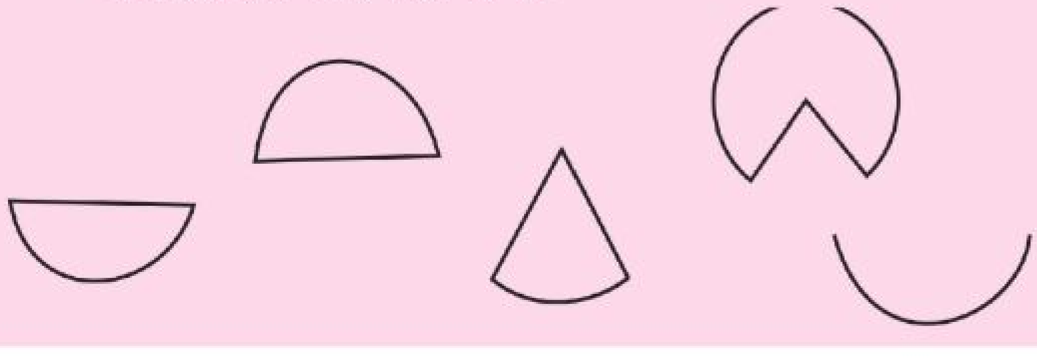
एक चाप और उसके दोनों प्रांत बिंदुओं से होकर बने चित्र को एक त्रिज्यखंड कहा जाता है ।

वृत्ताकृति वाला विशेष क्षेत्र

त्रिभुजाकृति वाले क्षेत्र और चतुर्भुजाकृति वाले क्षेत्र की भाँति वृत्त एवं वृत्त का अन्त:भाग मिलकर **'वृत्ताकृति क्षेत्र'** बनाते हैं। दिए गए चित्र को देखो ।

खुद करके देखो

- नीचे दिए गए चित्र की भाँति कागज पर स्केल और परकार की सहायता से विविध प्रकार के चित्र बनाकर वृत्तखंड, त्रिज्यखंड, अर्धवृत्त दर्शाओ ।



अभ्यास कार्य 9.6

1. C को केन्द्रबिंदु बनाकर 4.5 से.मी. त्रिज्या वाला एक वृत्त अंकन करो । P, Q, R बिंदुओं को दर्शाओ जैसे कि P बिंदु वृत्त के अन्त:भाग में, 'Q' बिंदु वृत्त की परिधि पर तथा 'R' बिंदु वृत्त के बाहर्भाग में रहेंगे ।

2. 'O' को केन्द्रबिंदु के रूप में लेकर 4 से.मी. त्रिज्या वाला एक वृत्त अंकन करो । एक जीवा अंकन करो और उसका नाम दो $\overline{AB}$ । बने क्षुद्रचाप पर एक बिंदु 'X' दर्शाओ ।

3. निम्न उक्तियों में से सही उक्ति के पास सही चिह्न ($\surd$) और गलत उक्ति के पास गलत ($\times$) चिह्न लगाओ ।

   (क) वृत्त की हरेक त्रिज्या एक जीवा है ।

   (ख) वृत्त की हरेक व्यास एक जीवा है ।

   (ग) वृत्त की हरेक जीवा केन्द्र पर समद्विखंड होती है ।

   (घ) वृत्त की हरेक जीवा एक रेखाखंड है जिसके प्रांत बिंदु द्वय वृत्त की परिधि पर स्थित है ।

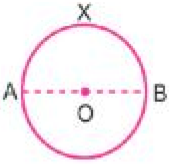
   (ङ) एक वृत्त के हरेक व्यास का मध्यबिंदु उस वृत्त का केंन्द्र है ।

4. 'O' को केन्द्र बनाकर 3.7 से.मी. त्रिज्या वाला एक वृत्त अंकन करो । चाँद के उपयोग से एक त्रिज्यखंड अंकन करो, जिसके केन्द्रीय कोण का परिमाण 72° है ।

5. खालस्थान भरो । (<, >, = चिन्हों में से सही चिह्न का व्यवहार करते हुए)

   (क) एक वृत्त का केन्द्र बिंदु O, वृत्त की परिधि पर एक बिंदु 'P' और वृत्त के अन्त:भाग वाला एक बिंदु है 'Q' । यहाँ OP ________ PQ

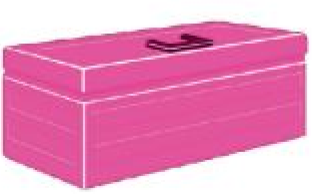
   (ख) एक वृत्त का केन्द्र बिंदु O, वृत्त की परिधि पर एक बिंदु 'P' और वृत्त के बहिर्भाग का एक बिंदु 'R' । यहाँ OP _________ QR



   (ग) $\widehat{AXB}$ की लंबाई _______ अर्धवृत्त की लंबाई है ।

9.4. त्रिविमीय आकृतिवाली वस्तु

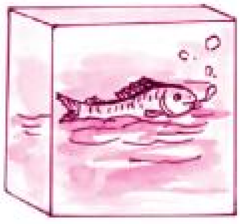
तुम्हारे अपने दैंनदिन जीवन में दिखाई देनेवाली कई वस्तुओं की आकृतियों के बारे में नीचे चर्चा की गई है ।



तुमने एक वक्सा या ईंट देखी है । यह बायीं से दायीं ओर विस्तृत है, नीचे से ऊपर को विस्तृत है तथा सामने से पीछे को विस्तृत है । जिन दूसरी वस्तुओं के चित्र दिए गए हैं, बक्से की तरह उनकी बायें-दायें, ऊपर-नीचे, और आगे पीछे विस्तृति रही है । इसलिए इन्हें **त्रिविमीय वस्तु** या **घन वस्तु** कहा जाता है ।

9.4.1. घनाभ

त्रिविमीय वस्तुओं को दो भागों में बाँटा गया है, जैसे - समतल आधार वाली त्रिविमीय वस्तु और वक्रतल आधार वाली त्रिविमीय वस्तु । लकड़ी का वक्सा, दियासलाई बक्सा, अलमारी, लूड़ो का पासा आदि एक-एक समतल आधार वाली त्रिविमीय वस्तुएँ हैं। उपर्युक्त वस्तुओं को **घनाभ** कहा जाता है ।



इन वस्तुओं की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई है । एक घनाभ के कई हिस्से नीचे दिए गए हैं।

(क) फलक -

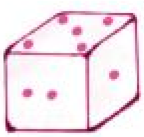
एक घनाभ के छह आयताकार **फलक** होते हैं। विपरीत फलक एक प्रकार के और बराबर माप वाले होते हैं।

(ख) किनारा -

चित्र देखो । दोनों फलकों के मिलन-स्थान को देखो । इसे घनाभ का एक किनारा कहा जाता है । हरेक किनारे की आकृति रेखाखंड की भाँति है । एक घनाभ के 12 **किनारे** होते हैं।

(ग) शीर्ष-

बक्से के चित्र के ऊपरी भाग को देखो । इस के हरेक शीर्षबिंदु (यानी कौणिक बिंदु) को देखो । देखेंगे कि हरेक शीर्षबिंदु पर बक्से के तीन किनारे मिले हुए हैं। इस शीर्ष बिंदु को घनाभ का '**शीर्ष**' कहा जाता है । इस तरह एक घनाभ के 8 शीर्ष होते हैं।

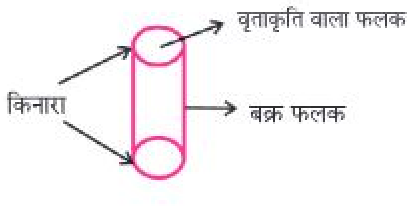


लूड़ो के पासे का चित्र देखो । इसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर है । इसे घन कहा जाता है। घनाभ की भाँति इसके भी 6 फलक, 12 किनारा एवं 8 शीर्ष होते हैं। इसके आधार वर्गाकार वाले हैं।

जिस त्रिविमीय वस्तु की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर होती है, उसे **समघन** कहा जाता है ।

9.4.2. बेलन

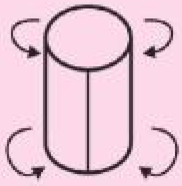
चित्रों को देखो । नलाकृति पाइप, गैस सिलेंडर और तेल का टीन-हरेक एक-एक **बेलन** आकृति का है।



बेलन के एक वक्र आधार (पृथक) और दो वृत्ताकार वाले आधार होते हैं। इसके दोनों सिरे पर दो वृत्ताकार वाले किनारे होते हैं। बेलन का कोई शीर्ष नहीं होता ।

खुद करके देखो

- आयताकार वाले एक कागज का टुकड़ा लो ।
- चित्र में दर्शाए जाने की भाँति कागज को मोड़कर उसके दोनों सिरों को मिला दो ।
- दोनों सिरों को एक पीन से या गोंद से जोड़ दो ।
- अब कागज की जो आकृति बनी, वह किस प्रकार की है ।



9.4.3. गोला

पार्श्वस्थ गेंद का चित्र देखो । इस प्रकार की आकृति को 'गोला' कहा जाता है । इसका एक वक्र-फलक होता है । इसका कोई शीर्ष और किनारा नहीं होता है ।

9.4.4. शंकु

पार्श्वस्थ चित्र एक शंकु है । इसका एक वृत्ताकार फलक और एक वक्र फलक होता है । इसका एक शीर्ष और एक वृत्ताकार किनारा होता है । धान, मूँग आदि अनाज या कुछ सूखे रेत को ढेर बना देने से वह स्वत: शंकु का आकार बना देता है । खुद परख कर देखो ।

अपने वातावरण में कहाँ-कहाँ शंकु आकार वाली त्रिविमीय वस्तुएँ देखते हो, लिखो ।

खुद करके देखो

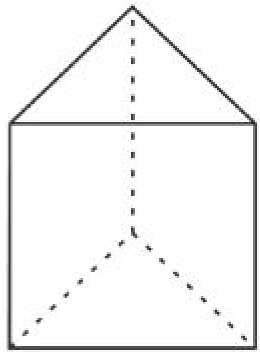
- एक कागज के टुकड़े पर परकार के उपयोग से एक वृत्त अंकन करो (चित्र (क) की तरह) ।

क ख ग घ

- उसी त्रिज्या को किनारे-किनारे कैंची से काट दो । चित्र (ख) की तरह एक त्रिज्यखंड पाओगे ।
- त्रिज्यखंड को अहिस्ते - अहिस्ते मोड़ दो जैसे दोनों सीधे किनारे आसपास होंगे (चित्र (ग) की तरह) और आपस में मिल जाएँगे (चित्र -घ) की तरह) ।
- दोनों किनारों को गोंद लगाकर जोड़ दो । कैसी आकृति मिली, देखो।

9.4.5. त्रिभुजाकृतिवाला प्रिज्म

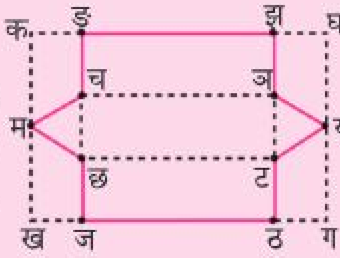
संलग्न चित्र में एक प्रिज्म दिखाया गया है । एक प्रिज्म में दो सर्वांग सम त्रिभुजाकार फलक होते हैं। इसलिए इसे त्रिभूजाकृति वाला प्रिज्म कहा जाता है। तुम त्रिभुजकार दो फलकों में से जिसे नीचे होना देख रहे हो, उसे प्रिज्म का आधार कहा जाता है । इन दोनों फलकों के अतिरिक्त तीन अन्य फलक भी होते हैं जो चतुर्भुजाकार होते हैं। इसके तीन आयताकार वाले फलक होते हैं।



एक त्रिभुजाकार वाले प्रिज्म के 6 शीर्ष, 3 आयताकार फलक और 2 त्रिभुजाकार फलक तथा 9 किनारे होते हैं ।

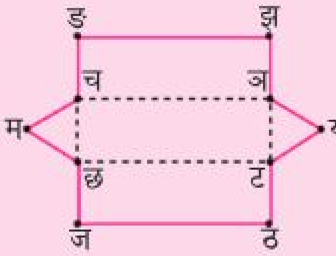
खुद करके देखो

- संलग्न चित्र को देखो । क ख ग घ की भाँति आयताकार वाला एक कागज का टुकड़ा लो ।



(A)

- कख सिरे से और गघ सिरे से बराबर दूरी पर ङज और झठ सरल रेखाएँ खींचो । ङज और झठ रेखाखंडों को बराबर तीन भाग करो। कख के किनारे पर 'म' बिंदु और गघ किनारे पर 'य' बिंदु ऐसा लो, जैसे कि
- मच = मछ = चछ = ञट = ञय = दय होगा ।
- अब ङच और चम रेखाओं को काटो; मछ, छज रेखाओं पर काटो। झम और ञय रेखाओं पर काटों एवं ठट और टय रेखाओं पर काटो। अब चित्र (B) में स्थित आकार वाला एक कागज मिल जाएगा ।



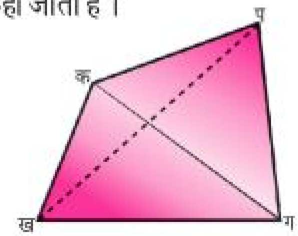
(B)

- इसके बाद चञ और छट रेखाओं के पास कागज को मोड़ दो, जैसे कि ङझ और जठ के किनारे आपस में मिल जाएँगे । उन दो किनारों को गेंद से जोड़ दो ।
- इसके बाद मचछ हिस्से को चछ रेखा के निकट मोड़ दो और ञटय हिस्से को ञट रेखा के निकट मोड़ दो ।
- चित्र (C) की भाँति एक आकृति पाओगे। किस तरह की आकृति मिली ?

(C)

9.4.6 पिरामिड

संलग्न चित्र एक पिरामिड का है । इसका आधार एक त्रिभुज का है । इसलिए इसे **त्रिभुजाकार पिरामिड** कहा जाता है । इसे **टेट्राहेड्रन्** भी कहा जाता है । क ख ग फलक को इस पिरामिड का आधार कहा जाता है ।

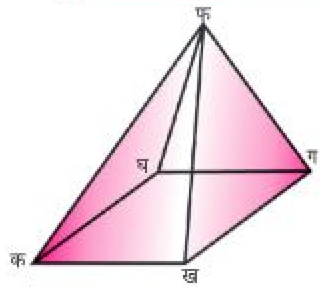


चित्र देखकर बताओ-

(क) त्रिभुजाकार पिरामिड के कितने फलक हैं ?

(ख) त्रिभुजाकार पिरामिड के कितने किनारे होते हैं ?

(ग) इसके कितने शीर्ष होते हैं ?



संलग्न चित्र को देखो । यह एक **चतुर्भुजाकार पिरामिड** है । इसका आधार एक वर्ग का है । क ख ग घ फलक को इस पिरामिड का आधार कहा जाता है । इसमें 5 फलक, 8 किनारे और एक शीर्ष होता है ।

नीचे दी गई सारणी की तरह एक सारणी बना कर खाली घरों में उत्तर लिखो ।

आकृति का नाम	फलकों की संख्या	किनारों की संख्या	शीर्षों की संख्या
घनाभ			
घन			
बेलन			
गोला			
शंकु			
प्रिज्म			

अभ्यास कार्य 9.7

1. हरेक से दो-दो उदाहरण दो ।

   घनाभ, घन, गोला, प्रिज्म, बेलन, शंकु

2. किस तरह की आकृति है, लिखो-

   (क) तुम्हारा ज्यामिति बक्सा (घ) एक रुलर

   (ख) एक ईंट (ङ) लुडो का पासा

   (ग) दियासलाई डिब्बा (च) क्रिकेट की गेंद

दसवां अध्याय

बीजगणित से परिचय

10.1 बीजगणित का स्वरूप

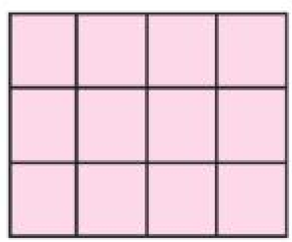
अब तक हमने संख्याओं से जुड़े विविध गणितों का अध्ययन किया है । संख्या बनाने के आधार हैं अंक । विविध संक्रियाओं के उपयोग से संख्याओं को अपने कार्यों में कैसे प्रयोग कर पाएँगे, वह हमने सीखा है ।

संख्याओं के अतिरिक्त संकेतों का उपयोग करते हुए कैसे संख्याओं से जुड़ी विविध संक्रियाओं का संपादन किया जा सकता है, अब हम सीखेंगे । a, b, c...... आदि अक्षरों को हम संख्याआ के संकेत के रूप में उपयोग करेंगे । संख्याओं के बदले संकेते का उपयोग करते हुए विविध गाणितिक संक्रियाओं का प्रयोग करने वाली वस्तु को **बीजगणित** कहा जाता है ।

10.1.1 बीजगणित क्या है ?

हम जानते हैं,	$5 + 5 = 5 \times 2 = 2 \times 5$
	$3 + 3 = 3 \times 2 = 2 \times 3$
वैसे ही,	$a + a = a \times 2 = 2 \times a$

	$3(4+5) = 3 \times 4 + 3 \times 5$
	$2(6+4) = 2 \times 6 + 2 \times 4$
वैसे ही,	$a(b + c) = a \times b + a \times c$

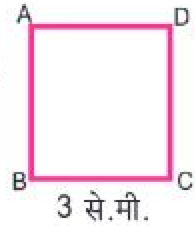


- एक आयत क्षेत्र की लंबाई 4 इकाई और चौड़ाई 3 इकाई होने पर,

  इसका क्षेत्रफल है = (4 x 3) वर्ग इकाई।

उसी प्रकार एक आयत क्षेत्र की लंबाई p इकाई और चौड़ाई q इकाई है, तो इसका क्षेत्रफल =(pXq) वर्ग इकाई है।

उदाहरण - 1

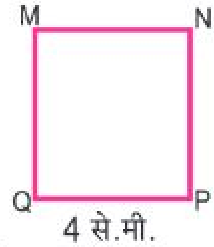


(क) संलग्न चित्र में ABCD एक वर्ग चित्र है, जिसकी एक भुजा की लंबाई 3 से.मी. है ।

उसका परिमाप = AB+BC+CD+DA = (3 + 3 + 3+ 3) से.मी.

= (4 x 3) से.मी. = 12 से.मी.

(ख) वैसे ही एक वर्ग चित्र की एक भुजा की लंबाई 4 से.मी. होने पर



MNPQ वर्ग चित्र का परिमाप = MN + NP + PQ + QM

= (4 + 4 + 4 + 4) से.मी.

= (4 X 4) से.मी. = 16 से.मी.,

(ग) एक वर्ग चित्र जिसकी भुजा की लंबाई 6 से.मी है । उसका परिमाप = (6 + 6 + 6 + 6) से.मी.

= (4 X 6) से.मी. = 24 से.मी.

चर्चा किए गए तीन उदाहरणों से प्राप्त परिणामों को सारणी में लिखेंगे ।

वर्ग चित्र की भुजा की लंबाई	परिमाप
3 से.मी.	112 से.मी.
4 से.मी.	16 से.मी.
6 से.मी.	24 से.मी.

ध्यान दो

अलग-अलग आकार वाले वर्ग चित्र का परिमाप उसकी भुजा की लंबाई का 4 गुणा है ।

अर्थात्, **वर्ग चित्र का परिमाप = 4 x बाहु का लम्ब।**

यदि एक वर्ग चित्र की हरेक भुजा की लंबाई a से.मी. हो एवं परिमाप को P से.मी. माना जाय, तो **P = 4 x a** से.मी. के रूप में लिखा जा सकता है ।

यह उक्ति एक वर्ग चित्र की भुजा की लंबाई और उसके परिमाप के बीज रिस्ते की है ।

✦ अब a = 3 लिए जाने पर, परिमाप P = 4 x a से.मी.

= 4 x 3 = 12 से.मी. होगा।

✦ वर्ग चित्र की भुजा a = 4 लिये जाने पर, परिमाप P = 4 x a

= 4 x 4

= 16 से.मी.

इसलिए उपर्युक्त उक्ति P = 4 x a के जरिए एक गणितीय नियम को **आम रूप से** या **व्यापक रूप से** व्यक्त किया गया है।

अंक गणित की आम यानी व्यापक अभिव्यक्ति की प्रक्रिया को बीजगणित कहा जाता है ।

10.2. चर

पिछली चर्चाओं से हमने देखा था कि P = 4 x a

इस उक्ति में 'a' और 'P' दोनों का मान परिवर्तनशील है । यानी 'a' के लिए अलग-अलग मान लेने से उसके अनुसार 'P' के लिए अलग-अलग मान मिलेंगे । इसलिए हमने कहा था 'a' और 'P' दोनों परिवर्तनशील हैं।

गणित में प्रयुक्त जो संकेत परिवर्तनशील हैं, यानी जिनका मान स्थिर नहीं रहता है, उन्हें 'चर' कहा जाता है ।

यहाँ 'a' और 'P' दोनों एक-एक चर हैं।

इस प्रकार और एक उदाहरण नीचे दिया गया है।

उदाहरण - 2

एक आदमी प्रति एक घंटे 30 कि.मी. की गति से स्कूटर चलाने से वह 4 घंटों में कितनी दूरी तय करेगा ?

आदमी प्रति एक घंटे को 30 कि.मी. की दूरी तय करता है ।

4 घंटों में उससे तय की हुई दूरी = 30 कि.मी. x 4 = 120 कि.मी.

इससे हमने देखा, तय की गई दूरी = 30 कि.मी. प्रति घंटे x 4 घंटे

दूसरे शब्दों में, **तय की गई दूरी = गति x समय**

गति के लिए 's', समय के लिए 't' और दूरी के लिए 'd' संकेतों का उपयोग करने पर, उपर्युक्त उक्ति या संबंध को हम कैसे लिख पाएँगे ?

$$d = s \times t$$

यह भी एक गणितीय संबंध का आम या व्यापक रूप है । यहाँ 's', 't' और 'd' हरेक एक एक चर है ।

उपर्युक्त दोनों उदाहरणों से हमने अलग-अलग सूत्र पाए ।

P (वर्ग चित्र परिमाप) =4xa (भुजा की लंबाई)

d (दूरी) = s (गति) x t (समय)

आओ, चर को समझें,

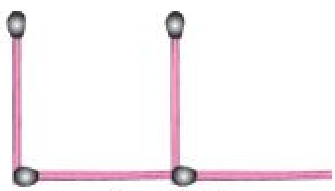
क्या तुम जानते हो ?
चर का कोई एक खास मान नहीं होता । इसके लिए 1, 2, 3, 4 आदि कोई भी मान दिया जा सकता है । चर को सूचित करने के लिए कोई भी अक्षर जैसे m, n, l, p, q, r ...... आदि लिए जा सकते हैं।

उदाहरण - 3

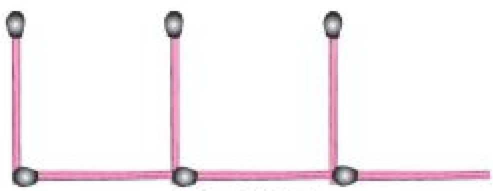
अमिना और सरिता एक ढंग से मैचिस की तीलियों को सजाकर 'L' आकृति बनाते लगीं । 'L'आकृति बनाने के लिए दो तीलियों की जरूरत हुई ।

पहले अमिना ने दो तीलियों का उपयोग करते हुए एक 'L' आकृति बनाई । (पहला चित्र)

(पहला चित्र)



(दूसरा चित्र)



(तीसरा चित्र)

उसी तरह सरिता ने और दो तीलियाँ लेकर दूसरा एक 'L' बनाकर पहले चित्र से जोड़कर रखा । (दूसरा चित्र)

बाद में सरिता के एक दोस्त आपु ने फिर से और दो तीलियों लेकर दूसरे चित्र के साथ और एक 'L' जोड़ा । (तीसरा चित्र)

क्या अब तुम बता पाओगे कि, सात 'L' चित्र बनाने के लिए कितनी तीलियाँ चाहिए।

अमिना, सरिता और आपु मिलकर दो-दो तीलियाँ लेकर ज्यादा संख्या में 'L' चित्र बनाने लगे । आओ, एक सारणी बनाकर उसमें बनाए गए 'L' संख्या और उसमें व्यवहृत हुई तीलियों की संख्या भरेंगे ।

'L' संख्या	1	2	3	4	5	6	7			
व्यवहृत तीलियों की संख्या	2	4	6	8	10	12	14			

- ऊपरवाली सारणी से 'L' संख्या और उसे बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्याओं में क्या संबंध होना देख रहे हो ?

यदि व्यवहृत तीलियों की संख्या को 'S' एवं बने 'L' की संख्या को 'n' संकेत से सूचित किया जाता है तो इस संबंध को दर्शाने के लिए किस बीजगणित (गणितीय उक्ति) का उपयोग किया जाएगा ?

तुम जरूर ही S = 2n उक्ति पाओगे ।

'n' के मान के लिए 1, 2, 3, 4... आदि गणन संख्याओं में से किसी को लेकर 's' का मान निर्णय कर पाएँगे ।

बताओ तो :
50 'L' बनाने के लिए कितनी तीलियाँ जरूरी हैं ?

यहाँ 'n' का कोई खास मान नहीं है या 'S' का भी कोई खास मान नहीं है । 'n' के लिए कोई भी एक गणन संख्या ली जा सकती है और उसके अनुसार 'S' का मान निर्णय किया जा सकता है । अत: यहाँ 'n' और 'S' हरेक एक-एक चर हैं।

अब हम पिछले उदाहरणों में बताए गए संबंध को देखेंगे ।

उदाहरण - 1	P = 4 x a	[4 x a को 4a लिखा जाता है]
उदाहरण - 2	d = s x t	[s x t को st लिखा जाता है]
उदाहरण - 3	S = 2 x n	[2 x n को 2n लिखा जाता है]

इन्हें भी एक-एक सूत्र कहा जाता है ।

ध्यान दो, हरेक उदाहरण वाले चर को एक संख्या से गुणा किया गया है, यथा - 4 x a ।

निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखो -

(क) एक वर्ग की एक भुजा की लंबाई 5 से.मी. होने पर, P = 4 x a सूत्र का उपयोग करते हुए उस वर्ग का परिमाप निर्णय करो ।

(ख) एक साइकिल चालक प्रति मिनट 220 मीटर साइकिल चला पाता है । तो फिर 8 मिनटों में वह कितनी दूरी तय कर पाएगा ?

खुद करके देखो

- आकर वाले एक चित्र बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या का विचार करते हुए एक सूत्र बनाओ, जिससे किसी भी संख्यक चित्र बनाने के लिए कितनी तीलियाँ चाहिए, निर्णय किया जा पाएगा । (चित्र संख्याओं के लिए 'n' और तीलियों की संख्याओं के लिए 's' संकेत का व्यवहार करो ।)
- आकार वाले एक चित्र बनाने के लिए जरूरी तीलियों की संख्या को विचार को लेते हुए एक सूत्र बनाओ, जिसका व्यवहार करते हुए किसी भी संख्यक चित्र बनाने के लिए जरूरी तीलियों की संख्या निर्णय की जा पाएगी ?

पिछले कई उदाहरणों से चर एक संख्या से गुणा होकर रहा है । जैसे : 4 x a, 2 x n आदि । अब इसके अतिरिक्त, एक अलग परिस्थिति को लेकर चर को समझेंगे ।

उदाहरण - 4

सरित ने कहा - अमिना के पास उससे 10 रुपए ज्यादा है ।

यानी यदि अमिना के पास 5 रुपए हो, तो सरिता के पास 15 रुपए रहे होंगे ।

उसी प्रकार यदि अमिना के पास 20 रुपए हों, तो सरिता के पास कितने रुपए होंगे ?

असल में यदि अमिना के पास कितना रुपया है, हम नहीं जानते । यदि मान ले कि अमिना के पास 'x' रुपया हो, तो सरिता के पास वाले रुपए का परिमाण होगा '$x + 10$' ।

यहाँ 'x' एक चर है । 'x' का मान 1, 2, 3..... आदि में से कोई एक संख्या है ।

यहाँ '$x + 10$' एक व्यंजक (अभिव्यक्ति) है जिसमे 'x' एक चर है।

'$x + 10$' को कैसे पढ़ा जाएगा ?

क्या जानते हो ?

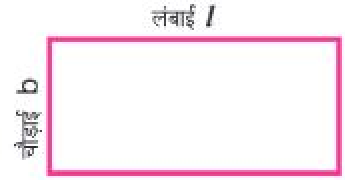
- '$x + 10$' ज्यादा सरलीकृत स्थिति को आ नहीं पाएगा । यदि 'x' का एक खास मान होता है, तो उस व्यंजक (अभिव्यक्ति चित्र) के लिए एक खास मान मिलेगा ।
- '$x + 10$' और '$10 \times x$' अलग-अलग व्यंजक (अभिव्यक्तियाँ) हैं, क्योंकि 'x' से 10 मिलने से '$x+10$' होता है, परंतु 'x' को 10 से गुणा करने से '$10 \times x$' या $10x$ होगा ।

उत्तर लिखो -

किसी एक विद्यालय में छात्राओं की संख्या छात्रों की संख्या से 35 ज्यादा है । यदि छात्र-संख्या 'x' (चर) होता है, तो विद्यालय में छात्राओं की संख्या कितनी होगी ?

- छात्राओं की संख्या जानने के लिए अभिव्यक्ति निर्णय करो ।
- यदि छात्रों की संख्या 75 हों, तो व्यजक (अभिव्यक्ति) का प्रयोग करते हुए छात्राओं की संख्या निर्णय करो ।

10.3. आम सूत्र रचना में चर का उपयोग



(क) ज्यामिति :

आयत का परिमाप = 2 x लंबाई + 2 x चौड़ाई

यदि परिमाप के लिए P, लंबाई और चौड़ाई के लिए क्रमश: l और b लिया गया, तो आम सूत्र क्या होगा ?

$P = 2l + 2b$

यहाँ l, b और P एक-एक चर हैं, जिनका उपयोग करते हुए एक आम सूत्र लेखन संभव हुआ ।

(ख) बीजगणित

- तुम लोग पहले योग का क्रम विनिमेय नियम के बारे में जान चुके हो ।

  यह गुण किसी भी दो या दो से अधिक संख्याओं के लिए सत्य है । संख्याओं का यह गुण, संख्याओं के योग का क्रम विनिमेय कहलाता है ।
  जैसे- 8+12=12+8, 25+27=27+25 आदि ।
  इस गुण को आम तौर पर व्यक्त करने के लिए दो चरों a और / का व्यवहार करना होगा । अब यह आम नियम (गुण) हुआ-

  $$a + b = b + a$$

  जहाँ a और b कोई भी पूर्ण संख्या (गणन संख्या) हो सकती है । सूत्र को उस तरह से लिखते से यह सारी पूर्ण संख्याएँ युग्म के लिए सत्य हैं, वह सूचित हो पाया ।

- उसी तरह गुणन की स्थिति में क्रम विनिमेय नियम को a x b = b x a के रूप में व्यक्त कर पाएँगे ।

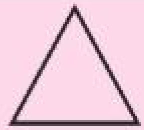
- तुम पहले से पूर्ण संख्याओं के गुणन का साहचर्य नियम जानते हो । नीचे इसका एक उदाहरण दिया गया है -
  $3 \times (4 \times 5) = (3 \times 4) \times 5 = 4 \times (3 \times 5)$,
  यहाँ 3 के लिए a, 4 के लिए b और 5 के लिए c का व्यवहार करते हुए साहचर्य नियम को निम्न प्रकार से लिख पाएँगे ।

  $$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = b \times (a \times c)$$

- a+b = b +a एवं नियम युग्म को आम और व्यापक अर्थ में प्रयोग कर पाएँगे ।

खुद करके देखो

- एक समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई के लिए चर 'l' लेकर इसकी परिमाप को चर 'l' के जरिए व्यक्त करो ।
- एक सम षट्भुज की भुजा की लंबाई के लिए 'l' लेकर इसकी परिमाप को 'l' के जरिए व्यक्त करो ।



बीज गणित का इतिहास

हमारे भारतवर्ष के पंडित ब्रह्मगुप्त (जन्म 598 ई.) ने '**ब्रह्मगुप्त सिद्धांत**' नामक पुस्तक लिखी थी । इसे संसार की पहली बीजगणित पुस्तक माना जा सकता है । इस पुस्तक में संख्याओं के लिए अनजान संकेतों का प्रयोग किया गया था ।

ब्रह्मगुप्त से पूर्व भी कई भारतीय पंडितों ने संख्याओं कें लिए संकेतों का व्यवहार किया था । उन्होंने संख्याओं के बदले वर्ण या बीज का व्यवहार करते हुए गणितीय तथ्य व्यक्त किये थे ।

उज्जयिनी के कांक नामक व्यक्ति ने, अरब के बागदाद के बादशाह को पंडित ब्रह्मगुप्त की पुस्तक भेंट की थी।

इसके उपरांत बागदाद के अरबीय गणितज्ञ महम्मद इबन ने आलखोवारिज्मि **आल्जेबार उइल आल्मुगावाला** : नामक एक गणित की पुस्तक लिखी थी । उन्होंने उसमें संख्याओं के साथ अक्षर संकेतों या बीजों का व्यवहार किया था । उपर्युक्त नाम से Algebra शब्द की उत्पत्ति हुई है। बीज के व्यवहार में गणितीय उक्ति को व्यक्त किए जाने के कारण उस विषय का नाम बीजगणित हुआ है ।

बाद में युरोपीयों ने अरबीयों से बीजगणित की शिक्षा की।

अभ्यास कार्य 10.1

1. एक वृत्त का व्यास, उसकी त्रिज्या का दो गुना है । व्यास के लिए d और त्रिज्या के लिए r लेकर सूत्र लिखो । उत्तर हुआ -

व्यास = 2 x त्रिज्या

$\therefore$ d = 2 x r

यहाँ चर क्या-क्या हैं ?

2. बीज या संकेत का व्यवहार करते हुए निम्न उक्तियों को व्यक्त करो । किसलिए लिए कौन-सा बीज व्यवहार किया, लिखो ।

(क) समबाहु त्रिभुज की परिमाप उसकी हरेक भुजा के तीन गुना हैं।

(ख) तुम्हारी कक्षा के बच्चों की संख्या, हरेक पंक्ति में बैठे हुए बच्चों की संख्या और पंक्तियों की संख्या के गुणन फल के बराबर हैं।

(ग) एक घनाभ आकार वाली कोठरी का घनफल उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणन फल के बराबर है ।

10.4 बीजगणित में आधारभूत गणितीय प्रक्रिया

पूर्ण संख्याओं को लेकर जैसे योग, वियोग, गुणन और विभाजन प्रक्रियाएँ की जाती हैं, ठीक उसी प्रकार बीज और संख्या दोनों को लेकर ये प्रक्रियाएँ की जाती हैं। इन प्रक्रियाओं के सारे गुण और नियम बीज गणितीय क्षेत्र में भी सत्य होते हैं।

10.4.1. योग प्रक्रिया

3 और 2 का योगफल निर्णय करते समय 3+2=5 ऐसा लिखते हैं। परंतु a+5 का योगफल कितना है ?

यदि a का मान 4 हो, तो a और 5 का योगफल a+5=4+5=9 होगा ।

यदि a का मान 6 है, तो a और 5 का योगफल a+5=6+5=11 होगा ।

इसलिए a का मान कितना है, जानने के बाद a और 5 का योगफल कितना होगा, निर्णय किया जा सकता है ।

यदि a का मान पता न चलता है, तो a और 5 का योगफल a+5 का मतलब हुआ "a से 5 ज्यादा है" । वैसे ही "a से b ज्यादा" को a+b लिखा जाता है।

उसी तरह '(a+b) से c ज्यादा है,' को कैसे लिखा जाएगा, बताओ।

जैसे किसी भी संख्या से 0 को योग करने पर योगफल वही संख्या होता है,

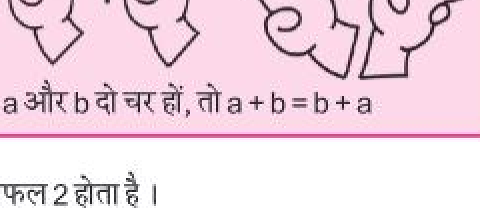
3+0=3, 7+0=7, वैसे a+0=a ।

निम्नलिखित उक्तियों को कैसे लिखा जाएगा ?

- a और 4 का योगफल
- 5 की तुलना में x ज्यादा है ।
- x से y ज्यादा है ।
- $(x+y)$ से ज्यादा 6 है ।

क्या जानते हो ?

हम जानते हैं 3 + 4 = 4 + 3 उसे योग का क्रम विनिमेय नियम कहा जाता है ।



यदि a और b दो चर हों, तो a + b = b + a

10.4.2. वियोग (घटाव) प्रक्रिया

6 से 4 घटाव करते समय हम 6 - 4 = 2 लिखते हैं। तब वियोगफल 2 होता है ।

परंतु x से 4 घटाव करके वियोग फल को हम $x-4$ लिखेंगे ।

x का मान जानने से हम $x - 4$ कितना होगा, वह निर्णय कर पाएँगे । परंतु x का मान न दिए जाने पर "x वियोग 4" के लिए $x-4$ लिखा जाता है, $x-4$ का मतलब है "x से 4 कम है" ।

बताओ तो
a – b और b – a बराबर होगा ? क्यों ?

वैसे ही a से b का वियोग करने पर वियोग फल को a – b लिखा जाता है ।

(a–b)–c लिखने से पता चलता है कि a से b का वियोग करके वियोग फल से फिर c का वियोग किया गया है ।

अभ्यास कार्य 10.2

1. योग और वियोग चिह्न का व्यवहार करते हुए निम्न उक्तियों को लिखो ।

   (क) 10 से t कम

   (ख) m और n का अंतर फल (m > n)

   (ग) z की तुलना में w कम्

   (घ) p से q ज्यादा है और उससे r ज्यादा ।

   (ङ) b से 3 कम और उससे c ज्यादा ।

   (च) m से l कम और उससे k ज्यादा ।

   (छ) x की तुलना में y कम और उससे z कम ।

2. बाबू के पास m रुपए है । बेबी के पास उसकी तुलना में 10 रुपए ज्यादा हैं, बेबी के पास कितने रुपए हैं ? m=7 होने पर बेबी के पास रुपए का परिमाण कितना है ?

3. सीता की उम्र 15 साल है । उससे गीता y साल बड़ी है । रीता की उम्र उन दोनों की कुल उम्र से z साल कम है । तो फिर रीता की उम्र के लिए व्यंजक लिखो y का मान 5 और z का मान 2 होने से रीता की उम्र कितनी होगी ?

10.4.3 गुणन प्रक्रिया

तुम जानते हो गुणन क्रमिक योग क्रिया है । 3+3+3+3 यानी 4 (चार) बार 3 का योगफल = 4 x 3

उसी प्रकार, a + a + a + a या 4a का योगफल = 4 x a

परंतु "4 x a" लिखने से गुणन चिह्न बीज 'x' के साथ भ्रम होने की संभावना होने से "4 x a" को 4a लिखा जाता है ।

ठीक वैसे ही - b + b + b + b = 4b

c + c + c = 3c

$x+x+x+x+x = 5x$

योग और वियोग क्रिया में जैसे बीज का मान जानने पर योगफल या वियोगफल निर्णय किया जाता है, वैसे ही यहाँ भी बीज का मान जानने से गुणन फल निर्णय कर पाएँगे ।

जैसे- a = 5 होने पर, 4a = 4 x 5 = 20

y = 2 होने पर, 11y = 11 x 2 = 22

p = 10 होने पर, 8p = 8 x 10 = 80

अब एक संख्या और एक बीज का गुणनफल जैसे व्यक्त किया जाता है, वह हमने चर्चा की । गुण्य और गुणक - दोनों बीज होने पर उनका गुणनफल कैसे व्यक्त किया जाएगा ?

x और y का गुणनफल कितना है ?

x और y के गुणनफल को xy या yx के रूप में लिखा जाता है ।

xy में दोनों x और y है xy के उत्पादक या गुणनखंड है।

यदि x और y के गुणनफल को xy या yx के रूप में लिखा जाय तो

a और 4 के गुणनफल को सिर्फ के 4a रूप में लिखा जाता है ।

क्या जातने हो ?

4a को a4 के रूप में लिखते की प्रथा नहीं है । वैसे ही 1x x को $1x$ के रूम में लिखना प्रचलित नहीं है । उसे सिर्फ x की तरह लिखा जाता है । x कहने पर $1x$ ही समझता जाता है ।

10.4.4 विभाजन (भाग) प्रक्रिया

भाग क्रिया, गुणन की विपरीत प्रक्रिया है ।

ज्यों ही 6 = 2 x 3, विपरीत ढंग से हम लिख पाएँगा, 6 ÷ 2 = 3 और 6 ÷ 3 = 2

वैसे ही 2 x x = $2x$ विपरीत ढंग से लिख पाएँगे एवं $2x \div 2 = x$ और $2x \div x = 2$

$xy \div x = y$ और $xy \div y = x$

हम 2 ÷ 3 को $\frac{2}{3}$ के रूप में लिखते हैं और '2 बटा 3' पढ़ते हैं। उसी तरह a ÷ 3 को भी $\frac{a}{3}$ लिखा जाता है । $\frac{a}{3}$ को 'a बटा 3' या "a की एक तिहाई" पढ़ा जाता है । इसलिए $\frac{x}{4}$ को x की एक चौथाई, $\frac{b}{9}$ को b का एक नौवांश और $\frac{2}{3}$ a को a को दो तिहाई कहा जाता है ।

उसी तरह $x \div y$ को $\frac{x}{y}$ के रूप में लिखा जाता है एवं "x बटा y" पढ़ा जाता है ।

10.4.5 चार प्रक्रियाओं के बारे में कई सुलझे प्रश्न :

उदाहरण -1

तुम्हारे पास m रुपए हैं। तुम्हारे भैया के पास उससे 5 गुना से n रुपए ज्यादा है, तो तुम्हारे भैया के पास कितने रुपए है ? उसमें से वे p रुपए खर्च कर देने पर उनके पास और कितने रुपए बचेंगे ?

हल : तुम्हारे पास m रुपए है ।

उसका 5 गुना = mx5 रुपए = 5m रुपए ।

तुम्हारे भैया के पास उससे n रुपए ज्यादा है ।

भैया के पास (5m+n) रुपए है ।

उसमें से उन्होंने p रुपए खर्च कर दिए ।

उनके पास बचे हुए (5m+n-p) रुपए रहेंगे ।

उदाहरण -2

संक्षेप में व्यक्त करो, a का तीन-पंचमांश से b की दो तिहाई कम।

हल : a का तीन - पंचमांश = $\frac{3a}{5}$

b की दो - तिहाई = $\frac{2b}{3}$

a के तीन-पंचमांश से b की दो - तिहाई कम = $\frac{3a}{5} - \frac{2b}{3}$

अभ्यास कार्य 10.3

1. बीज के जरिए व्यक्त करो। किसके लिए बीज का प्रयोग किया, लिखो ।

   (क) एक वस्तु का विक्रय मूल्य उसके क्रय मूल्य और लाभ के कुल मूल्य के बराबर है ।

   (ख) एक आयत क्षेत्र की परिमाप उसकी लंबाई के दुगुने और चौथाई के दुगुने के योगफल के बराबर है ।

   (ग) एक घनाभ का घनफल उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणन फल के बराबर है । सूत्र लिखो । उस सूत्र की मदद से 4 मी. लंबाई, 3 मी. चौथाई और 2 मी. ऊँचाई वाले घनाभ का घनफल निर्णय करो।

2. बीज और संख्या का उपयोग करते हुए निम्न अभिव्यक्तियाँ निर्णय करो ।

   (क) b के दुगुने से c का पाँच गुना ज्यादा है, अत: उसकी अभिव्यक्ति कितनी है ?

   (ख) x के तीन गुना से p को एक चौथाई कम है, तो उसकी अभिव्यक्ति कितनी है ?

   (ग) p के पाँच-षष्टांश की तुलना में 7 ज्यादा है, तो उसकी अभिव्यक्ति कितनी है ?

(घ) m और n के योगफल से z का तीन गुना कम है, तो उसकी अभिव्यक्ति कितनी है ?

(ङ) b और 4 के भागफल से c की तीन-चौथाई कम है तो उसकी अभिव्यक्ति कितनी है ?

3. बीज के जरिए लिखित निम्न अभिव्यक्तियों को शब्दों में व्यक्त करो ।

(क) $3x + 2y$ (ख) $2a - 7$ (ग) $2p + 3q - r$ (घ) $\frac{3c}{5} + d$

4. एक आयताकार फर्श की चौड़ाई b मीटर और लंबाई चौड़ाई का दुगुना है । तो उसका क्षेत्रफल कितना है ? उसी सूत्र का प्रयोग करते हुए 8 मीटर चौड़ाई वाली फर्श का क्षेत्रफल निर्णय करो ।

खुद करके देखो

चिनू और मीनू ने एक खेल खेला ।

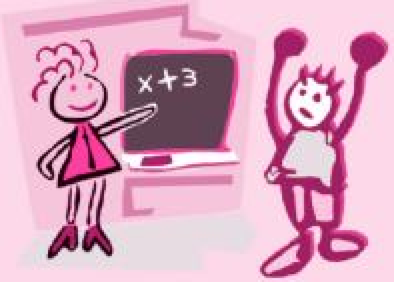
- उन्होंने एक चर x और एक संख्या 3 लेकर अभिव्यक्ति (जितनी संभव) बनाने को सोचा । खेल का नियम हुआ चार गणितीय प्रक्रियाओं में से हर बार सिर्फ एक का उपयोग किया जाएगा और हरेक अभिव्यक्ति में निश्चित रूप से x रहेगा ।

क्या तुम उनकी मदद कर पाओगे ?

चिनू ने सोचा $(x + 3)$ मीनू ने तत्काल कहा $(x - 3)$ ।

चिनू ने फिर कहा $3x$, मीनू ने कहा $\frac{x}{3}$

क्या इस प्रकार चार अभिव्यक्तियाँ संभव हैं ?



- इसके बाद उन्होंने x, 3 और 5 को लेकर खेला । अब नियम बनाया गया कि हर बार वे योग और घटाव प्रक्रियाओं में से एक या गुणन और भाग प्रक्रियाओं में से एक लेंगी एवं हरेक अभिव्यक्ति में निश्चित रूप से x रहेगा, जैसे- $x+5$, $3x+5$ आदि ।

इसी नियम में और कितनी अभिव्यक्तियाँ संभव हैं लिखो ।

10.5. बीजों का घात

तुम जानते हो $3 \times 3 = 3^2$ और $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ । 3^2 को '3 का वर्ग' या '3 का दूसरा घात' एवं 4^3 को "4का तीसरा घात' कहा जाता है । वैसे ही-

$a \times a = a^2$

$a \times a \times a = a^3$

$a \times a \times a \times a = a^4$

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^8$

$a \times a \times a \times$ .... (20 बार) $= a^{20}$

याद रखो

a^2, a^3, a^4, आदि को एक-एक घातान्वित बीज कहा जाता है ।
a^2 में a को आधार और 2 को घातांक या सूचक कहा जाता है ।
a^3 में a को आधार और 3 को घातांक या सूचक एवं
a^{20} में a को आधार और 20 को घातांक या सूचक कहा जाता है ।

ध्यान दो

x^a में x आधार है और a घातांक या सूचक है ।

x^1=a, किसी बीज का घात 1 होने पर उसी 1 को नहीं लिखा जाता है ।

उदाहरण - 1

कौन आधार है और कौन घातांक, लिखो ।

(क) y^7 (ख) $2x^3$ (ग) $\frac{3}{5}b^m$

हल : (क) y7 में आधार हैं y और घातांक 7

(ख) $2x^3$ में आधार है x और घातांक 3

(ग) $\frac{3}{5}b^m$ में आधार है b और घातांक m

बाताओ तो :
आधार a और घातांक 8 वाले
घातान्वित बीज क्या ?

उदाहरण - 2

घातान्वित बीज में व्यक्त करो ।

(क) $x \times x \times x \times z \times z$

(ख) $7 \times a \times a \times a \times a \times p \times p \times p \times q \times q$

(ग) $4 \times m \times m \times$ .... 15 बार $\times n \times n \times$ .... a बार

हल :

(क) हम जानते हैं कि $x \times x \times x = x^3$

एवं $z \times z = z^2$

$\therefore x \times x \times x \times z \times z = x^3 \times z^2 = x^3z^2$

बताओ तो :
क्या x^3z^2 और z^2x^3 बराबर है ?
कारण क्या है ?

(ख) हम जानते हैं कि $a \times a \times a \times a = a^4$

$p \times p \times p = p^3$

एवं $q \times q = q^2$

$\therefore 7 \times a \times a \times a \times a \times p \times p \times p \times q \times q = 7 \times a^4 \times p^3 \times q^2 = 7a^4p^3q^2$

(ग) हम जानते हैं कि $m \times m$ ...15 बार m^{15}

एवं $n \times n$ .... a बार $= n^a$

$\therefore 4 \times m \times m \times$ ....15 बार $\times n \times n \times$ ....a बार

$= 4 \times m^{15} \times n^a = 4m^{15}n^a$

उदाहरर - 3

मौलिक उत्पादकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करो ।

(क) $3x^4$ (ख) $7a^8$ (ग) $5p^2q^3$

हल :

(क) $3x^4$ = 3 x x x x x x x x

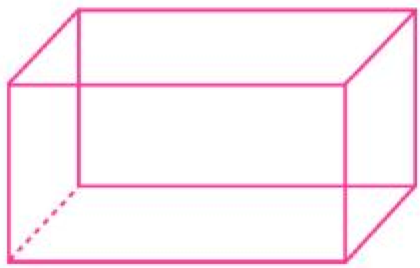
(ख) $7a^8$ = 7 x a x a x a x a x a x a x a x a

(ग) $5p^2q^3$ = 5 x p x p x q x q x q

उदाहरण - 4

घनाभ का घनफल उसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणनफल के बराबर है । जिस घनाभ की चौड़ाई x से.मी. लंबाई चौड़ाई का 3 गुणा है और ऊँचाई चौड़ाई की आधी है, उसका घनफल कितना है ?

हल :



दिए गए घनाभ की चौड़ाई = x से.मी.

लंबाई = 3 x चौड़ाई = 3 x x से.मी. = $3x$ से.मी.

ऊँचाई = $\frac{1}{2}$ x चौड़ाई = $\frac{1}{2}$ x x से.मी. = $\frac{x}{2}$ से.मी.

∴ उसका घनफल = लंबाई x चौड़ाई x ऊँचाई

= ($3x$ x x x $\frac{x}{2}$) घन से.मी.

= $\frac{3x^3}{2}$ घन से.मी.

अभ्यास कार्य 10.4

1. खाली स्थान भरो ।

(क) x^4 में आधार ——— और घातांक ——— ।

(ख) $3y^{10}$ में आधार ——— और घातांक ——— ।

(ग) m^n में आधार ——— और घातांक ——— ।

(घ) $\frac{2}{5}p^4q^3$ में आधार ——— और घातांक ——— ।

बताओ तो ?
x^5 एक घातान्वित राशि होने से इसका आधार कितना और घातांक कितना है ?

2. मौलिक उत्पादकों को गुणनफल के रूप में व्यक्त करो ।

(क) $8a^3$ (ख) a^5x^3 (ग) $9xy^3$ (घ) $25a^2x^4y^2$

3. घातान्वित राशि में रूप व्यक्त करो ।

(क) $x \times x \times x \times x$

(ख) a x a x a x b x b x b

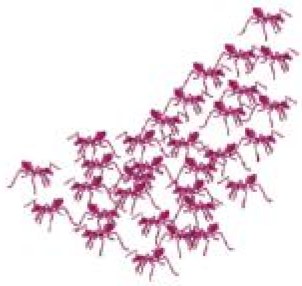
(ग) p x p x p x ...... 10 बार

(घ) 20 x (m x m x ...... 7 बार) x (n x n x .... 25 बार)

(ङ) 32 x (x x x x ....5 बार) x (y x y x .... 8 बार) x z

4. $4a^3$ और $3a^4$ में फर्क दर्शाओ ।

5. अब एक प्रकार के कीड़ों की संख्या x है, एक हफ्ते के बाद उनकी संख्या y गुणा हो जाती है । उसी अनुपात में उनकी संख्या बढ़ने से तीन हफ्तों के अन्त तक कीड़ों की संख्या कितनी होगी ?



10.6. बीजगणितीय राशि और उसका पद

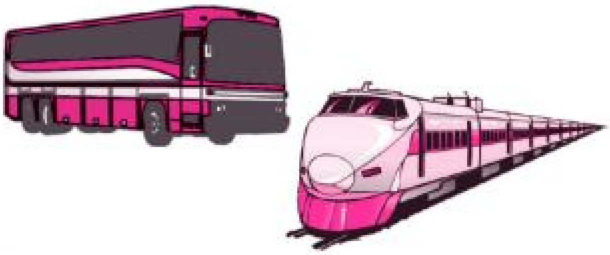
छठी कक्षा में बच्चे अपने विद्यालय से निकलकर दिल्ली की सैर करने गए । वे 4 कि.मी. पैदल गए । 3y कि.मी. बस से और 2x कि.मी. रेलगाड़ी से गए । उन्हें कुल कितना रास्ता तय करना पड़ा ?

पैदल तय किया हुआ रास्ता = 4 कि.मी.

बस से तय किया हुआ रास्ता = 3y कि.मी.

रेलगाड़ी से तय किया हुआ रास्ता = $2x$

कुल रास्ता = $(4 + 3y + 2x)$ कि.मी.



यहाँ $4 + 3y + 2x$ को एक **'बीजगणितीय राशि'** कहा जाता है ।

4, 3y, $2x$ हरेक को उसी राशि का एक-एक **'पद'** कहा जाता है ।

इसलिए 4 + 3y + 2x एक राशि है । इसमें तीन पद हैं ।

3a + b एक राशि है । इसमें दो पद है ।

c भी एक राशि है । इसमें एक पद है । इसे एक पदवाली राशि कहा जाता है ।

निम्न सारणी से एक पद वाली राशि, दो पदों वाली राशि और अनेक पदों वाली राशियों को देखो ।

एक पद वाली राशि	दो पदों वाली राशि	अनेक पदों वाली राशि
a	a + b	a + b + c
$4x$	$4 + 3x$	$4 + 3x + 7y$
3m	3m + p	3m + p - q

तुम ऐसे ही एक पद वाली राशि, दो पदों वाली राशि, अनेक पदों वाली राशि के दो-दो उदाहरण दो ।

बीजगणितीय राशि और उसके पदों के बारे में कई जानकारियाँ

- एक राशि में सिर्फ एक पद रह सकता है । यह पद एक संख्या (ध्रुव संख्या) या एक बीज हो सकता है । 1, 2, 3, 4 आदि संख्याएँ ध्रुव संख्याएँ हैं। क्योंकि इनका मान निश्चित है ।
- एक राशि में एकाधिक पद होने से वे सिर्फ '+' या '–' चिह्न से एक - दूसरे से अलग हो सकते हैं।
- एक राशि सिर्फ ध्रुव संख्या को लेकर बन सकती है ।
- एक राशि सिर्फ बीजों को लेकर बन सकती है ।
- एक राशि ध्रुव संख्या और बीजों-दोनों को लेकर बन सकती है ।
- 3, a, a^2, $\frac{a}{2}$ (या $a \div 2$), ab (या $a \times b$), $\frac{1}{a}$ (या $1 \div a$) आदि हरेक राशि एक-एक पदवाले हैं । $a \times b$ या $a \div 2$ को दो पदों वाली राशि नहीं कहा जाता ।
- पद संख्याओं की दृष्टि से राशियों को एक पद राशि, द्विपदी राशि, त्रिपदी राशि, चतुपदी राशि आदि नामों से नामित किया जाता है ।
- $a - b$ में a पहला पद है और $-b$ दूसरा पद । यानी पद के साथ उसका चिह्न (+ या –) को लिया जाता है । a+c में पहला पद a और दूसरा पद +c या c कहा जाता है । यानी पद का चिह्न + होने पर + चिह्न को छोड़कर पद कहा जा सकता है।

अभ्यास कार्य 10.5

1. कौन-सी उक्ति सही है या गलत, कोष्ठक में लिखो ।

(क) $a \times b + c$ में
- $a \times b$ एक पद [ ]
- b एक पद [ ]
- c एक पद [ ]
- $a \times b + c$ एक पद [ ]

(ख) $a \div b - c$ में
- $a \div b$ एक पद [ ]
- $b - p$ एक पद [ ]
- a एक पद और $-p$ दूसरा पद [ ]
- $a \div b$ एक पद और $-p$ दूसरा पद [ ]
- $a \div b$ एक पद और $-p$ दूसरा पद [ ]

2. हरेक राशि के पदों को अलग करके लिखो ।

(क) $p + q$ (ग) $-p + r$ (ङ) $p \times b + c$

(ख) $p + q \div r$ (घ) $a \div x \times b - c \times d \div y$ (च) $a^2b + 2xy - bc^2$

10.7 पदों का सहग

- हम 2ab पद के बारे में चर्चा करेंगे ।

  2ab = 2 x a x b

  2ab पद में

  2, ab का सहग है [2ab = 2 x ab]

  a, 2b का सहग है [क्योंकि 2ab = a x 2b]

  b, 2a का सहग है [क्योंकि 2ab = b x 2a]

  2a, b का सहग है [क्योंकि 2ab = 2a x b]

  2b, a का सहग है [क्योंकि 2ab = 2b x a]

- इसी तरह, $-8xy$ पद में $-8y, x$ का सहग है

  $-8, xy$ का सहग है

  $-8x, y$ का सहग है

अनेक बार पद में स्थित संख्यात्मक उत्पादक को पद के संख्यात्मक सहग या सहग के रूप में लिया जाता है । इस दृष्टि से 2ab पद का सहग 2 एवं $-8xy$ पद का सहग -8 कहा जाता है ।

क्या जानते हो ?

यदि किसी पद का सहग 1 या -1 हो, तो 1 को पद के साथ नहीं लिखा जाता । जैसे 1aको aके रूप में औरं -1bको -b के रूप में लिखा जाता है ।

एक पद को दो उत्पादकों के गुणन फल के रूप में व्यक्त करने से एक को दूसरे का सहग कहा जाता है ।

उदाहरण - 1

$-8x^4y - 7x^3yz + \frac{4}{3}x^2yz^2 - 5xyz$

इस राशि में स्थित $\frac{4}{3}x^2yz^2$ पद का सहग कितना है ?

फिर $\frac{4}{3}x^2yz^2$ पद में x^2 का सहग कितना है ?

हल : हम जानते हैं $\frac{4}{3}x^2yz^2$ पद का सहग $\frac{4}{3}$ (संख्यात्मक उत्पादक है)

$\frac{4}{3}x^2yz^2$ पद में x^2 का सहग $\frac{4}{3}yz^2$ । (क्योंकि $\frac{4}{3}x^2yz^2$ को $\frac{4}{3}yz^2x^2$ के रूप में लिखा जा सकता है ।

$3x-y+5b$ में स्थित अलग-अलग पदों के सहग लिखो ।

10.8 सम और विषम पद

बीजगणित में सम और विषम पदों की पहचान बड़ी महत्व पूर्ण है । नीचेवाला उदाहरण देखो -

(क) 2a, 5a, $\frac{2}{7}$a पदों में समान प्रकार के बीज हैं और हरेक पद में घात 1 है । ऐसे पदों को सम पद कहा जाता है ।

(ख) xy, $10\,xy$, $511xy$ से पद सम है क्यों कि हरेक में समान प्रकार के बीज x और y । x और y, हरेक का घात सभी पदों में 1 है ।

(ग) $3a^2b$, $\frac{2}{3}a^2b$, a^2b ये पद सम हैं क्योंकि हरेक में समान प्रकार के बीज a और b है, सभी पदों में a का घात है, 2 और b का घात 1 है ।

पदों में 2 या उससे ज्यादा संख्यक बीज होकरं उनका क्रम अलग-अलग होने से भी वे सम पद होते हैं।

(क) ab, -3ba, $\frac{1}{5}$ba सम पद हैं।

(ख) 2pqr, 15qrp, $\frac{5}{3}$rpq सम पद हैं।

(ग) x^2yz, $3yzx^2$, $-5yx^2z$ सम पद हैं।

याद करो ।
जिन पदों में समान प्रकार के बीज या समान प्रकार के घात होते हैं, उन्हें सम पद कहते हैं । उनके संख्यात्मक सहग अलग-अलग हो सकते हैं ।

निम्नलिखित विषम पदों को देखो ।

विषम पद	कारण
x, 2a, $\frac{3}{5}p$, $-4m$	पदों में समान प्रकार के बीज नहीं हैं ।
ab, bc, ca	पदों में समान प्रकार के बीज नहीं हैं ।
xyz, 2axy, 5ayz	पदों में समान प्रकार के बीज नहीं हैं ।
x^2, x^3, x^4	पदों में समान प्रकार के बीज होने पर भी उनके घातांक भिन्न हैं ।

जिन पदों में अलग-अलग प्रकार के बीज या समान प्रकार के बीज के घात अलग-अलग होते हैं, उन्हें विषम पद कहा जाता है ।

आओ, सम और विषम पदों की पहचान के लिए कई प्रश्नों को हल करेंगे ।

उदाहरण - 1

निम्न बीज गणितीय राशि में स्थित सम पदों को चुनकर हरेक का संख्यात्मक सहग लिखो ।

$$2x - xy + 3yx + 8x - 3x + xyz$$

हल : दी गई गणितीय राशि में,

$2x$, $8x$, $-3x$ सम पद हैं, उनके संख्यात्मक सहग क्रमशः 2, 8 और -3 ।

फिर $-xy$, $3yx$ सम पद हैं । उनके संख्यात्मक सहग क्रमशः -1 और 3 है ।

इस राशि में $2x$, $-xy$ विषम है एवं xyz दूसरे सभी पदों के साथ विषम है ।

उदाहरण - 2 बीज गणितिय राशि के सम पदों को इकट्ठा करके लिखो ।

$$a + 2b - ab - \frac{1}{2}a + 3ba + 5a - b$$

हल : दी गई बीज गणितीय राशि में

$a - \frac{1}{2}a, 5a$ पद सम हैं।

$2b - b$ पद दोनों सम हैं।

एवं $-ab, 3ba$ पद दोनों सम हैं ।

क्या जानते हो ?
ab और ba पद द्वय सम हैं।
abc, bca और cab पद भी सम हैं।

सम पदों को इकट्ठा करके सजाकर लिखने से राशि होगी $a + 5a - \frac{1}{2}a + 2b - b - ab + 3ba$

अभ्यास कार्य 10.6

1. निम्नलिखित पदों के संख्यात्मक सहग लिखो ।

   $3y, \frac{5}{7}p, -4ab, y^2, -abc, 23x^3y^2$

2. निम्नलिखित बीजगणितीय राशियों में स्थित अलग-अलग पदों की संख्या सहग लिखो ।

   (क) $ab - 2bc + 7ca$ (ख) $x - \frac{xy}{3} + \frac{3yz}{4}$

3. सकारण लिखो कि कौन सा पद सम है या विषम ?

   (क) $3x, 7x$ (ख) $5y, 5z$ (ग) $2ab, \frac{2}{3}ba$

   (घ) $6pq, 6q$ (ङ) $\frac{1}{2}a^3, a^3$

4. सम पदों को इकट्ठा करके निम्नलिखित राशि को सजाकर लिखो ।

   (क) $a - 3b - 4a + 2b + 7a$

   (ख) $5p + 2pq - 4p + 7qr - 3pq + 5rq - \frac{1}{2}qp$

   (ग) $xyz - xy + yz + zxy - 35yzx - 3zy$

10.9. बीजगणितीय राशि का मान निर्णय

एक बीजगणितीय राशि में एक या एकाधिक बीज होते हैं। इसलिए राशि का निश्चित मान या मूल्य पाने के लिए उसमें व्यवहृत हरेक बीज का निश्चित मूल्य जानना जरूरी है । उसके उपरांत राशि में हरेक बीज के बदले उसी बीज का निश्चित मूल्य स्थापित करने पर राशि सिर्फ ध्रुव संख्याओं को लेकर बनती है । इस राशि को सरल बना देने से उसका मान प्राप्त होता है।

बीजों के बदले उनके स्थान पर उनका निश्चित मूल्य स्थापन करने के विधि को विस्थापन विधि या सिर्फ विस्थापन कहा जाता है ।

उदाहरण - 1

$x = 4$, $y = 2$, $z = 5$ होने से निम्न राशियों का नाम निर्णय करो ।

(a) $2x + 5y - 3z$ (b) $x^2 - 3xy + z^2$

हल :

(क) $2x + 5y - 3z$

$= 2\times4 + 5\times2 - 3\times5$ (हरेक बीज का मान बिठाकर)

$= 8 + 10 - 15$

$= 18 - 15 = 3$

(ख) $x^2 - 3xy + z^2$

$= 4^2 - 3\times4\times2 + 5^2$ (हरेक बीज का मान बिठाकर)

$= 16 - 24 + 25$

$= 16 + 25 - 24$ (समान चिह्न / संकेत वाली राशियों को इकट्ठा करते हुए)

$= 41 - 24 = 17$

अभ्यास कार्य 10.7

1. $a = 3$ और $b = 5$ होने पर निम्न राशियों का मान निर्णय करो ।

(i) $2a + b$ (ii) $2b - 3a$ (iii) $1 + ab$ (iv) $\frac{a + 3b}{6}$

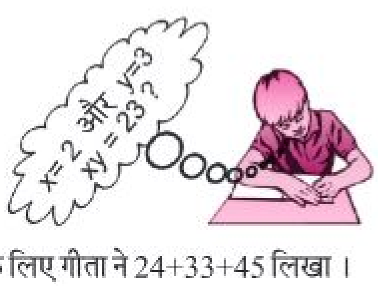
2. $x = 8$, $y = 3$ और $z = 4$ होने पर निम्न राशियों का मान निर्णय करो ।

(i) $x + 2y + 3z$ (ii) $2x + 3y - 5z$ (iv) $7z - 4y - 2x$

3. $x = 2$ और $y = 3$

एक बच्चे को का मान निर्णय करने कहा गया ।

उसने xy का मान 23 लिखा । क्या उसने सही लिखा था ? क्यों ?



4. $a = 4$, $b = 3$ और $c = 5$

2a+3b+6c का मान निर्णय करने के लिए गीता ने 24+33+45 लिखा ।

क्या उसका जबाब सही है ? कारण लिखो ।

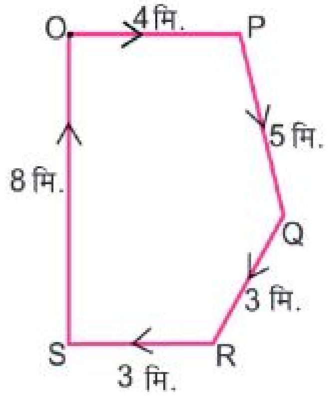
क्षेत्रमिति

11.1 हमने जो सीखा है :

खेतीबारी की जमीन के बारे में चर्चा करने समय आम तौर पर फसल किए जा रहे अंचल (क्षेत्र) और इसकी सीमा (मेंड) हमारे मन में आती है । खेती उपयोगी इलाके को मेंड घेर कर रहता है । खेती उपयोगी इलाके और इसकी मेंड को मिलाकरं एक क्षेत्र कहा जाता है । यद्यपि इसी क्षेत्र के मेंड की कुछ चोड़ाई है परंतु ज्यामिति में जिस क्षेत्र के बारे में चर्चा करते हैं, उसकी सीमा निरूपक रेखाखंडों की चौड़ाई नहीं होती । उन रेखाखंडों की कुल लंबाई को क्षेत्र की परिमाप कहा जाता है । सीमा रेखाखंडों द्वारा घिरे क्षेत्र के परिमाण को उस क्षेत्र का क्षेत्रफल कहा जाता है । तुम यह पहले जानते हो।

11.2 परिमाप और इसका एक यथार्थ उदाहरण :

एक किसान अपने खेत की चारों ओर बाड़ लगाने निकला । उसने पहले O से शुरू करके P तक, P से Q तक, Q से R तक, R से Sतक और S से O तक क्रमश: बाड़ लगाया । उसके लगाए गए बाड़े की लंबाई कितनी है ?



उस जमीन के O बिंदु से शुरू करके P, Q, R और S बिंदुओं से होते हुए फिर से O बिंदु पर पहुँचने तक चलने से जितनी दूरी तय करनी होगी, वह उस जमीन का परिमाप है ।

हमने सीखा,

एक बंद क्षेत्र का परिमाप उसके सीमा निरूपक रेखाखंड की लंबाइयों का योग है ।

हम अपने दैंनदिन जीवन में परिमाप की धारणा को ज्यादा तौर पर व्यवहार करते हैं। नीचे उनमें से कई उदाहरण दिए गए हैं।

- विद्यालय के उहाते की चारों ओर चारदीवारी निर्माण करना ।
- किसी एक स्थान की चारों ओर तार के जाला लगाना ।
- एक फोटो को बंधवाने के लिए उसकी चारों ओर माप लेकर लकड़ी तय करना ।

ऐसे ही दो उदाहरण लिखो, जिनमें परिमाप के बारे में जानना जरूरी हो रहा होगा ।

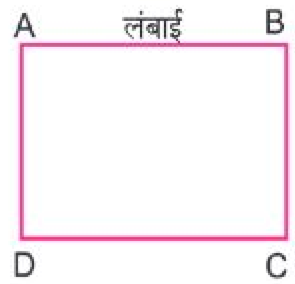
खुद करके देखो

- 3 से.मी., 4 से.मी. 5 से.मी. और 6 से.मी. माप की चार सीधी तीलियाँ लो ।
- साइकिल में व्यवहृत भल्वट्युव का उपयोग करते हुए तीलियों को जोड़कर एक चतुर्भज की आकृति बनाओ।
- अब चतुर्भुज के किसी भी शीर्ष पर स्थित ट्युव को खोल दो और तीलियों को नीचे दिए गए चित्र की भाँति एक सरल रेखा में सजाए रखो ।

- पहले से उपयोग की गई चार तीलियों को जोड़ देने से एक रेखाखंड की आकृति मिली । इस रेखाखंड की लंबाई पहले से तैयार हुए चतुर्भुज का परिमाप है ।

1.2.1 परिमाप निर्णय संबंधी सूत्र :

(क) आयत का परिमाप



आयत ABCD का परिमाप = AB + BC + CD + DA

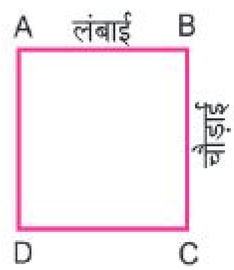
= लंबाई + चौड़ाई + लंबाई + चौड़ाई

= लंबाई + लंबाई + चौड़ाई + चौड़ाई

= 2 x लंबाई + 2 x चौड़ाई

= 2 x (लंबाई + चौड़ाई)

(ख) वर्ग का परिमाप-



वर्ग का ABCD परिमाप = AB + BC + CD + DA

= लंबाई + लंबाई + लंबाई + लंबाई

= 4 x (लंबाई)

आयत का परिमाप = 2 x (लंबाई + चौड़ाई)
वर्ग का परिमाप = 4 x (लंबाई)

बताओ तो :

एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप कैसे निकलेगा ?

अभ्यास कार्य 11.1

1. तुम्हारी कक्षा में रखी गई मेज के ऊपरी हिस्से के चारों किनारों की लंबाई मापो और तुम्हें मिली मापों को नीचे दिए जाने की भाँति लिखो ।

पहले किनारे की लंबाई = ________ से.मी.

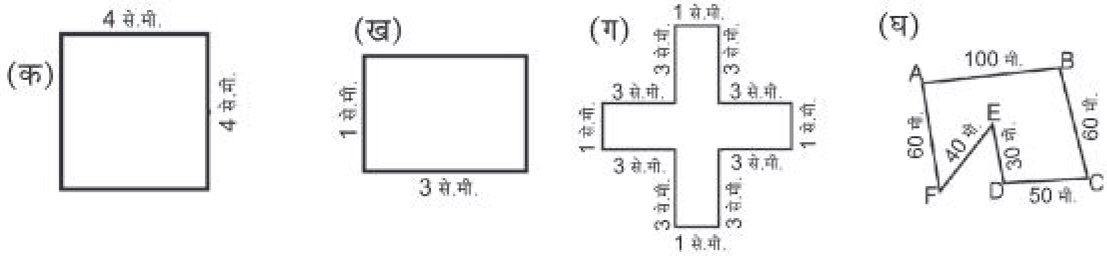
दूसरे किनारे की लंबाई = ________ से.मी.

तीसरे किनारे की लंबाई = ________ से.मी.

चौथे किनारे की लंबाई = ________ से.मी.

इसके चारों किनारों की लंबाई का योग = ________ से.मी.+ ____ से.मी.+ ____ से.मी.+ ____ से.मी.

2. नीचे दिए गए चित्रों का परिमाप निर्णय करो ।



3. एक आयताकारवाले पार्क की लंबाई 50 मीटर और चौड़ाई 35 मीटर है । एक खिलाड़ी इस पार्क की चारों ओर 10 बार दौड़ने से वह कुल कितना रास्ता दौड़ेगा ?

4. एक चतुर्भुजाकारवाली जमीन के चारों ओर की लंबाइयाँ क्रमश: 15 मी. 12 मीटर, 17 मीटर और 11 मीटर हैं। इसकी चारों ओर बाड़ लगाने के लिए प्रति मीटर 6 रुपए के हिसाब से कितना खर्च होगा ?

5. 3 मीटर लंबाई वाली एक आयताकार वाली मेज के ऊपरी हिस्से की लंबाई और चौड़ाई क्रमश: 3 मी. और 2 मी. 50 से.मी. है । इसके चार किनारों पर पतले रंगीन झालर लगाया जाएगा । कितने मीटर लंबाई का रंगीन झालर जरूरी है ?

6. एक वर्गाकार वाले टेबल का परिमाप 3 मी. 30 से.मी है । इसकी हरेक भुजा की लंबाई कितनी है ?

क्या जानते हो ?
वर्ग की सारी भुजाओं की लंबाई बराबर है।

7. निम्नोक्त किस-किस क्षेत्र का परिमाप निकालना जरूरी होगा ?

(क) एक खेत की जमीन के खेती किए जा रहे स्थान का परिमाण निर्णय करना ।

(ख) एक मैदान की चारों ओर साइकिल से घूम आना ।

(ग) एक कोठरी की फर्श परं मार्बल डालना ।

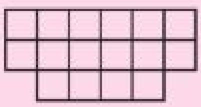
(घ) एक फोटो को बंधवाने के लिए जरूरी लकड़ी की लंबाई जानना ।

8. यदि 30 मीटर लंबाई के एक पतला लंबा तार लाकर उसे जरूरी मुताबिक टेढ़ा करके निम्नलिखित आकृतियाँ बनाई जाए, तो, अब आकृतियों की हरेक भुजा की लंबाई कितनी होगी ?

(क) वर्ग (ख) सम षटभुज (ग) समबाहु त्रिभुज

खुद करके देखो

- एक मोटा कागज लो ।
- उससे 1 से.मी. लंबाई और 1 से.मी. चौड़ाई वाला 16 वर्ग बनाओ ।
- 16 वर्ग को आसपास लगाकर विविध आकृतियाँ बनाओ जैसे उनके बीच कोई अंतर न रहे । जैसे -
- जाले आकृतियाँ बनायीं, उनका परिमाप निर्णय करो ।



- अपनी कॉपी में आकृतियों को चित्र आँकते हुए चित्रों की दायीं ओर उनका परिमाप लिखो ।

तुम्हारे लिए कुछ कार्य-1

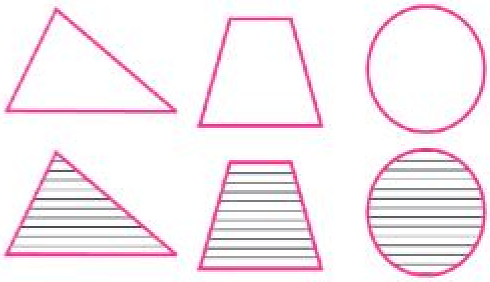
तुम अपनी चारों ओर देख रहे अयताकार और वर्गाकारवाले वस्तुओं की एक सूची तैयार करो । हरेक का परिमाप निर्णय करते हुए एक सारणी तैयार करो और उस सारणी को कक्षा के दूसरों को दिखाओ ।

11.3. क्षेत्रफल

दूसरे पन्ने में दिए गए बंद चित्रों को देखो । हरेक चित्र द्वारा इसी पन्ने के कुछ हिस्से बंद हुए हैं। चित्र और उसके द्वारा बंद इलाके के समाहार को क्षेत्र कहा जाता है । इसी क्षेत्र के परिमाण को उस क्षेत्र का क्षेत्रफल कहा जाता है।

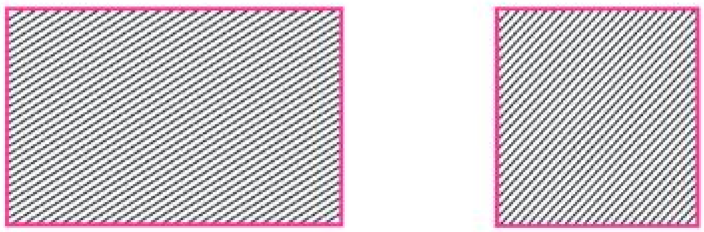
चित्र :

क्षेत्र :



> **क्या जानते हो ?**
> किसी बंद चित्र से बंद क्षेत्र के परिमाण को उस क्षेत्र का क्षेत्रफल कहा जाता है ।

नीचे दिए गए दोनों चित्रों को देखो : पहले चित्र और दूसरे चित्र द्वारा बंद क्षेत्र को रेखांकन से सूचित किया गया है ।



पहला चित्र **दूसरा चित्र**

एक खेत की जमीन में खेती किए जा रहे अंचल का परिमाण उस जमीन का क्षेत्रफल होता है । चार दीवारों से घिरी एक फर्श का परिमाण उस फर्श का क्षेत्रफल है।

क्षेत्रफल को वर्ग से.मी., वर्ग मी. आदि माप-इकाई की मदद से मापा जाता है ।

अपने दैनंदिन जीवन में जिन परिस्थितियों में क्षेत्रफल मापने की आवश्यकता पड़ती है, वैसी तीन परिस्थितियों के उदाहरण दो ।

11.3.1. कई ज्यामितीय आकृतिवाले क्षेत्रों का क्षेत्रफल

(क) आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल

आयतक्षेत्र का क्षेत्रफल कैसे निर्णय किया जाता है, वह तुम पिछली कक्षा में जान चुके हो । क्षेत्रफल संबंधी हिसाब विधि को सूत्र रूप में लिखेंगे-

- **आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = (लंबाई x चौड़ाई) वर्ग इकाई**

  लंबाई = (क्षेत्रफल ÷ चौड़ाई) इकाई

  चौड़ाई = (क्षेत्रफल ÷ चौड़ाई) इकाई
- **वर्गक्षेत्र का क्षेत्रफल = (भुजा की लंबाई x भुजा की लंबाई)^2 वर्ग इकाई**

  एक भुजा की लंबाई = क्षेत्रफल का वर्गमूल

खुद करके देखो

नीचे दिए गए दोनों बंद चित्रों को देखो । किसका क्षेत्रफल ज्यादा है, आओ वह देखें ।

पहला चित्र **दूसरा चित्र**

- मोटे कागज को काटकर 1 से.मी. लंबाई वाले कई वर्गक्षेत्र बनाओ (प्राय: 30)
- पहले चित्र की सीमा के अंदर उन खंड़ों को सजाओ,जैसे कि सारे खंड़ों के किनारे से किनारे लगे रहेंगे ।
- उसी प्रकार दूसरे चित्र में वर्गाकारवाले कागज खंड़ों को पहले की भाँति सजाए रखो ।
- किस चित्र पर ज्यादा संख्यक कागज खंड़ रहे ?
- किस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्यादा होने की बात जान पाये ?

उदाहरण - 1

एक आयत क्षेत्र की लंबाई 8 से.मी. है और चौड़ाई 6 से.मी. है । उसका क्षेत्रफल कितना है ?

हल :

आयत क्षेत्र की लंबाई = 8 से.मी.

चौड़ाई = 6 से.मी.

आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल = (लंबाई x चौड़ाई) वर्ग इकाई

= 8 x 6 वर्ग से.मी.

= 4 x 8 वर्ग से.मी.

$\therefore$ अयत क्षेत्र का क्षेत्रफल 48 वर्ग से.मी.

क्या जानते हो ?
आयत क्षेत्र की लंबाई से.मी., इकाई और चौड़ाई से.मी., इकाई में होने पर, इसके क्षेत्रफल को वर्ग से.मी. इकाई में व्यक्त किया जाता है ।

नीचे दी गयी सारणी के रिक्त स्थानों को भरो।

क्रम संख्या	आयत की लंबाई	आयत की चौड़ाई	परिमाप	क्षेत्रफल
1	5 से.मी.	4 से.मी.		
2		7 से.मी.	30 से.मी.	
3	7 से.मी.			28 से.मी.
4	12 से.मी.		42 से.मी.	

खुद करके देखो

- एक ग्राफ कागज लो (सादा कागज से ग्राफ् कागज बना जा सकता है।
- मोटा कागज काटकर एक वर्ग बनाओ।
- तुम्हारे बनाए हुए वर्ग को ग्राफ कागज पर रखो जैसे कि वर्ग का हरेक किनारा ग्राफ कागज के किसी रेखा से लगा रहेगा ।
- वर्ग के किनारे की चारों ओर रेखा खींचो । ग्राफ कागज पर तुम एक वर्ग चित्र पाओगे ।
- ग्राफ कागज पर अंकन किए गए वर्ग की सीमा के बीच ग्राफ कागज की कई 1 से.मी. भुजा वाले वर्ग है, गिनकर देखो ।
- 1 से.मी. भुजा वाले वर्गों की संख्या (जिसे गिनकर पाए हो) जानने पर वर्गाकार वाले कागज खंड का क्षेत्रफल निर्णय कर पाओगे ।

उदाहरण - 2

एक वर्गाकार वाले क्षेत्र की हरेक भुजा की लंबाई 6 से.मी. है । इस क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना है ?

हल :

वर्गाकार वाले क्षेत्र की हरेक भुजा की लंबाइ = 6 से.मी.

इसका क्षेत्रफल = (भुजा की लंबाई x भुजा की लंबाई) वर्ग से.मी.

= 6 x 6 वर्ग से.मी.

= 36 वर्ग से.मी.

बताओ तो : 6 x 6 को 6^2 के रूप में लिखा जाता है और उसे 6 का वर्ग कहा जाता है। क्या तुम 8 और 10 का वर्ग निर्माण कर सकते हो ?

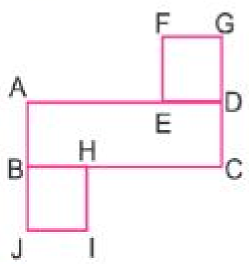
अभ्यास कार्य 11.2

1. एक वर्ग की हरेक भुजा की लंबाई 7 से.मी. है । इसका क्षेत्रफल कितना है ?

2. बगल वाले चित्र में ABCD एक आयत है एवं EDGF और BJIH हरेक एक-एक वर्ग हैं ।

   AD = 20 से.मी., AB = 9 से.मी., ED = 7 से.मी. और BJ = 8 से.मी. होने पर

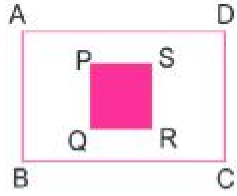
   समग्र क्षेत्र का परिमाप और क्षेत्रफल निर्णय करो ।



3. एक वर्गाकार वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल 64 वर्ग से.मी. है । इसकी हरेक भुजा की लंबाई कितनी है ?

(सूचना : यहाँ 64 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करके 64 को दो बराबर संख्याओं के गुणनफल में व्यक्त किया जा पाएगा । उन दो संख्याओं में एक ६४ का वर्ग मूल होगा ।)

4. ABCD एक आयताकार वाले बगीचे को दर्शा रहा है । इस जमीन पर खोदे गए एक वर्गाकार वाले तालाब का चित्र है PQRS।



AB = 40 मी., AD=50 मी. और PQ=22 मी. होने पर

बगीचे के अंदरवाली बची जमीन का क्षेत्रफल कितना है ?

5. एक आयताकार वाली जमीन की लंबाई 30 मी. और चौड़ाई 20 मी. है । 1 वर्ग मी. वाली जमीन का दाम 275 रुपए होने से उस जमीन को बेचकर जमीन का मालिक कितने रुपए पाएगा ?

6. एक मेज का ऊपरी हिस्सा वर्गाकार वाला है । इसके हरेक किनारे की लंबाई 1 मी. 20 से.मी. है । इसके ऊपरी हिस्से का क्षेत्रफल कितना है ?

7. नीचे तीन आयतों की लंबाई और चौड़ाई दी गई है ।

(क) 9 मी. और 6 मी. (ख) 17 मी. और 3 मी. (ग) 15 मी. और 4 मी.

- किस आयत का क्षेत्रफल सर्वाधिक है ?
- किस आयत का परिमाप सर्वाधिक है ?

8. एक आयताकार वाले कार्डबोर्ड का क्षेत्रफल 36 वर्ग से.मी. है । इसकी लंबाई 9 से.मी. होने से उसकी चौड़ाई कितनी है ?

ऊपर दिए गए प्रश्न को अच्छी तरह से पढ़ो और निचले प्रश्नों के उत्तर दो ।

- आयताकार वाले कार्डबोर्ड का क्षेत्रफल कितना है ?
- इसकी लंबाई कितनी है ?
- किसी आयत का क्षेत्रफल और लंबाई पता होने पर उसकी चौड़ाई कैसे निकलती है ?
- यहाँ आयताकार वाले कार्डबोर्ड की चौड़ाई कितनी होगी ?

9. 16 मी. लंबाई और 12 मीटर चौड़ाईवाले एक कमरे की फर्श पर टाइल डाले गए । इस कार्य के लिए कितनी 2 मी. लंबाई भुजा वाले वर्गाकार वाले टाइल की जरूरत होगी ?

10. एक वर्गाकार वाली जमीन का परिमाप 124 मी है । इस जमीन पर खेती करने के लिए प्रति वर्गमीटर 4 रुपए के हिसाब से कुल कितने रुपए चाहिए।

11. 12मी. लंबाई की एक आयताकार जमीन का क्षेत्रफल 120 वर्गमीटर है । इसकी चारों ओर बाड़ लगाने के लिए 1 मीटर को यदि 12 रुपए चाहिए तो उस जमीन की चारों ओर बाड़ लगाने के लिए कुल कितने रुपए चाहिए।

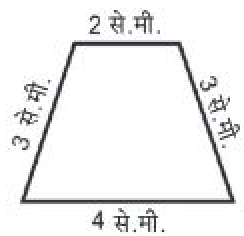
12. 20 से.मी. लंबाई का एक तार लेकर उसे टेढ़ा करके विविध मापों वाले आयतों में बदलना होगा (जैसे कि हरेक की लंबाई और चौड़ाई की माप पूर्ण संख्यक से.मी. होगा) । तार को कितने भिन्न आयतो में बदलना संभव होगा ? उनमें से कितने वर्गाकार वाले होगें ? हरेक का परिमाप और क्षेत्रफल निर्णय करो ।

तुम्हारे लिए काम :

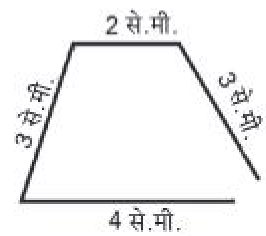
कागज काटकर पहले तीन आयत बनाओ जिनकी लंबाई और चौड़ाई नीचे दी गई है-
4 से.मी. और 3 से.मी. 5 से.मी. और 2 से.मी.
4 से.मी और 2 से.मी. । उन्हें गोंद से जोड़कर अलग-अलग आकृतियों वाले
क्षेत्र बनाओ और उन क्षेत्रोंका क्षेत्रफल निर्णय करो ।

11.4. परिमाप और क्षेत्रफल से जुड़ी कई गलत धारणाओं की आलोचना

आयताकार वाले और वर्गाकार वाले क्षेत्रों का परिमाप और क्षेत्रफल से जुड़ी समस्यओं का समाधान करते समय कभी-कभी हम शंका में पड़ जाते हैं। यहाँ उसका एक उदाहरण दिया गया है। ध्यान दो- किसी परिमाप कहने पर कोई बंद परिमाप को ही समझा जाता है, परंतु कभी-कभी बंद चित्र न लेकर उसकी भुजओं या योगफल निर्णय करके परिमाप निकल गया है, ऐसा हम कहते हैं। असल में ऐसे चित्र का परिमाप नहीं होता।



पहला चित्र



दूसरा चित्र

यहाँ पहला चित्र बंद चित्र है । इसकी चारों भुजाओं की लंबाई 2 से.मी, 3 से.मी., 4 से.मी. और 3 से.मी. है ।

इस चित्र का परिमाप है - 2 से.मी. 3 से.मी. 4 से.मी. 3 से.मी. =12 से.मी.

दूसरा चित्र बंद चित्र नहीं है । इसलिए इसके परिमाप शब्द का कोई मतलब नहीं है ।

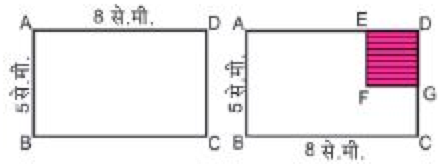
एक दूसरा उदाहरण

ABCD एक आयताकार वाले कागज का टुकड़ा है । इसकी लंबाई 8 से.मी. और चौड़ाई 5 से.मी. है । इसके कोने से 2 से.मी. भुजावाले एक वर्गाकार कागज काटकर निकाल लिया गया । बचे हुए हिस्से का परिमाप कितना है ?

बचे हुए कागज का परिमाप = मूल आयत क्षेत्र का परिमाप – काट कर लिए गए वर्ग क्षेत्र का परिमाप

=2(8+5) से.मी – 4 x 2 से.मी.

=26 से.मी. – 8 से.मी. =18 से.मी.



परंतु सही उत्तर है -

सिर्फ CG = CD – DG = 5 से.मी. – 2 से.मी. =3 से.मी.

AE = AD – DE = 8 – 2 = 6 से.मी.

इसलिए बचे हुए कागज के टुकड़े का परिमाप है = AB + BC + CG + GF + FE + EA

= 5 + 8 + 3 + 2 + 2 + 6 = 26 से.मी.

अभ्यास कार्य 11.3

नीचे कई प्रश्न दिए गए हैं। उन प्रश्नों को कई बचों ने जिस तरह हल किया है, वह लिखा गया है । उस हल में क्या गलती है, दर्शाओ । ऐसी गलती करने का क्या कारण है, लिखो।

1. एक आयताकार वाले बगीचे का चित्र आंकते हुए उसका परिमाप दर्शाओ ।

रंजित ने चित्र में कैसे रंग भरकर परिमाप को दर्शाया, वह नीचे दिखाया गया है ।

2. एक आयताकार वाले रुमाल की लंबाई 24 से.मी. और चौड़ाई 18 से.मी. है । इसका परिमाप कितना है ?

इसका परिमाप = 24 से.मी + 18 से.मी = 42 से.मी

3. एक वर्ग की भुजा की लंबाई 3 मीटर है । उसका क्षेत्रफल कितना होगा ?

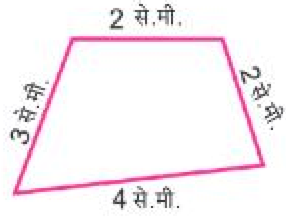
वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

= 3 मी. x 3 मी.

= 9 मीटर

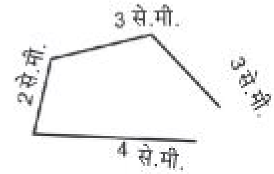
3. **बगल वाले चित्र का परिमाप कितना होगा ?**

इसकी लंबाई	= 2 से.मी.
इसकी चौड़ाई	= 3 से.मी.
परिमाप	= लंबाई और चौड़ाई के योगफल का दो गुना
	= (2 से.मी + 3 से.मी) x 2
	= 5 से.मी. x 2 से.मी. = 10 से.मी.



4. **मधुमिता ने कहा - 'मैंने अपनी कॉपी में एक चित्र अंकन किया है और उसका परिमाप निर्णय किया है ।**

परिमाप = 2 से.मी. + 3 से.मी. + 3 से.मी. + 4 से.मी. = 12 से.मी.



5. **एक आयताकार वाले कागज की लंबाई 1 मीटर और चौड़ाई 80 से.मी. है । इसका परिमाप कितना होगा ?**

राधिका ने इस सवाल का हल निम्न रूप से किया ।

लंबाई = 1 मी, चौड़ाई = 80 से.मी.

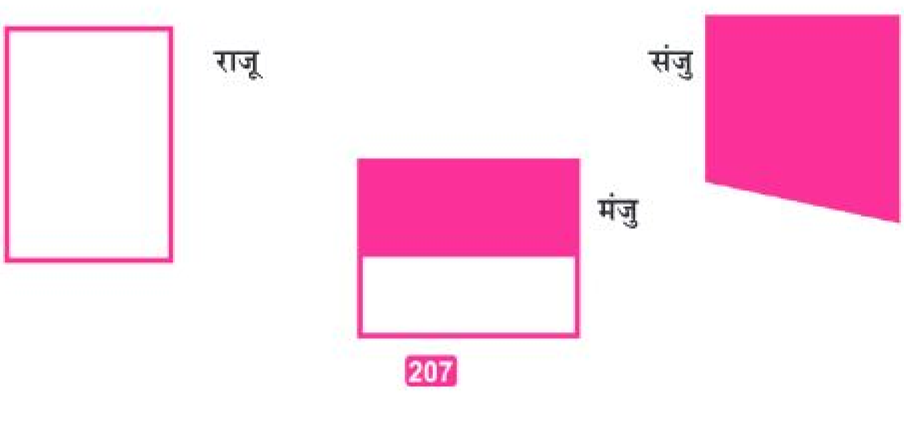
परिमाप = 2 x (लंबाई + चौड़ाई)

= 2 x (1 मीटर + 80 से.मी.)

= 2 x 81 मीटर

= 162 मीटर

6. **एक आयत चित्र अंकन करते हुए उसके क्षेत्रफल को लाल रंग से दर्शाने के लिए तीन बच्चों को कहा गया । उन्होंने कैसे दिखाया है, आओ देखें ।**



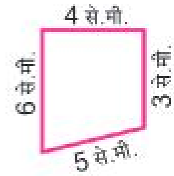
7. एक आयताकार वाला चित्र अंकन करते हुए उसका क्षेत्रफल निर्णय करो ।

रमेश ने कैसे चित्र अंकन करते हुए उसका क्षेत्रफल निर्णय किया था, देखो ।

लंबाई = 4 से.मी, चौड़ाई = 2 से.मी

क्षेत्रफल = 4 से.मी x 2 से.मी = 8 वर्ग से.मी.

8. नीचे एक बंद चित्र दिया गया है । इसका परिमाप कितना होगा ?



इस क्षेत्र का परिमाप = 4 x 3 x 6 x 5 वर्ग से.मी.

= 360 वर्ग से.मी.

9 एक आयताकार वाले क्षेत्र की लंबाई 1 मीटर और चौड़ाई 40 से.मी. है । इसका क्षेत्रफल कितना है ?

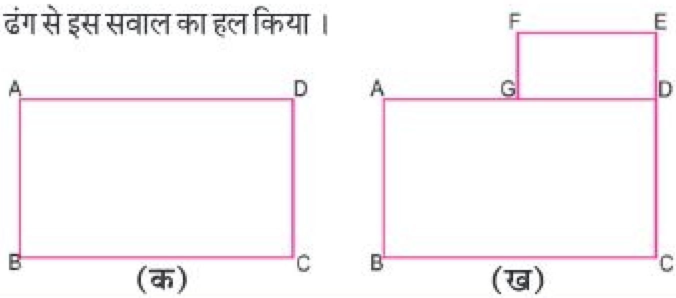
आयत का क्षेत्रफल = लंबाई x चौड़ाई

= 1 मीटर x 40 से.मी.

= 40 वर्ग से.मी.

10. 12 से.मी. की लंबाई और 8 से.मी. चौड़ाईवाले एक आयत ABCD अंकन किया गया था (चित्र-क) । उसके साथ सटाकर 6 से.मी. की लंबाई और 3 से.मी. चौड़ाई का एक दूसरा आयत अंकन किया गया (चित्र-ख) । (चित्र-ख) वाले क्षेत्र का परिमाप कितना है ?

भावना ने निम्न ढंग से इस सवाल का हल किया ।



ABCD का परिमाप = 2 (लंबाई + चौड़ाई) = 2 (12 + 8) से.मी.

= 2 x 20 से.मी. = 40 से.मी.

DEFG का परिमाप = 2 (लंबाई + चौड़ाई) = 2 (6 + 3) से.मी.

= 2 x 9 से.मी. = 18 से.मी

पूरे क्षेत्र का परिमाप = ABCD का परिमाप + DEFG का परिमाप ।

आँकड़ों का प्रबंधन और संरचना

1.1. हमने जो सीखा है

हम अपने दैनिक जीवन में विविध प्रकार के आँकड़ों का व्यवहार करते हैं। इन आँकड़ों को विविध तरीको से उपस्थित करना तुम जानते हो । दैनिक अखबारों में और दूरदर्शन पर भी विविध प्रकार के आँकड़ों को चित्रालेख, दंडालेख तथा सारणी में उपस्थापन किया जाता है । इसका एक उदाहरण दिया गया है, देखो ।

उदाहरण - 1

एक विद्यालय में विविध कक्षाओं में पढ़ रहे विद्यार्थियों की संख्या को निचली सारणी में दर्शाया गया है । उस आँकड़े को चित्रालेख में व्यक्त करो ।

पहली कक्षा	दूसरी कक्षा	तीसरी कक्षा	चौथी कक्षा	पाँचवीं कक्षा	छठवीं कक्षा	सातवीं कक्षा
35	30	30	25	25	40	35

हल :

यदि 5 बच्चों के लिए चित्र व्यवहार किया जाता है, तो विद्यालय में विविध कक्षा के बच्चों को चित्रालेख में इस तरह व्यक्त किया जाएगा ।

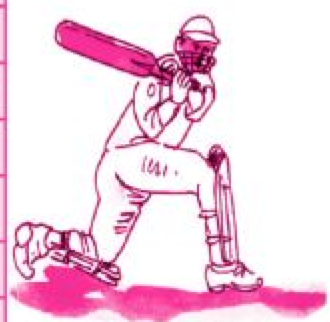
एक दुकानदार ने पाँच दिनों में क्रमश: 12, 16, 14, 18 और 10 पतंग बेचे । यदि दो पतंगों के लिए व्यवहार किया जाता है तो हरेक दिन बेची गई पतंगों की संख्या को चित्रालेख में और दंड आलेख में कैसे दर्शाया जाएगा ।

12.2. आँकड़े

20 ओवर वाले क्रिकेट मैच के एक दल के रन बोर्ड को निम्न ढंग से दर्शाया गया है । उसे देखो ।

बल्लेवाजी का विवरण **पुरुणिया दल**

बल्लेबाजों के नाम	खेली गई गेंदो की संख्या	संगृहीत रन	चौकों की संख्या	छक्कों की संख्या
धबल	24	30	2	2
विभुति	35	21	3	0
हरप्रसाद	28	27	3	1
संजय	3	2	0	0
सत्यप्रकाश	12	24	2	2
उमेश	18	17	2	0
अतिरिक्त रन	**2 कुल - 123 (4 क्रिकेट पर)**			



गेंदबाजी का विवरण **महादेववस्त दल**

गेंदबाजों के नाम	ओवर	मेडेन ओवर	रन	विकेट
जतीन	4	0	22	1
सुलेमान	4	0	31	0
इकबाल	4	1	16	2
महेश	4	0	29	0
चंदन	4	0	25	1

क्रिकेट खेल में किस दल ने जीता या हारा, जानना महत्व पूर्ण नहीं है, अपितु स्कोर बोर्ड को देखकर उससे मैच के बारे में अनेक तथ्य हासिल हो जाते हैं। किसने ज्यादा रन बनाए हैं, किसने ज्यादा गेंदें खेली हैं, किसने ज्यादा विकेट लिए हैं, आदि ।

उपर्युक्त बल्लेबाजी और गेंदबाजी का विवरण देखते हुए उससे तुम क्या-क्या तथ्य पा रहे हो, लिखो ।

हम अपने दैनिक जीवन में उसी प्रकार विविध प्रकार की सारणियों से संख्या, चित्र और नाम के बारे में जानकारी पाते हैं।

आँकड़ा कई संगृहीत संख्याओं का समाहार है जिससे हम किसी परिस्थिति के बारे में जानकारी पाते हैं।

उदाहरण - 2

वार्षिक परीक्षा की बात चून्नी से पूछने पर चून्नी ने अपने अंकों के साथ चिकू के अंकों के बारे में बताया।

चून्नी को मिले अंक
गणित - 85
साहित्य - 65
विज्ञान - 75
अंग्रेजी - 84
भूगोल - 42
इतिहास - 38

चिकू को मिले अंक
गणित - 97
साहित्य - 75
विज्ञान - 75
अंग्रेजी - 91
भूगोल -40
इतिहास - 27

दोनों में से किसे ज्यादा अंक मिले हैं और कितने ज्यादा मिले हैं ?

इस तरह के अनेक तथ्य इस सारणी से मिलते हैं। वैसे ही, हम फोन नंबर, गाड़ी नंबर और अनेक व्यक्तियों के नाम याद रखते हैं। कभी-कभी अनेक दिनों तक उन तथ्यों को याद न रख पाने के कारण काफी असुविधा होती है ।

तथ्य को याद न रख पाने से तुमने कभी किसी असुविधा का सामना किया है ? ऐसी एक परिस्थिति का उदाहरण दो ।

12.3 तथ्य और इसका विश्लेषण

गोपबंधु उच्च प्राथमिक विद्यालय की छठवीं कक्षा के बच्चों के द्वारा वार्षिक परीक्षा में गणित में प्राप्त किए अंकों से जुड़ा विवरण निचली सारणी में दिया गया है ।

नाम	अंक	नाम	अंक
1. संग्राम सेनापति	95	6. असित अग्रवाला	59
2. निर्मला बेहेरा	75	7. साइना प्रधान	90
3. रणवीर कपूर	97	8. वासिम् आक्रम	55
4. बनिता महांति	98	9. ममता खरा	60
5. सयद् अल्ली	65	10. मदन खुराना	49

निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखो :

(क) कितने बच्चों ने गणित में 90 से ज्यादा अंक रखे हैं ?

(ख) कितने बच्चों ने गणित में 60 से कम अंक रखे हैं ?

(ग) जिन बच्चों ने 90 से ज्यादा अंक प्राप्त किए हैं, ज्यादा अंक पाने के लिए उन्होंने क्या किया होगा तुम सोच रहे हो ?

(घ) 60 से कम अंक प्राप्त किए बच्चों ने किस कारण से कम अंक रखे हैं - तुम सोच रहे हो /

प्रश्न (ग) और (घ) में तुमने जो उत्तर लिखा है, वह कहाँ तक सही है जानते के लिए निम्न सारणी को देखो । इस सारणी में बच्चे गणित पाठ्यपुस्तक के अलावा और क्या-क्या किताबें पढ रहे थे और घर कें कितना समय गणित पढ़ रहे थे, उसका विवरण दिया गया है ।

क्रम संख्या	बच्चों के नाम	प्राप्त किए अंक	पढ़ी हुई पुस्तकें	घर में पढ़ने का समय (घंटा में)	
				सुबह	शाम
1	संग्राम सेनापति	95	टेस्ट पेपर, गणित विचित्रा	2	1
2	निर्मला बेहेरा	75	प्रश्न बैंक	1	1
3	रणवीर कपूर	97	टेस्ट पेपर, गणित, विचित्रा, प्रश्न बैंक	2	$1\frac{1}{2}$
4	बनिता महांति	98	टेस्ट पेपर, प्रश्न बैंक	2	1
5	सय्यद अल्ली	65	—	1	-
6	असित अग्रवाला	59	—	1	-
7	साइना प्रधान	90	टेस्ट पेपर, गणित विचित्रा	2	1
8	वासिम् आक्राम	55	—	-	1
9	ममता खरा	60	—	1	-
10	मदन खुराना	49	—	1	-

इस सारणी को देखते हुए निम्न प्रश्नों के उत्तर दो -

(क) जिन्होंने गणित में 90 से ज्यादा अंक रखे हैं, उनमें से कौन दैनिक कितना समय गणित पढ़ते हैं ?

(ख) गणित में 90 से ज्यादा अंक रखे बच्चे कौन-कौन-सी दूसरी किताबें पढ़ रहे थे ?

(ग) जिन्होंने गणित में 60 से कम अंक रखे हैं, वे दैनिक कितना समय गणित पढ़ते हैं ?

(घ) जिन्होंने गणित में 60 से कम अंक रखे हैं, वे गणित पाठ्य पुस्तक के अलावा कौन-सी दूसरी पुस्तकें पढ़ रहे थे ?

इससे हमने क्या सीखा ?

इस विद्यालय में गणित में ज्यादा अंक रखने वाले बच्चे घर पर दैनिक ज्यादा समय गणित की पढ़ाई में दे रहे थे और गणित पाठ्य पुस्तक के अलावा दूसरी पुस्तकें भी पढ़ रहे थे ।

इससे जुड़े तथ्य सारणी में होने के कारण हम आसानी से निर्णय में पहुँच पाए । इसलिए तथ्य संग्रह से पहले इसके उपयोग को सोचते हुए तथ्य संग्रह करने के कारण, समस्या के संभाव्य हलो का सत्यासत्य परीक्षण आसान हो जाता है ।

खुद करके देखो

- नीचे दी गई परिस्थिति को पढ़ो ।

  विद्याधरपुर गाँव के आधे प्रतिशत पुरुष खेती करते हैं और आधे प्रतिशत से कुछ कम पुरुष मजदूरी करते हैं। और बचे हुए पुरुष नौकरी करते हैं। परंतु कुछ ही महिलाएँ नौकरी करती हैं, कुछ महिलाएँ मजदूरी करती हैं, और कुछ घर के कामों के साथ बड़ी, पापड़ बनाकर पैसा रोजगार करती हैं । और कुछ महिलाएँ जंगल से सूखी लकड़ियाँ या पत्ते संग्रह करके बेचा करती हैं। कुछ महिलाएँ भी दूसरो के घरों में काम धंधा करके रोजगार करती हैं।

  किसी एक दिन सीमादेवी ने उस गाँव की सभी महिलाओंको बुलाकर एक सभा की और सभा में एक बालिक विद्यालय की स्थापन का प्रस्ताव रखा । सब सुनकर खुश हुई। विद्यालय के लिए आवश्यक अर्थ जुटाने को सब राजी हुईं। हरेक के काम के अनुसार कुछ परिमाण का अर्थ देने के लिए निर्णय लिया गया ।

- इसलिए सीमादेवी ने गाँव की महिलाओं के नाम, काम और उनके बारे में तथ्य पाने के लिए कैसी सारणी तैयार की होगी ? तुमसे तैयार की गई सारणी को अपने दोस्तों की सारणी से तुलना करो ।

क्या जानते हो ?

हमारे दैनिक जीवन में अनेक घटनाएँ घटती हैं जो हमारे लिए महत्व पूर्ण हैं । इन घटनाओं के बारे में जरूरी तथ्यों को पहले उपस्थापन और बाद में उन्हें विश्लेषण करने से हमारी काफी सुविधा होती है ।

12.4. तथ्यों या आँकड़ों का अभिलेखन :

विद्यालय में 'स्वतंत्रता दिवस' पालन के लिए प्रधानाचार्य ने बैठक बुलाई । 'स्वतंत्रता दिवस' के लिए तरह-तरह के काम करने के लिए बच्चों को दायित्व दिया गया ।

पंहले विचार विमर्श किया जाकर कामों को तय किया गया । जैसे कि विद्यालय के अहाते की सफाई, प्रभात फेरी संचालन, क्रीड़ा प्रतियोगिता, मिठाई बाँटना । कौन-सा बच्चा कौन-सा काम करेगा, वह निचली सारणी में दिया गया है ।

अलिभा	-	प्रभात फेरी	अर्पिता	-	सफाई	शेषदेव	-	क्रीड़ा
आकुल	-	सफाई	जीवन	-	सफाई	अमिता	-	मिठाई बांटना
इना	-	क्रीड़ा	झांसी	-	प्रभातफेरी	अखतर	-	प्रभातफेरी
उर्मिला	-	सफाई	अशोक	-	सफाई	घुंगरु	-	मिठाई बांटना
कमल	-	मिठाई बाँटना	सेफाली	-	प्रभातफेरी	चर्चा	-	क्रीड़ा
ऐश्वर्य	-	सफाई	आफ्रिद	-	सफाई	गगन	-	क्रीड़ा
मानिनी	-	क्रीड़ा	मारिया	-	सफाई	बाइन	-	क्रीड़ा

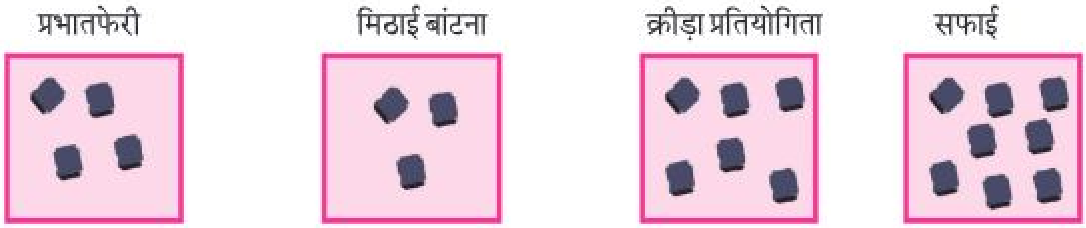
शिक्षक ने पूछा - किस दायित्व में कितने बच्चे रहे ?

- पमि ने सूची पढ़कर और हिसाब लगाकर कहा -

क्रीड़ा प्रतियोगिता	6
मिठाई बांटना	3
प्रभातफेरी संचालन	4
सफाई	8

हरेक काम के बच्चों की संख्या जानने के लिए पमि 3 बार गिनकर बच्चों की संख्या बनाई ।

- सारला ने फर्श पर 4 कोठरियाँ बनाई और उनमें कामों के नाम लिखे और हरेक काम वाली कोठरी में उस काम के लिए नियुक्त हर बच्चे के लिए एक-एक कंकड़ रखा ।



शिक्षक के पूछने पर सारला ने सिर्फ हर काम के लिए तय की गई कोठरी के कंकड़ को गिनकर जल्दी काम के अनुसार बच्चों की संख्या बता पाई, और सूची से खोजने की देर नहीं हुई ।

- मारिया अचानक बोल पड़ी - ''मैं एक दूसरे तरीके से यह जान पाई ।'' अपने द्वारा बनाई गई सारणी को सबको दिखाया ।

सफाई	√ √ √ √ √ √ √ √	8
प्रभातफेरी	√ √ √ √	4
क्रीड़ा प्रतियोगिता	√ √ √ √ √ √	6
मिठाई बाँटना	√ √ √	3

क्या मारिया के द्वार बनाई गई सारणी को तुम समझ पा रहे हो ?

इस सारणी (√) वाले चिह्न किसे दर्शा रहा है ?

चार बच्चों को प्रभातफेरी कार्य का दायित्व दिया गया था, इसलिए प्रभातफेरी के दायीं और चार (√) चिह्न दिए गए हैं ?

बताओ तो :

पमि, मारिया और सारला ने अलग-अलग तरीकों से तथ्यों (ऑकड़ों) का उपस्थापन किया, किसका तरीका तुम्हें अच्छा लग रहा है और क्यों ?

खुद करके देखो

- अपनी कक्षा के बच्चों के नामों की सूची तैयार करो ।
- हरेक के अभिभवक कौन-सा काम करते हुए पैसा रोजगार करत हैं, पता करो ।
- एक सारणी बनाकर उसे दर्शाओ ।

आओ, और एक परिस्थिति की चर्चा करें-

शिक्षक ने मिता से कहा -

तुम्हारी कक्षा के बच्चे सुबह क्या-क्या खाते हैं, उसकी एक सूची तैयार करो ।

★ मिता ने कैसे उसे सारणी में दर्शाया, देखो ।

<table>
<tr><th>खाद्य का नाम</th><th>बच्चों की संख्या</th></tr>
<tr><td>चावल</td><td>| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |</td></tr>
<tr><td>नास्ता</td><td>| | | | | | | | | | | | | | | |</td></tr>
<tr><td>फल</td><td>| | | | | |</td></tr>
</table>

उसने खाद्यों के नाम नीचे के नीचे लिखकर हरेक खाद्य की दायीं ओर चिह्नन लगाया। एक बच्चे के लिए (।) चिह्न देकर दिखाया।

इस सारणी को देखते हुए निम्न प्रश्नों के उत्तर दो-

- कितने बच्चे सुबह चावल खाकर आए हैं ?
- कितने बच्चे सुबह नास्ता करके आए हैं ?
- कितने बच्चे सुबह फल खाकर आए हैं ?

✦ मिता की सारणी को देखकर जीतु ने दूसरे ढंग से सजाया, उसे देखो

<table>
<tr><th>खाद्य का नाम</th><th>चिह्न</th><th>बच्चों की संख्या</th></tr>
<tr><td>चावल</td><td>(||||||||||) (||||||||||) |||</td><td>23</td></tr>
<tr><td>नास्ता</td><td>(||||||||||) ||||||</td><td>16</td></tr>
<tr><td>फल</td><td>||||||</td><td>6</td></tr>
</table>

जीतु ने प्रति दस (।) चिह्न पर एक घेरा लगाया ।

मिता और जीतु के सजाने की विधियों में से किसकी विधि तुम्हें अच्छी लग रही है और क्यों ?

- दिलीप ने इसे और अधिक आसान बनाने के लिए हर 5 (|) चिह्नों पर एक-एक घेरा लगाया ।

खाद्य का नाम	चिह्न	बच्चों की संख्या
चावल	(||||) (||||) (||||) (||||) |||	23
नास्ता	(||||) (||||) (||||) |	16
फल	(||||) |	6

- दिलीप की सारणी देखकर शिक्षक ने कहा, हर घेरे के अंदर वाले 5 (|) चिन्हों 𝍸 को ऐसे लिखने से हिसाब लगाना आसान होगा । ये 'टाली चिह्न' हैं। इसलिए 𝍸 ||| को पांच जोड़ तीन यानी आठ के रूप में गिना जाता है । इसी तरह 𝍸 𝍸 को दस के रुप में गिना जाता है ।

इसके बाद सारणी निम्न रूप से दिखाई देगी ।

खाद्य का नाम	चिह्न	बच्चों की संख्या
चावल	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	23
नास्ता	𝍸 𝍸 𝍸 |	16
फल	𝍸 |	6

बताओ तो :

शिक्षक के द्वारा बनाई गई विधि से सारणी तैयार करने से क्या-क्या सुविधा होगी ?

अभ्यास कार्य 12.1

1. एक विद्यालय की छठवीं कक्षा के बच्चों की ऊँचाई निम्न कोठरी में से.मी. में दी गई है ।

120	135	125	120	145	125	135
125	120	135	145	120	135	145
135	145	120	135	125	135	125
145	120	145	120	135	145	145
145	135	125	120	135	125	135

- ऊपर वाले आंकड़े को लेकर टाली चिह्न का उपयोग करते हुए एक सारणी तैयार करो ।
- कितनी से.मी. ऊँचाई वाले बच्चे कक्षा में सबसे ज्यादा हैं ?
- कितनी से.मी. ऊँचाई वाले बच्चे कक्षा में सबसे कम हैं ?

2. अपनी कक्षा के हरेक बच्चे के भाई-बहनों की संख्या (खुद को बाद देकर) पता करो । इसे लेकर टाली चिह्न का उपयोग करते हुए तुम अपनी काँपी में एक सारणी तैयार करो ।

विविध संख्या के भाई-बहन वाले बच्चे	टाली चिह्न	संख्या
न कोई भाई-बहन वाला बच्चा		
1. भाई-बहन		
2. भाई-बहनें		
3. भाई-बहनें		
4. भाई-बहनें		
4 से ज्यादा भाई-बहनें		

निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखो -

- कितने बच्चों के कोई भी भाई-बहन नहीं हैं ?
- कितने बच्चों के 4 से ज्यादा भाई-बहनें हैं ?
- इस तरह तुम यह सारणी देखकर उससे कई सवाल बनाओ और अपने दोस्तों को दिखाओ ।

3. अर्चिता ने विद्यालय के सामने खड़ी होकर विद्यालय की आम सभा में तरह-तरह की पोशाकें पहन कर आए हुए पुरुष अभिभावकों को उनकी पोशाकों के आधार पर गिन कर एक सारणी तैयार की है ।

पोशाकों का प्रकार	टाली चिह्न	लोगों की संख्या
लुंगी और शार्ट पहने हुए लोग	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	
धोती-गामौछा पहने हुए लोग	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	
धोती-कमीज पहने हुए लोग	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	
पैंट-सार्ट पहने हुए लोग	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	

निम्न प्रश्नोंर के उत्तर दो -

- किस प्रकार के कपड़े पहनकर कितने लोग आए थे ?
- ज्यादा पुरुष लोगों किस प्रकार के कपड़े पहने थे ?
- कुल कितने अभिभावक विद्यालय में आए हुए थे ?
- पैंट-शार्ट पहने हुए अभिभावकों की संख्या लुंगी-शार्ट पहने हुए अभिभावकों की संख्या से कितना ज्यादा है ?
- ऐसे कई और प्रश्न बनाओ और अपने दोस्तों से पूछो ।

12.5. विषम संख्याओं में मजा

- पहले दो विषम संख्याएँ लो ।
- उन दोनों को जोड़ो । योगफल कितना मिला ?

दो पहली विषम संख्याएँ हैं 1 और 3 । 1 और 3 का योगफल है 4 ।

1 + 3 = 4 = 2 x 2

> **क्या जानते हो ?**
> 2 x 2 = 4
> 3 x 3 = 9
> 4 x 4 = 16
> 4, 9, 16...... आदि संख्याओं को पूर्ण वर्ग संख्यक कहा जाता है । किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने से गुणनफल संख्या की पूर्ण वर्ग संख्या है ।

ध्यान दो, दो पहली विषम संख्याओं का योगफल एक सम संख्या है और यह एक पूर्ण वर्ग संख्या है ।

अब प्रथम तीन विषम संख्याओं को लेकर उनका योगफल निर्णय करो । क्या देखते हो ? यह किसका वर्ग है ?

1 + 3 + 5 = 9 = 3 x 3

इस तरह परवर्त्ती पंक्तियों में और एक-एक करके विषम संख्या लेकर तुम क्या पा रहे हो देखो ।

1 + 3 = 4 = 2 x 2
1 + 3 + 5 = 9 = 3 x 3
1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 x 4
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = ___ = ___ x ___
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = ___ = ___ x ___

तुम इस प्रकार कितना आगे जा पाओगे, जाओ ।

12.6 पूर्ण वर्ग संख्याओं का मजा

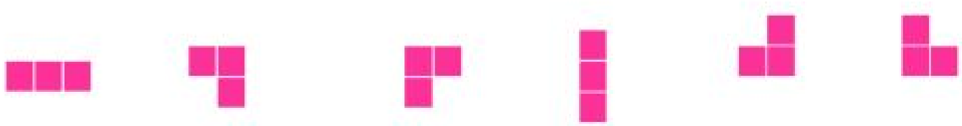
हम पहले से जान चुके हैं कि 1, 4, 9, 16... जैसी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं ।

आओ, इन संख्याओं को चित्र में दिखाएँ ।

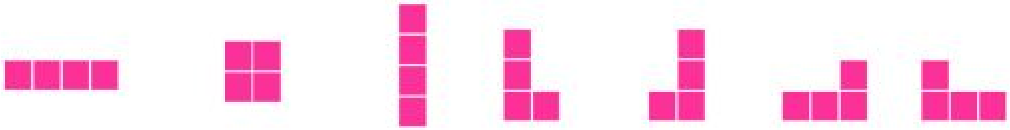
■ चिह्न एक 1 इकाई को दर्शाता है, इसलिए संख्या 1 को दर्शाने के लिए ■ व्यवहार किया जाएगा ।

वैसे ही, संख्या 2 को दर्शाने के लिए ■ ■ व्यवहार किये जाएँगे ।

संख्या 3 को दर्शाने के लिए तीन एक इकाई ■ जरूरी है । इसे अलग-अलग ढंग से दर्शाया जा सकता है।



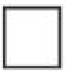
- इसी तरह 4 को चित्र के जरिए अलग-अलग ढंग से दर्शाया जा सकता है।

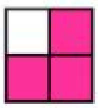


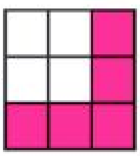
तुम ऐसे ही 5, 6, 7, 8, और 9 को विविध तरीकों से चित्र में दर्शाओ ।

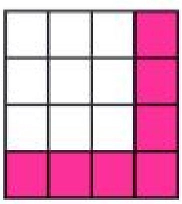
ध्यान दो, 4 और 9 की भाँति पूर्ण वर्ग संख्याओं को वर्ग चित्र में व्यक्त किया जा पाएगा । किंतु दूसरी संख्याओं को वर्ग चित्र में व्यक्त नहीं किया जा सकेगा ।

क्रमिक संख्याओं के वर्ग को वर्ग चित्र में व्यक्त करने का तरीका देखो -

$(1)^2 =$  $= 0 + 1 = 1$

$(2)^2 =$  $= 1 + 3 = 4$

$(3)^2 =$  $= 4 + 5 = 9$

$(4)^2 =$  $= 9 + 7 = 16$

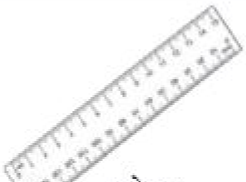
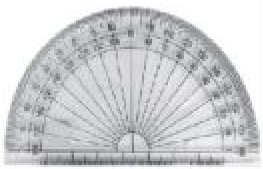
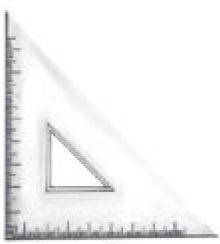
ध्यान दो, हरेक पूर्ण वर्ग संख्या को दो संख्याओं के योगफल में व्यक्त किया गया है ।

उसी क्रम में $(5)^2$ और $(6)^2$ को वर्ग चित्र में दिखते हुए एक पूर्ण वर्ग संख्या और विषम संख्या के योगफल में व्यक्त करो :

ज्यामितीय रचना

13.1 हमने जो सीखा है

तुम ज्यामिति बाक्स में स्थित सारे यंत्रों के नाम जानते हो । आओ, उनके कई प्रयोगो के बारे में जानेंगे :

	यंत्र के नाम	प्रयोग	
 स्केल	स्केल	• सरल रेखा और रेखाखण्ड अंकन • रेखाखण्ड का लंबाई मापना • खास माप का रेखाखण्ड अंकन	कंपास
 चाँद	चाँद	• प्रश्न कोण मापना • विभिन्न माप वाले कोण खींचना	सेटस्क्वोयर
 सेटस्क्वोयर	सेट स्क्वोयर	• रेखाखण्ड पर स्थित किसी बिंदु के प्रति लंब खींचना	विभाजक
	कंपास	• वृत अंकन • निर्दिष्ट माप का रेखाखण्ड अंकन	

बताओ तो :

विभाजक को किस-किस कामों में प्रयोग किया जाता है ?

पिछली कक्षा में तुमने स्केल का उपयोग करते हुए एक निर्दिष्ट माप के रेखाखण्ड का अंकन करना सीखा है । परकार के उपयोग से एक निर्दिष्ट लंबाई के रेखाखण्ड की रचना कैसे की जाती है, आओ चर्चा करें ।

उदाहरण - 1.

परकार का उपयोग करते हुए 5 से.मी लंबाई का एक रेखाखण्ड अंकन करो ।

पहला चरण :

पहले एक सरल रेखा का अंकन करो ।

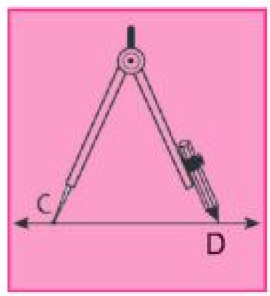
दूसरा चरण :

उसी सरलरेखा पर एक बिंदु अंकित करो, उसका नाम C दो ।

तीसरा चरण :

एक स्केल लो । स्केल के '0' चिह्न पर परकार का नुकीला भाग रखते हुए बरकार खोलकर पेंनसिल की नोंक को 5 पर रखो ।

चौथा चरण :



अब परकार को स्केल से निकाल लो । तुमसे पहले अंकन की गई सरल रेखा के 'C' बिंदु पर परकार का नुकीला भाग रखो । पेंनसिल की नोंक सरलरेखा के जहाँ पर रही, उसका नाम 'D' दो । अब $\overline{CD}$ रेखाखण्ड की लंबाई 5 से.मी. है ।

अभ्यास कार्य 13.1

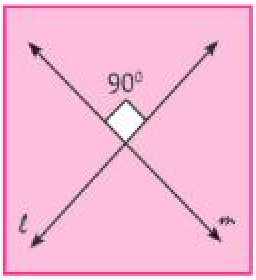
1. सिर्फ स्केल का उपयोग करते हुए 4.3 से.मी. और 6 से.मी माप का रेखाखण्ड अंकन करो ।
2. स्केल और परकार का उपयोग करते हुए 6.8 से.मी लंबाई का रेखाखण्ड अंकन करो ।
3. स्केल का उपयोग करते हुए 8 से.मी लंबाई के $\overline{AB}$ रेखाखण्ड अंकन करो । उस $\overline{AB}$ रेखाखण्ड से 4.5 से.मी लंबाई का $\overline{AC}$ रेखाखण्ड काट दो । $\overline{BC}$ की लंबाई कितनी है मापो ।
4. सिर्फ स्केल का उपयोग करते हुए 5 से.मी लंबाई का रेखाखण्ड अंकन करते हुए किस-किस चरणों से कार्य करोगे, लिखो ।

13.2. लंबाई और समष्टिभाजक लंब

दो रेखाखण्ड कब परस्पर के प्रति लंब बनेंगे ?

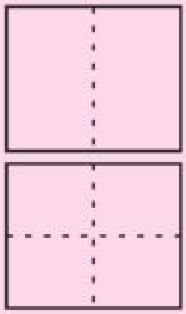
यदि दो रेखाखण्ड परस्पर को छेद करते हैं, तो छेदबिंदु पर 90° का कोण पैदा होता है । तो दोनों रेखाखण्ड परस्पर के प्रति लंब है ।

उस चित्र में *l* और *m* सरल रखा द्वय परस्पर के प्रति लंब हैं ।



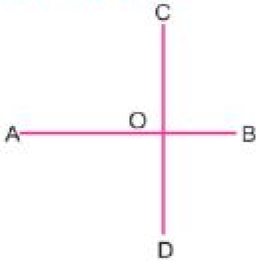
खुद करके देखो

- एक कागज का खंण्ड लो ।
- उसे पहले दो हिस्सों में मोड़ दो तथा मोड़ वाले स्थान पर दाग दो ।
- अब कागज को खोल दो ।
- कागज पर बने दोनों दाग परस्पर के प्रति लंब हैं।

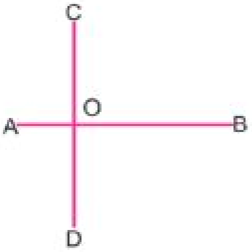


तुम आसपास के वातावरण में कहाँ-कहाँ लंब बन रहने का दृश्य देख रहे हो, लिखो ।

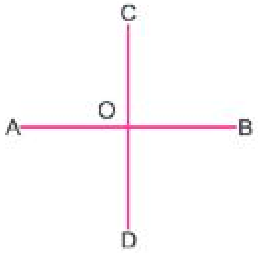
13.2.1 समष्टिभाजक लंब



पहला चित्र



दूसरा चित्र



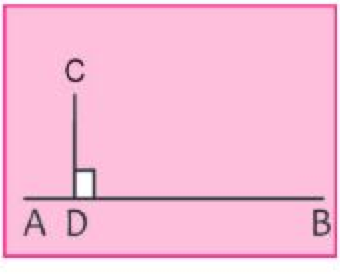
तिसरा चित्र

ऊपर दिए गए तीनों चित्रों को देखो । हरेक चित्रों में $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ को देखो । $\overline{AB}$ पर $\overline{CD}$ लंब अंकन होने से 'O' बिंदु $\overline{AB}$ को $\overline{AO}$ और $\overline{OB}$ के रूप में दो हिस्सों मे बाँट रहा है । पहले और दूसरे चित्र में $\overline{AO}$ और $\overline{OB}$ लंबाई बराबर नहीं है (माप कर देखो । परन्तु तीसरे चित्र में $\overline{AO}$ और $\overline{OB}$ की माप बराबर है । तीसरे चित्र में $\overline{CD}$ है $\overline{AB}$ का समष्टिभाजक लंब आओ, समष्टिभाजक लंब कैसे अंकन किया जाता है, सीखो ।

13.2 रेखाखण्ड का समष्टिभाजक लंब अंकन

दिए गए चित्र को देखो ।

यहाँ $\overline{AB}$ एक रेखाखण्ड है । $\overline{AB}$ रेखाखण्ड पर D एक बिंदु है। D बिंदु पर ∠CDB पैदा हुआ है । ∠CDB का माप 90° है, यहाँ $\overline{CD}$ है $\overline{AB}$ पर लंब । उसे ऐसे लिखा जाता है $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ।

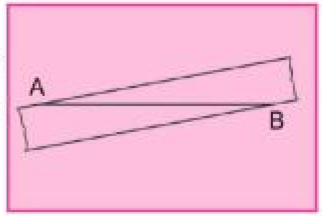


पहला चरण :

$\overline{AB}$ रेखाखण्ड अंकन करो

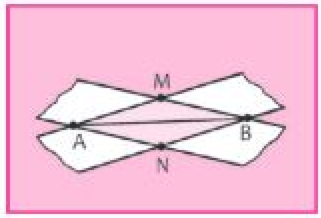
दूसरा चरण :

एक पारदर्शिक आयताकार टेप को ऐसे डालो जैसे कि रेखाखण्ड के दो प्रांत बिंदु A और B टेप के दोनों किनारो को छुएगा (टेप के बदले पारदर्शक (चिकना कागज भी उपयोग कर पाएँगे)।



तीसरा चरण :

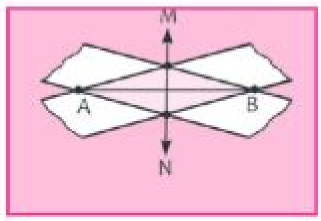
और एक आयतकार टेप लो । दूसरे चरण की तरह टेप को ऐसे रखो जैसे कि A और B बिंदु टेप के किनारे को छुएगा और चित्र में दिखाए जाने की भाँति टेप दोनों परस्पर को M और N बिंदुओं का छेद करेंगे ।



चौथा चरण :

$\overline{MN}$ अंकन करो । $\overline{AB}$ और $\overline{MN}$ जिस बिंदु पर परस्पर को छेद कर रहे हैं, उसका नाम P दो। P बिंदु पर पैदा हो रहे चारो कोणों का परिमाप निर्णय करो । $\overline{AP}$ और $\overline{BP}$ की लंबाई निर्णय करो । क्या पाया ?

यहाँ पर $\overline{MN}$, $\overline{AB}$ का समष्टिभाजक लंब है ।



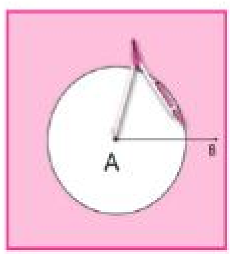
13.2.3 स्केल और परकार उपयोग करते हुए समष्टिभाजक लंब अंकन

पहला चरण :

किसी लंबाई वाला एक रेखाखण्ड $\overline{AB}$ अंकन करो ।

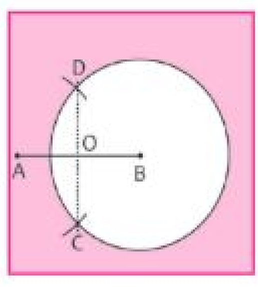
दूसरा चरण :

A को केन्द्र बिंदु और $\overline{AB}$ की लंबाई की आधे से ज्यादा माप वाली त्रिज्या लेकर वृत अंकन करो ।



तीसरा चरण :

पिछली त्रिज्या को न बदले हुए B बिंदु को केन्द्र बनाकर और एक वृत अंकन करो । पहले अंकन किए गए वृत को यह C और D बिंदुओं पर छेद करे ।



चौथा चरण :

$\overline{CD}$ अंकन करो । यह $\overline{AB}$ को O बिंदु पर छेद करे। O बिंदु $\overline{AB}$ को दो बराबर हिस्सों में बाँट रहा है या नहीं, परख कर देखो । O बिंदु पर पैदा हुए कोणों का परिमाण निर्णय करो । $\overline{CD}$ को $\overline{AB}$ का लंब समष्टिभाजक कहेंगा ? क्यों ?

परख कर देखो

$\overline{AB}$ की लंबाई के आधे से कम माप वाली त्रिज्या लेकर दूसरे और तीसरे चरणों में बनाए गए कार्य करो । क्या देख रहे हो ?

अभ्यास कार्य 13.2

1. 7.6 से.मी लंबाई वाले एक रेखाखण्ड अंकन करते हुए इसका लंब समष्टिभाजक लंब अंकन करो ।
2. 8.4 से.मी. लंबाई वाला एक रेखाखण्ड $\overline{AB}$ अंकन करो । इसे समष्टिभाजक बनाकर मध्यबिंदु को C नाम दो। अब $\overline{AC}$ और $\overline{BC}$ हरेक को समष्टिभाजक बनाओ । रेखाखण्ड कितने बराबर लंबाई वाले खण्डों में बदला । हरेक खण्ड की माप कितनी हो रही है मापकर देखो ।
3. (क) 4 से.मी त्रिज्या वाला एक वृत्त रचना करो । उसी वृत्त में एक जीवा की रचना करो । उसी जीवा का लंब समष्टिभाजक रचना करो। क्या यह वृत्त का केन्द्र बिंदु होकर जा रहा है ?

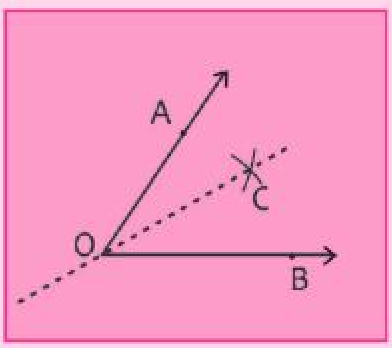
   (ख) किसी भी माप वाली त्रिज्या लेकर एक वृत्त रचना करो । उसकी एक जीवा रचना करते हुए उसकी लंब समष्टिभाजक रचना करो । क्या उसी लंब समष्टिभाजक वृत्त के केन्द्र से होकर जा रहा है ?

13.3 प्रदत्त कोण का समष्टिभाजक

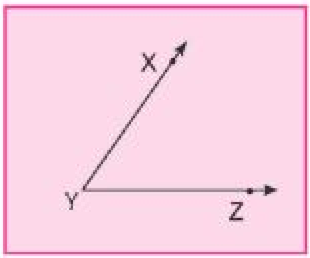
कागज मोड़कर, स्केल और परकार का उपयोग करते हुए हम किसी भी कोण का समष्टिभाजक निर्णय कर पाएँगे ।

खुद करके देखो

- एक आयतकार वाले कागज का पन्ना लो ।
- चित्र में दिए जाने की भाँति उसमें 'O' नाम देकर एक बिंदु अंकित करो ।
- 'O' को मूल बिंदु लेकर दो किरणों $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ अंकन करो।
- 'O' बिंदु से होकर कागज को ऐसे मोड़ो जैसे कि $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ एक-दूसरे पर रहेंगे ।
- कागज को मोड़ पर दवा दो और उसका $\overrightarrow{OC}$ नाम रखो ।
- अब देखो क्या $\angle AOC$ और $\angle BOC$ के परिमाण बराबर हो रहे हैं ? $\overrightarrow{OC}$ यानी है $\angle AOB$ का समष्टिभाजक हैं।



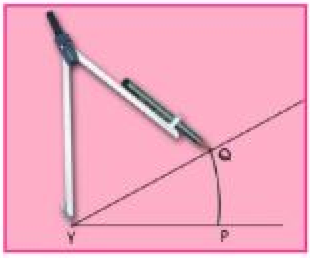
बगल वाले चित्र में ∠Y को दर्शाया गया है ।



अब बताओ ∠Y के शीर्ष और दो संलग्न भुजाओं के नाम क्या हैं ?

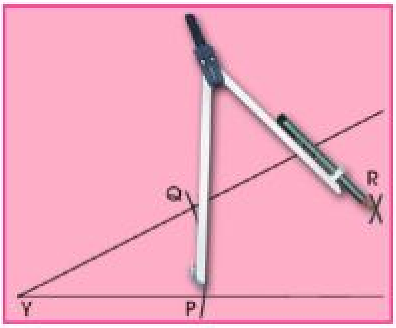
आओ, अब स्केल और परकार का उपयोग करते हुए कोण का समष्टिभाजक अंकन करेंगे ।

पहला चरण :



Y बिंदु को केन्द्र बनाकर परकार की सहायता से एक चाप अंकन करो Y जो कि दो संलग्न किरणों को छेद करेगा । दो बिंदुओं के नाम P और Q रखो ।

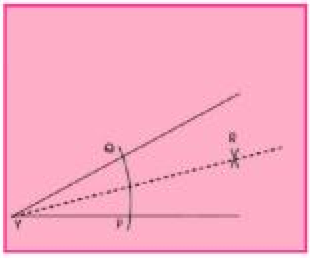
दूसरा चरण :



अब P को केन्द्र बनाकर ∠Y के अन्तर्भाग में एक चाप अंकन करो। (याद रखो-उसी की त्रिज्या $\overline{PQ}$ की लंबाई के आधे से ज्यादा हो रही होगी ।)

उसी तरह Q को केन्द्र बनाकर ∠Y के अन्तर्भाग में बराबर त्रिज्या का और एक चाप अंकन करो जैसे कि दूसरे चरण में अंकित चाप को यह छेद करेगा ।

तीसरा चरण :



छेद बिंदु का नाम R रखो । Y और R को जोड़ो ।

(परख कर देखो : $\overline{YR}$ है, ∠Yका समष्टिभाजक ।)

परख कर देखो :

P और Q बिंदुओं से Y के अन्तर्भाग में चाप अंकन करते समय दोनों बार बराबर त्रिज्या वाला चाप लेना पड़ता है । अलग-अलग त्रिज्या वाला चाप लेने से कोण का समष्टिभाजक पा रहे हो या नही, परख कर देखो।

अभ्यास कार्य 13.3

1. चाँद की मदद से 50° माप का एक कोण अंकन करो । इसका समष्टिभाजक अंकन करो ।

2. एक समकोण का समष्टिभाजक अंकन करो ।

3. 80° परिमाण का एक कोण अंकन करते हुए उसे चार बराबर हिस्सों मे बाँटो ।

13.4. परकार की सहायता से कोण रचना

चाँद की सहायता से कोण रचना करना हमने पहले सीखा है ।

चाँद का उपयोग करते हुए 60° परिमाण कि कोण-रचना करने के चरण लिखो ।

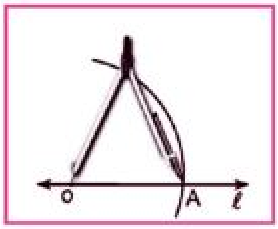
13.4.1 परकार की सहायता से 60° परिमाण की कोण रचना

पहला चरण :

एक सरल रेखा खींचो । उसका नाम *'l'* रेखो । *'l'* सरलरेखा पर 'O' बिंदु को दर्शाओ ।

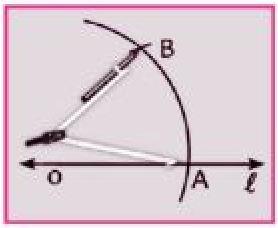
दूसरा चरण :

परकार के नुकीले भाग को 'O' पर रखो । किसी भी त्रिज्या वाला एक चाप अंकन करो, जो *'l'* सरल रेखा को 'A' बिंदु पर छुएगा।



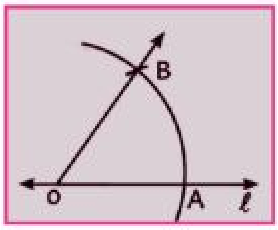
तीसरा चरण :

अब परकार की नोंक को 'A' पर रखकर पिछली त्रिज्या वाला एक चाप अंकन करो जो 'A' बिंदु से होकर पहले अंकन किए गए चाप को 'B' बिंदु पर छेद करेगा ।



चौथा चरण :

'O' और 'B' बिंदुओं को जोड़ो । तुम ∠AOB पाओगे, जिसकी माप है 60°, चाँद की सहायता से माप कर देखो ।



क्या जानते हो ?

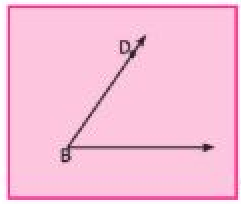
दूसरे चरण में अंकन किए हुए चाप और तीसरे चरण में अंकन किए हुए चाप दोनों की समान त्रिज्या रहेगी ।

13.4.2 120° माप वाला कोण रचना

हम जानते कि, 120° है 60° का दुगुना, इसलिए एक 60° माप की कोण रचना करते हुए उसके साथ और एक 60° माप की कोण रचना करने से दोनों कोण मिलकर 120° माप का कोण होंगे ।

- पहले 60° माप का कोण अंकन करो । जैसे चित्र (क) में ∠CBD 60° परिमाण वाला कोण ।

• अब $\overrightarrow{BD}$ पर B बिंदु से और एक 60° परिमाण का कोण अंकन करने से तुम 120° माप का एक कोण पाओगे ।

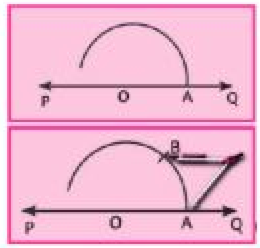


(क)

आओ, स्केल और परकार का उपयोग करते हुए कोण अंकन करो।

पहला चरण :

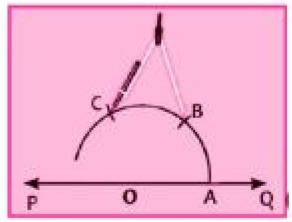
$\overleftrightarrow{PQ}$ अंकन करो, उस पर O बिंदु लो । O बिंदु को केन्द्र बनाकर कोई भी त्रिज्या लेकर चाप अंकन करो। वह $\overleftrightarrow{PQ}$ को A बिंदु पर छेद करे । A को केन्द्र बनाकर पूर्व परिचित त्रिज्या लेकर और चाप अंकन करो, जैसे कि यह पहले चाप को छेद करेगा । इस छेद बिंदु का नाम B रखो ।



(ख)

दूसरा चरण :

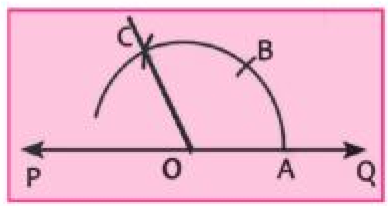
फिर B को केन्द्र बनाकर पूर्व परिमाण की त्रिज्या लेकर और एक चाप अंकन करो । जो पहले चाप को छेद करेगा। उसी छेद बिंदु का नाम C रखो ।



(ग)

तीसरा चरण :

C और O को जोड़कर $\overrightarrow{OC}$ अंकन करो । ∠COA का परिमाण 120° है । (चाँद के उपयोग से परख कर देखो ।)



(घ)

150° परिमाण की कोण कैसे अंकन करोगे ?

13.4.3 90° परिमाण की कोण रचना

पहला चरण :

$\overrightarrow{BY}$ किरण खींचो (चित्र)।

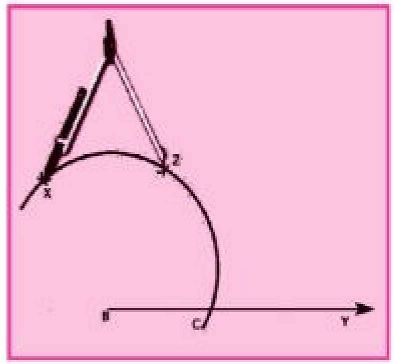
(ङ)

दूसरा चरण :

B को केन्द्र बनाकर आसान परिमाण की त्रिज्या लेकर किरण के ऊपरी भाग में एक दीर्घ चाप अंकन करो जैसे कि वह $\overrightarrow{BY}$ को छेद करेगा । छेद बिंदु का नाम दो C दो।

तीसरा चरण :

इसके बाद C बिंदु को केन्द्र बनाकर पूर्व त्रिज्या लेकर और एक चाप अंकन करो । और वह पहले चाप को छेद करे। इस छेद बिंदु का नाम Z रखो ।

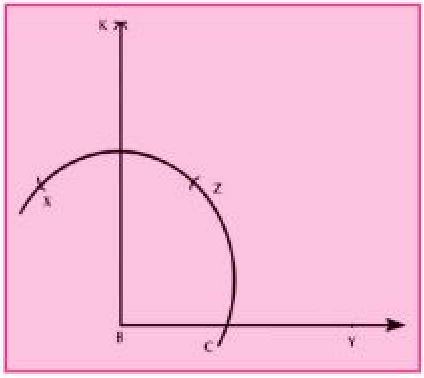


Z बिंदु को केन्द्र बनाकर और पूर्व त्रिज्या को लेकर और एक चाप अंकन करो, जो दीर्घ चाप को छेद करेगा । छेद बिंदु का नाम X रखो।

चौथा चरण :

अब Z बिंदु को मोड़ बनाकर और पूर्व त्रिज्या को लेकर एक चाप अंकन करो ।

X बिंदु को केन्द्र बनाकर और पूर्व त्रिज्या को लेकर और एक चाप अंकन करो जैसे कि यह पूर्व चाप को छेद करेगा। छेद बिंदु का नाम K रखो।



पाँचवा चरण :

अब $\overrightarrow{KB}$ अंकन किया जाय, ∠KBY की माप है 90° ।

∠KBY का परिमाण 90° है या नहीं, चाँद की सहायता से माप करके देखो ।

बताओ तो :

∠KBY का परिमाण 90° है या नहीं, जानने के लिए चाँद के अलावा और किस यंत्र का उपयोग किया जा पाएगा ?

अभ्यास कार्य 13.4

1. नीचे कई कोणों का परिमाण लिखा गया है । सिर्फ स्केल और परकार की सहायता से किस माप का कोण अंकन हो पाएगा, चुनकर लिखो ।

   60°, 35°, 40°, 90°, 30°, 110°, 45°, 20°, 15°, 75°, 100°, 150°,

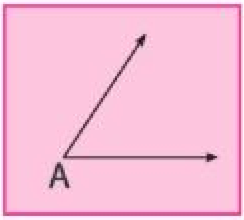
2. (क) स्केल और परकार की सहायता से 60° और 120° परिमाण के कोण अंकन करो ।

   (ख) 60° परिमाण का जो कोण अंकन किया, उसके चरणों को लिखो ।

3. स्केल और चाँद के उपयोग से 90° परिमाण का एक कोण अंकन करो । परकार की सहायता से उसे समद्विभाजक बनाओ ।

13.5 किसी कोण का समपरिमाण वाला एक दूसरा कोण अंकन : (स्केल और परकार की सहायता से)

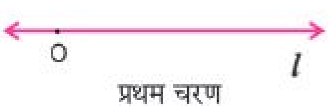
मान लो एक कोण दिया गया है (जिसका परिमाण हमें पता नही है) । उसी कोण के समपरिमाण का एक कोण अंकन करोगे । कैसे अंकन किया जाएगा ?



चित्र में ∠A दिया गया है, जिसका परिमाण पता नहीं है ।

पहला चरण :

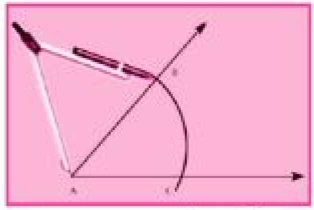
एक सरल रेखा *l* अंकन करेंगे । *l* सरल रेखा पर O बिंदु लेंगे । O बिंदु पर ∠A के सम परिमाण का कोण अंकन करेंगे ।



प्रथम चरण

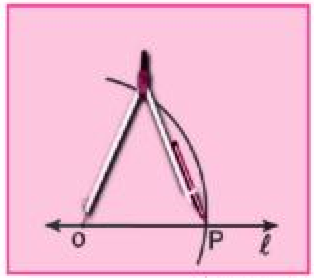
दूसरा चरण :

अब $\angle$A के शीर्ष बिंदु को केन्द्र बनाकर एक चाप अंकन करेंगे जो $\angle$A की दोनों भुजाओं को छेद करेगा । दोनों छेद बिंदुओं के नाम B और C दो ।


दूसरा चरण

तीसरा चरण :

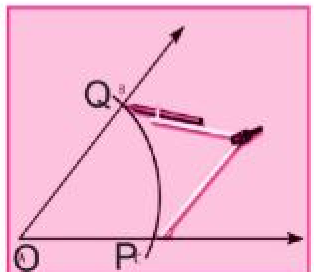
परकार को उसी भाँति रखते हुए (त्रिज्या न बदलकर) O को केन्द्र बनाकर एक चाप अंकन करो । जो *l* की को छेद करेगा । छेद बिंदु का नाम P दो।



तीसरा चरण

चौथा चरण :

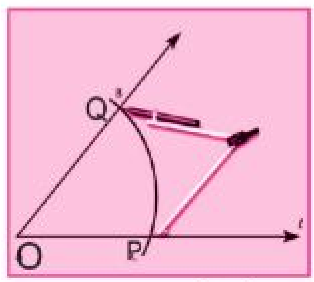
अब परकार के नुकीले भाग को और पेंनसिल की नोंक को ऐसे रखो, जैसे कि नुकीले भाग की नोंक B और पेंनसिल की नोंक C पर रहेगी ।



चौथा चरण

पाँचवा चरण :

चौथे चरण में परकार की नोक और पेंनसिल की नोंक के बीचवाली दूरी को अपरिवर्तित रखो । अब P बिंदु को केन्द्र बनाकर एक चाप अंकन करो जैसे कि यह तीसरे चरण में अंकित हुए चाप को छेद करेगा । छेद बिंदु का नाम Q दो ।



पांचवां चरण

छठवां चरण :

$\overrightarrow{OQ}$ अंकन करो । अब $\angle$POQ का परिमाण $\angle$BAC के परिमाण के बराबर है ।

खुद करके देखो

- एक सफेद कागज लेकर उस पर एक कोण अंकन करो ।
- और एक पारदर्शी कागज लेकर उसे उसी कोण पर डालो ।
- अब तुम्हारे अंकन किया गया कोण पारदर्शी कागज पर दिखाई देगा ।
- अब तुमसे अंकन किए गए कोण को पारदर्शी कागज पर अंकन करो । (स्केल का उपयोग करते हुए)
- अब सफेद कागज और पारदर्शी कागज पर समान परिमाण का कोण पाया ।

अभ्यास कार्य 13.5

1. (क) अपनी कॉपी में एक न्यून कोण और एक अधिक कोण रचना करो । परकार की सहायता से उन दो कोणों के सम परिमाण वाले कोण अंकन करो ।

   (ख) अब तुम्हें मिले दो कोणों को समद्विखण्ड करो ।

2. कागज काटकर एक त्रिभुज बनाओ । उसका नाम दो । उस त्रिभुज के तीनों कोणों के सम परिमाण के कोण अलग - अलग करके अपनी कॉपी में अंकन करो ।

13.6 परकार का उपयोग करते हुए एक प्रदत्त रेखा पर लंब रेखा का अंकन :

सेटस्क्वोयर का उपयोग करते हुए (क) एक रेखा पर एक बिंदु पर (ख) एक रेखाबहि:स्थ एक बिंदु से उस रेखा के प्रति लंब अंकन करना सीखा है । अब स्केल और परकार का प्रयोग करके उन दोनों कार्य करने का उपाय जानोगे ।

13.6.1. रेखाखण्ड उपरिस्थ बिंदु से होकर लंबरेखा अंकन :

(क) कागज मोड़ने का काम :

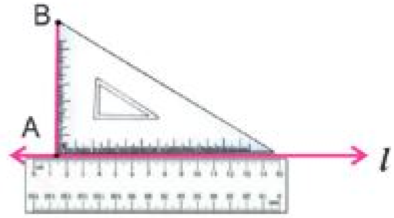
खुद करके देखो

- एक सफेद कागज (पारदर्शी कागज) लो ।
- उस पर एक रेखाखण्ड अंकन करो । उस रेखाखण्ड का नाम l दो ।
- l पर एक बिंदु A लो ।
- अब A बिंदु पर कागज को मोड़ दो जैसे कि मोड़ के दोनों ओर के रेखाखण्ड के हिस्से एक दूसरे पर रहेंगे ।
- अब कागज को खोल दो ।
- कागज पर पड़े मोड़ का चिह्न रेखाखण्ड पर लंब रेखा है ।
- यह लंब रेखा है या नहीं, परख कर देखो ।

(ख) सेटस्क्वोयर का व्यवहार करके लंब अंकन :

- आओ, अब स्केल और सेट स्क्वोयार की मदद से रेखाखण्ड के उपरिस्थ बिंदु से होकर रेखाखण्ड पर लंब अंकन करेंगे ।
- उस काम के लिए एक सफेद कागज, स्केल और सेटस्क्वोयर और पेंनसिल लाओ ।
- पहले सफेद कागज पर l नाम l से एक सरलरेखा अंकन करो । उस पर A बिंदु लो ।

- एक स्केल के किनारे *l* को सटाकर बलपूर्वक दबाए रखो ।
- चित्र में दिए जाने की भाँति सेटस्क्वोयर को स्केल के किनारे से मिलाए रखो, जैसे कि सेटस्क्वोयर के समकोण से जुड़ा एक किनारा स्केल से जुड़कर रहेगा ।
- अब सेटस्क्वोयर को स्केल के किनारे से लगाकर ऐसे रखो जैसे कि सेटस्क्वोयर का समकोण वाला शीर्ष A बिंदु पर रहेगा ।

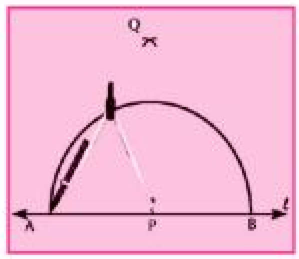


- अब सेटस्क्वोयर को अच्छी तरह से दबाकर A बिंदु से होकर, सेटस्क्वोयर के स्केल किनारे को न लगे किनारे को लगाकर किरण अंकन करते हुए उसका नाम $\overrightarrow{AB}$ दो ।
- $\overleftrightarrow{AB}$ आवश्याक लंबरेखा है ।

(ग) स्केल और परकार की मदद से निर्दिष्ट बिंदु पर रेखाखंड पर लंब अंकन :

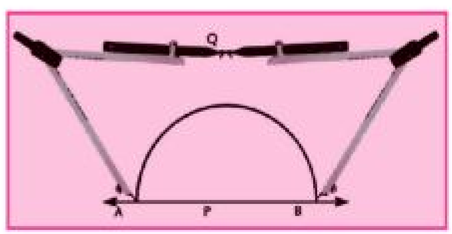
पहला चरण :

l सरल रेखा पर P बिंदु लो ।



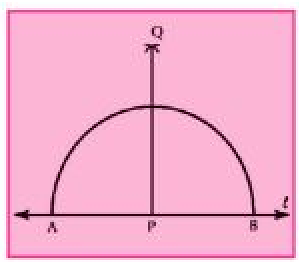
दूसरा चरण :

P को केंन्द्रबिंदु बनाकर किसी भी त्रिज्या वाला चाप अंकन करो, जैसे कि वह *l* को दो बिंदुओं पर छेद करेगा । छेदबिंदु द्वय के नाम A और B रखो ।



तीसरा चरण :

अब A और B को केन्द्रबिंदु बनाकर चित्र में दिए जाने की भाँति एक-दूसरे को बिंदु पर छेद करेंगे ।



चौथा चरण :

अब P और Q को जोड़कर $\overleftrightarrow{PQ}$ अंकन करो । $\overleftrightarrow{PQ}$ आवश्यक लंब रेखा है ।

13.6.2. सरलरेखा के बाहर वाले बिंदु से सरलरेखा पर लंब अंकन

(क) कागज मोड़ने का काम :

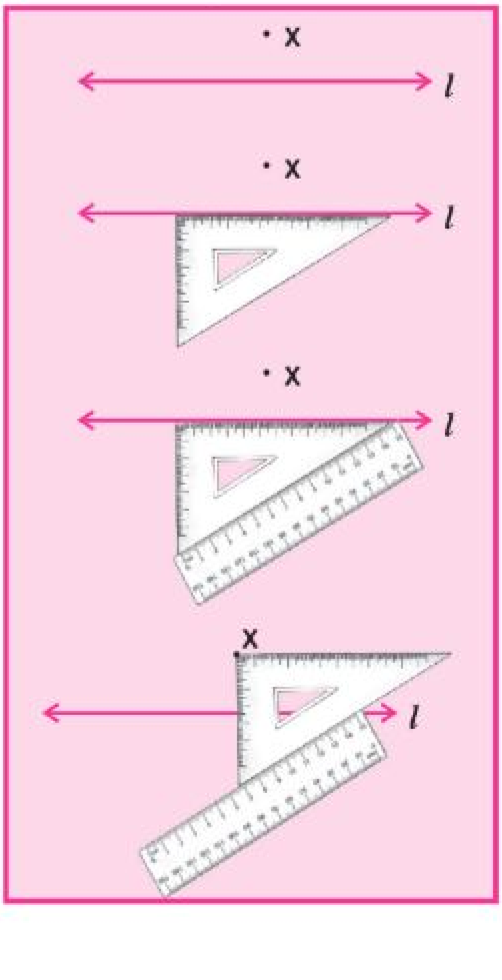
खुद करके देखो

- एक सफेद कागज लो । उस पर एक सरल रेखा अंकन करो और उसका नाम *l* दो ।
- सरल रेखा के बाहर एक बिंदु 'X' लो ।
- अब कागज को 'X' बिंदु से होकर ऐसे मोड़ो, जैसे कि मोड़ के दोनों ओर वाली सरल रेखा के दोनों हिस्से आपस में मिल जाएँगे ।
- जहाँ पर कागज को मोड़ो, वहाँ दबा दो ।
- अब कागज को खोल दो ।
- अब कागज पर बने मोड़वाले चिह्न *l* सरल रेखा पर लंब है ।

(ख) सेट्स्क्वोयर के प्रयोग से लंब अंकन

अबसेटस्क्वोयर और स्केल का प्रयोग करके सरलरेखा के बाहर बाले एक बिंदु से सरल रेखा पर कैसे लंब अंकन किया जाता है, जानेंगे-

- *l* नाम से एक सरल रेखा अंकन करो । इसके बाहर X नामक एक बिंदु लो ।
- *l* पर सेटस्क्वोयर ऐसे रखो, जैसे कि इसके समकोण से जुड़े एक किनारे *l* से जुड़ा रहेगा । दूसरा किनारा *l* पर लंब होगा ।
- सेटस्क्वोयर समकोण के विपरीत किनारे को लगाकर स्केल को रखो ।
- स्केल को स्थिर रखते हुए सेटस्क्वोयर को स्केल के किनारे पर ऐसे सरका लो, जैसे सेटस्क्वोयर की *l* रेखा से लंब वाला किनारा बिंदु X का छुएगा ।
- अब X बिंदु से होकर सेटस्क्वोयर के पूर्वोक्त किनारे को लगाकर एक रेखा अंकन करोगे, यह रेखा जहाँ पर *l* को छेद करेगा, उसका नाम Y दो।



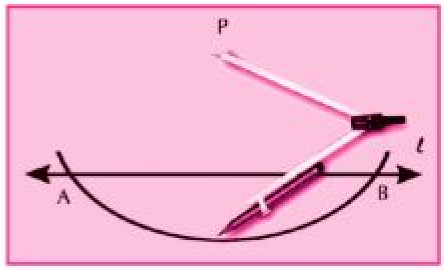
(ग) स्केल और परकार के उपयोग से सरलरेखा के बाहर वाले बिंदु से सरलरेखा पर लंब अंकन :

पहला चरण :

'l' नामक सरलरेखा लो । P बिंदु लो, जो *'l'* पर स्थित नहीं होगा ।

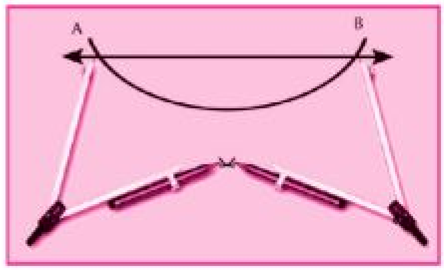
दूसरा चरण :

X को केन्द्र बनाकर ऐसा एक चाप अंकन करो, जो *'l'* को छेद करेगा । छेद बिंदु के नाम A और B रखो ।



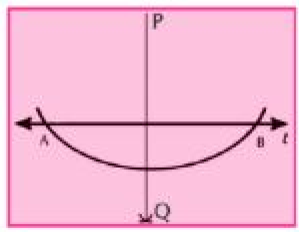
तीसरा चरण :

l त्रिज्या न बदलकर A और B बिंदुओं को केन्द्र बनाकर दो चाप अंकन करो । जैसेकि दोनों चाप एक-दूसरे को छेद करेंगे । छेद बिंदु का नाम Q दो ।



चौथा चरण :

अब $\overleftrightarrow{PQ}$ अंकन करो। $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$।



अभ्यास कार्य 13.6

1. $\overline{AB}$ रेखाखंड अंकन करो । इस पर X नामक बिंदु लो । X बिंदु पर रेखाखंड पर $\overline{AB}$ लंब अंकन करो (सिर्फ परकार और स्केल के उपयोग से)।

2. $\overline{XY}$ रेखाखंड अंकन करो । इस पर न होनेवाला A बिंदु लो । A बिंदु से $\overline{XY}$ पर लंब अंकन करने के चरणों को लिखो ।

3. $\overline{PQ}$ रेखाखंड अंकन करो । इस पर S बिंदु लो । S बिंदु पर $\overline{PQ}$ पर लंब अंकन करो । अब $\overline{PS}$ और $\overline{QS}$ की लंबाई मापो ।

4. 9 से.मी. लंबाई का एक रेखाखंड अंकन करो । इसका नाम $\overline{AB}$ रखो । $\overline{AB}$ पर न होने वाला S बिंदु लेकरं बिंदु S से पर $\overline{AB}$ लंब अंकन करो ।

अध्याय IV(क)
पारा 51(A) : बुनियादि प्रावधान

यह भारत के प्रत्येक नागरिक का कर्तव्य होगा :

(क) संविधान का पालन करना और उसके आदर्शों और राष्ट्रीय ध्वज, राष्ट्रीय गान और संस्थानों के प्रति सम्मान दिखाना;

(ख) हमारे राष्ट्रीय स्वतंत्रता संग्राम को प्रेरित करने वाले महान आदर्शों को याद रखना और उनका पालन करना;

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करना;

(घ) देश की रक्षा करना और यदि आवश्यक हो तो राष्ट्रीय सेवा प्रदान करना;

(ङ) भारत के सभी निवासियों के बिच धार्मिक, भाषाई, क्षेत्रीय या जातीय मतभेदों से परे सद्भाव और भाईचारा स्थापित करना और महिलाओं की गरिमा को कमजोर करने वाले कार्यों से बचना;

(च) हमारी विविध संस्कृति की बहुमूल्य विरासतों को महत्व देना और संरक्षित करना;

(छ) जंगलों, झीलों, नदियों, वन्य जिवन के प्राकृतिक पर्यावरण की रक्षा और सुधार करना और जीवित प्राणिओं के प्रति दयालु होना;

(ज) वैज्ञानिक मूल्यों, मानवतावाद और जांच और सुधार का दृष्टिकोण रखना;

(झ) सार्वजनिक संपति की रक्षा करना और हिंसा से बचना;

(ञ) प्रत्येक क्षेत्र में व्यक्तिगत और सामूहिक उत्कृष्टता के लिए प्रयास करना ताकि देश हमेशा उच्च प्रयासों और उपलब्धियों की ओर बढ़ता रहे ।

(ट) चाहे माता-पिता हो या अभिभावक, वे छह से चौदह वर्ष की आयु के अपने बच्चों या पालित बच्चों को शैक्षिक अवसर प्रदान करेंगे ।