गणित

सातवीं कक्षा

शिक्षक शिक्षा निदेशालय एवं
राज्य शैक्षिक अनुसंधान प्रशिक्षण परिषद
ओड़िशा, भुवनेश्वर

ओड़िशा विद्यालय शिक्षा कार्यक्रम प्राधिकरण,
भुवनेश्वर

गणित

सातवीं कक्षा

ओड़िआ लेखक मण्डली :

श्री मदन मोहन महान्ति

डॉ: नलिनीकान्त मिश्र

डॉ: निवेदिता नायक

डॉ: तापस कुमार नायक

श्री दिल्लीप कुमार साहु

संयोजना :

डॉ: प्रीतिलता जेना

डॉ: तिलोत्तमा सेनापति

डॉ: सबिता साहु

ओड़िआ समीक्षक मण्डली :

श्री मदन मोहन महान्ति

डॉ: तापस कुमार नायक

डॉ: बामदेव त्रीपाठी

अनुवादक मण्डली :

प्रो. राधाकान्त मिश्र

प्रो. स्मरप्रिया मिश्र

डॉ. स्नेहलता दास

डॉ. लक्ष्मीधर दाश (अनुवादक)

डॉ. अजित प्रसाद महापात्र (पुनरीक्षक)

संयोजना :

डॉ: सबिता साहु

प्रकाशक :

विद्यालय और गणशिक्षा विभाग, ओड़िशा सरकार

मुद्रण वर्ष : २०२१

मुद्रण : पाठ्य पुस्तक उत्पादन और बिक्रय, भुवनेश्वर

प्रस्तुति : शिक्षक शिक्षा निर्देशालय एवं
राज्य शिक्षा गवेषणा और प्रशिक्षण परिषद,
ओड़िशा, भुवनेश्वर

जगतमाता के चरणों पर अब तक मैं जो-जो भेंट देता हूँ, उनमें से मौलिक शिक्षा मुझे सबसे अधिक क्रान्तिकारी और महत्वपूर्ण लगती है। इससे अधिक महत्वपूर्ण और मूल्यवान भेंट मैं जगत के सामने रख सकूँगा, वह मुझे प्रत्यय होता नहीं। इसमें मेरे सारे रचनात्मक कार्यक्रमों के प्रयोगात्मक करने की चाबी है। जिस नई दुनिया के लिए मुझे दर्द होता है वो इस से ही प्रकट हो सकेगा। यह मेरी अन्तिम अभिलाषा है।

-महात्मा गान्धी

भारत का संविधान

प्रस्तावना

हम भारतवासी भारत को एक सार्वभौम, समाजवादी, धर्म-निरपेक्ष, गणतान्त्रिक साधारण-तन्त्र के रूप में गठन करने के लिए दृढ़ संकल्प लेकर और यहाँ के नागरिकों को -

- सामाजिक अर्थनैतिक और राजनीतिक न्याय;
- चिन्तन, अभिव्यक्ति, प्रत्यय, धार्मिक विश्वास और उपासना की स्वतन्त्रता देने;
- स्थिति और सुविधा में समानता की सुरक्षा प्रदान करने तथा;
- व्यक्ति मर्यादा और राष्ट्र के ऐक्य तथा संहति निश्चित कर उनके बीच भाई-चारे का भाव जगाने के लिए

इस 1949 ई. के नवेम्बर 26 तारीख के दिन हम अपने संविधान प्रणयन सभा में इस संविधान को ग्रहण एवम् प्रणयन करते हैं तथा हम अपने को समर्पित करते हैं।

सूचीपत्र

अध्याय	प्रसंग	पृष्ठा संख्या
प्रथम	पूर्णांक	1
द्वितीय	भग्नसंख्या और दशमिक संख्या	30
तृतीय	मौलिक ज्यामितिक चित्र	55
चतुर्थ	घाताङ्क और घातराशि	74
पंचम	परिमेय संख्या	86
षष्ठ	बीज गणित	113
सप्तम	त्रिभूज का धर्म	133
अष्टम	व्यावहारिक गणित	145
नवम	प्रतिसमता और सर्वसमता	176
दशम	परिमिति	202
एकादश	तथ्य परिचालना	223
द्वादश	ज्यामितिक अंकन	230

MATHMATICIAN RAMANUJAN : (1887-1920)

Childhood and Early Life

He was born on 22 December 1887 into a Tamil Brahmin Iyengar family in Erode, Madras Presidency (now Tamil Nadu, India) at his maternal grandparent's residence. His father was K. Srinivasa Iyengar, an accounting clerk for a clothing merchant, and his mother was Komalatammal, a housewife and sang at a local temple.

The family was of high caste and was very poor. Srinivasa Ramanujan's parents moved around a lot, and so he attended a variety of different elementary schools.

In November 1897, he passed his primary examinations in English, Tamil, geography, and arithmetic, and gained vest scores in the district. He entered Town Higher Secondary School in the same year and encountered formal mathematics for the first time.

Discovery as a Mathematician of Genius

At the age of 11, he had taken the mathematics knowledge of two college students who were lodgers at his home. Later, he lent a book written by S. L. Loney on advanced trigonometry. By the age of 13, he had mastered it and discovered his theorems on his own.

At 14 years of age, he received merit certificates and academic awards that continued all through his school career. Also, he completed an exam in mathematics in half of the allotted time and showed familiarity with geometry and infinite series.

In 1902, he showed how to solve cubic equations. He also developed his own methods.

At the age of 15, he obtained a copy of George Shoobridge Carr's Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics, 2 vol. It consists of thousands of theorems. He studied the contents of the book in detail and went beyond and developed his own theorems and ideas. This book acts as a key element in awakening his genius. It is said that he independently developed and investigated the Bernoulli numbers and calculated the Euler-Mascheroni constant up to 15 decimal places.

He secured a scholarship in 1903 to the University of Madras but lost it in the following years due to the negligence of all other studies in pursuit of mathematics. He met with the founder of the Indian Mathematical Society, V Ramaswamy Aiyer in 1910 and began to gain recognition in Madras mathematical circles and leading to his inclusion as a researcher at the University of Madras.

Marriage and Career in Mathematics

In July 1909, he married Janakiammal. He became ill and went to surgery around 1910. After his successful surgery, he searched for a job. He also tutored students at Presidency College in Madras who were preparing for their Fellow of Arts exam. In 1910, he met V. Ramaswamy Aiyer, who founded the Indian Mathematical Society. He convinced him and luck favours. And as a result, with the help of Aiyer, his work had been published in the Journal of the Indian Mathematical Society.

He got the job in 1912 as an accounting clerk with the Madras Port Trust and his financial condition improved.

His intelligence and genius slowly gained recognition and he began a correspondence in 1913 with the British mathematician Godfrey H. Hardy that led to a special scholarship from the University of Madras and a grant from Trinity College, Cambridge.

Life in England

He travelled to England in 1914, where Hardy tutored him. He collaborated with him on some research work. He brought his notebooks from India which were filled with thousands of identities, equations, and theorems that he discovered for himself in the years 1903 to 1914. Some were discovered by earlier mathematicians; some through inexperience, were mistaken, and many were entirely new.

He had very little formal training in mathematics. He spent around 5 years in Cambridge collaborating with Hardy and Littlewood and published part of his findings there.

Major Works

He worked in several areas including the Riemann series, the elliptic integrals, hypergeometric series, the functional equations of the zeta function, and his own theory of divergent series, in which he discovered a value for the sum of such series using a technique he invented and came to be known as Ramanujan summation.

He also made several advances in England, mainly in the partition of numbers (the various ways that a positive integer can be expressed as the sum of positive integers; e.g. 4 can be expressed as 4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, and 1 + 1 + 1 + 1).

His papers were published in English and European Journals. He was elected to the Royal Society of London in 1918 and became the second Indian. He was also elected "for his investigation in elliptic functions and the Theory of Numbers."

In October 1918, he was the first Indian to be elected a Fellow of Trinity College, Cambridge.

He is also known for Landau–Ramanujan constant, Mock theta functions, Ramanujan conjecture, Ramanujan prime, Ramanujan–Soldner constant, Ramanujan theta function, Ramanujan's sum, Rogers–Ramanujan identities, Ramanujan's master theorem, and Ramanujan–Sato series.

1729 is famous as Hardy-Ramanujan number and generalisation of this idea have generated the notion of "Taxicab numbers".

Illness and Death

He contracted tuberculosis in 1917. His condition improved so that he could return to India in 1919. He died the following year. He left behind three notebooks and some pages, also known as the "lost notebook" that contained various unpublished results. Mathematicians continued to verify these results after his death.

प्रथम अध्याय

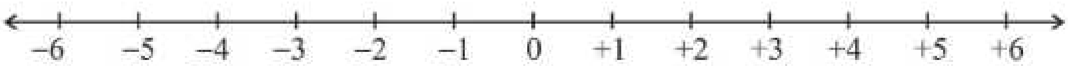
पूर्णांक

1.1. हमें जो ज्ञात है :

हम पिछली कक्षा में प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्या (शून्य '0' सहित सभी प्राकृत संख्याएँ) और पूर्णांक (ऋणात्मक संख्याओं के साथ पूर्ण संख्या) के बारे में पढ़ चुके हैं। इन पूर्णांक संख्याओं में आने वाली ऋणात्मक संख्याओं को संख्यारेखा पर चिह्नित करना भी जानते हैं। पूर्णांकों को क्रमबद्ध करके लिख सकते हैं । पूर्णांकों का जोड़ और घटाव करना भी सीख चुके हैं।

आओ, उन्हें हम फिर से याद करें :

1. निम्नलिखित संख्या-रेखा को देखकर पूछे गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।



(क) + 2 से 3 बड़ी संख्या कौन-सी है ?

(ख) - 3 से 7 बड़ी संख्या कौन-सी है ?

(ग) कौन-सी संख्या + 4 से 7 कम है ?

(घ) 0 से 5 बड़ी संख्या कौन-सी है ?

(ङ) कौन-सी संख्या 0 से 4 कम है ?

(च) + 5 से छोटी संख्या का सूचक बिन्दु + 5 सूचक बिंदु के किस ओर रहेगा ?

(छ) दो संख्याओं को चिह्नित करो, जिन दो संख्याओं का अंतर 8 होगा। क्या ऐसी अधिक जोड़ी-संख्या मिल सकेगी ?

(ज) - 3 और + 2 के बीच कितना अंतर है ?

(झ) संख्या-रेखा पर - 4 से + 3 तक रहनेवाली इकाई संख्याएँ कितनी हैं ?

(ञ) संख्या-रेखा पर + 4 से - 3 तक रहनेवाली इकाई संख्याएँ कितनी हैं ?

क्या आप जानते हैं ?
- 4 से + 3 तक की इकाई संख्या पाने के लिए हम संख्या रेखा पर - 4 से + 3 तक के खाने गिनेंगे। हमें जितने खाने मिलें, इकाई संख्याएँ उतनी ही होंगी ।

2. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(क) + 5 और + 8 का जोड़ कितना है ?

(ख) - 3 और + 8 का जोड़ कितना है ?

(ग) - 7 और + 5 का जोड़ कितना है ?

(घ) - ४ और - ७ का जोड़ कितना है ?

क्या आप जानते हैं ?

- संख्या-रेखा की मदद से किसी संख्या के साथ किसी धनात्मक संख्या जोड़ते समय हम दाईं ओर जाएँगे ।
- संख्या-रेखा की मदद से किसी संख्या से किसी धनात्मक संख्या का घटाते समय हम बाईं ओर जाएँगे।

(ङ) + 8 से + 3 घटाइए।

(च) + 5 से + 7 घटाइए।

(छ) + 7 से + 12 घटाइए।

(ज) + 5 से + 3 घटाइए।

(झ) - 4 से + 8 घटाइए।

(ञ) - 5 से - 4 घटाइए।

(ट) क्या एक पूर्णांक से उससे बड़ी पूर्णांक को घटाया जा सकेगा ?

(ठ) हम शून्य से + 8 घटा सकेंगे ? यदि संभव है, तब उत्तर क्या होगा ?

(ड) + 8 के साथ - 3 जोड़ने से जितना होगा, + 8 से कौन-सी संख्या घटाने से वही होगा ?

(ढ) - 3 से - 4 घटाने से वियोग फल जो होगा, - 3 के साथ कितना जोड़ने से योगफल वही होगा ?

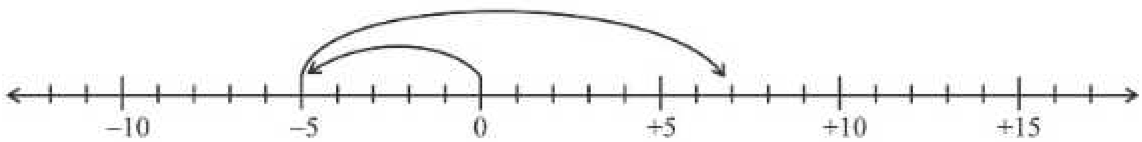
हम जानते हैं

संख्या- रेखा की मदद से एक ऋणात्मक संख्या को जोड़ते समय हमें बाईं ओर जाना पडेगा। उसी प्रकार संख्या-रेखा की मदद से एक ऋणात्मक संख्या घटाते समय हमें दाईं ओर जाना पड़ेगा।

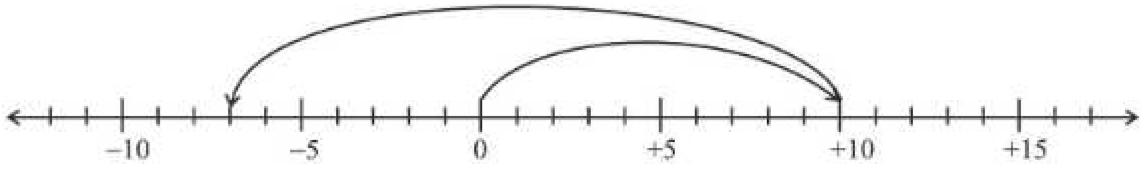
अभ्यास-1.1

1. निम्न संख्या-रेखा पर दर्शाई गई संक्रिया और उसका परिणाम लिखिए।

(क)



(ख)



2. बगल के मानचित्र में विभिन्न स्थानों के निश्चित दिन के न्युनतम तापमान के डिग्री सेलसियस (0°) में दर्शाया गया है । इसे ध्यान में रखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(क) किस स्थान का तापमान सबसे अधिक है ?

(ख) किस स्थान का तापमान सबसे कम है ?

(ग) किस स्थान का तापमान उटी के तापमान से 8 डिग्री कम है ?

(घ) श्रीनगर और उटी के तापमान में कितना अंतर है ?

(ङ) किन दो स्थानों के तापमान में अंतर 22 डिग्री है ?

3. एक सामान्य-ज्ञान-प्रतियोगिता की परीक्षा में एक प्रश्न के सही उत्तर के लिए + 1 अंक और गलत उत्तर के लिए - 1 अंक दिया जाता है । हर प्रतिभागी को चार पारियों से प्रश्न पूछे जाते हैं । हर पारी में 25 प्रश्न पूछे जाते हैं। मनिषा से चारों पारियों में पूछे गए प्रश्नों के लिए क्रमश: 7, - 3, 5 और - 5 अंक मिले । तब उसे कुल कितने अंक प्राप्त हुए ?

4. एक ही समय में एक हवाई जहाज समुद्र के सतह से 5000 मीटर की ऊँचाई पर जब उड़ रहा था, उसी समय एक पनडूब्बी समुद्र के सतह से 1500 मी की गहराई में जा रही थी । उसी समय उन दोनों की दूरी कितनी है?

5. कितनी मायावी वर्ग में दाईं ओर से बाईं ओर, ऊपर से नीचे की ओर या एक कोने से विपरीत कोने की ओर रहने वाली संख्याओं का योग बराबर होता है । अब बताइए, नीचे दिए गए दोनो मायावी वर्गों में से कौन-सा वर्ग एक मायावी वर्ग इस संबंध के अनुसार सही है ?

+2	−8	0
−3	+1	−4
+4	−6	−7

−7	+4	−6
−2	−3	−4
0	−10	+1

6. a और b के लिए निम्न लिखित संख्याओं को लेकर $a - (-b) = a + b$ की सत्यता की जाँच कीजिए ।

(क) $a = 12, b = 15$ (ख) $a = 225, b = 321$

(ग) $a = -8, b = 0$ (घ) $a = -18, b = +16$

7. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(क) $+5 + (-7) - (-3)$ (ख) $-18 + (-3) - 12$

(ग) $+25 - (+7) + (-18)$ (घ) $-35 - (-20) + (-14)$

8. श्यामली अपने घर से 25 मीटर पूर्व की दिशा में जाने के बाद वहीं से 27 मीटर पश्चिम की दिशा को लौट गई । तब वह अपने घर से किस दिशा में और कितनी दूरी पर पहुँची ?

9. (क) जोड़ बताइए :

$-8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1$

(ख) संख्याओं को पहले से जोड़ते हुए ओग बढ़कर योगफल बताइए ।

(ग) जोड़ बताइए :

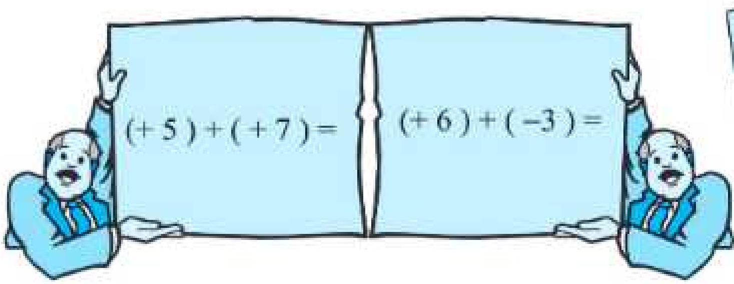
$(-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + (+1) + (+2) + (+3) + (+4)$

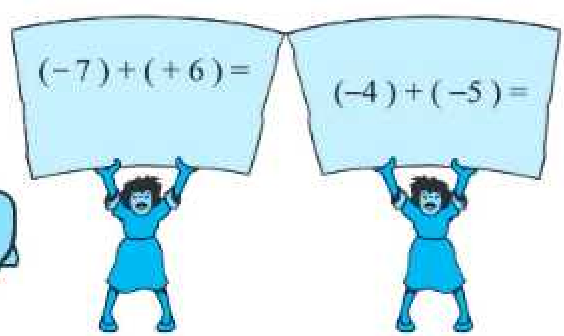
1.2. पूर्णांकों की योग संक्रिया के विभिन्न गुण,

आइए, पूर्णांकों की योग-संक्रिय। के संबंध में चर्चा करेंगे, जोड़ बताइए :

(क) $(+5) + (+7) =$ (ख) $(+6) + (-3) =$

(ग) $(-7) + (+6) =$ (घ) $(-4) + (-5) =$





अब जो योगफल मिले, वे किस प्रकार की संख्याएँ हैं ?
इससे हमें क्या पता चला ? दोस्तों से चर्चा करके बताइए।
हमें पता चला कि :

दो पूर्णांकों का योगफल हमेशा एक पूर्णांक होगा ।

इसलिए हम कहते हैं, योग संक्रिया में संवृत के गुण का पालन होता है ।

खुद करके देखिए:

जोड़ निकालिए :

(क) $(+3)+(+5) =$, $(+5)+(+3) =$

(ख) $(+8)+(-7) =$, $(-7)+(+8) =$

(ग) $(-3)+(+4) =$, $(+4)+(-3) =$

(घ) $(-4)+(-2) =$, $(-2)+(-4) =$

प्रत्येक पंक्ति में दोनों क्षेत्रों में जोड़ क्या योगफल समान होता है ?

हमने देखा :

$(+3)+(+5)=+8$ और $(+5)+(+3)=+8$

अर्थात् (+ 3) के साथ (+ 5) जोड़ने से योगफल जो होगा (+ 5) के साथ (+ 3) जोड़ने से योगफल वही होगा ।

अन्य तीनों योगफल भी ऊपर के उदाहरण के अनुसार तय कीजिए । इससे आपने क्या सीखा ?

ध्यान दें :

दो पूर्णांकों का क्रम बदलकर जोड़ने पर भी योगफल में कोई बदलाव नहीं आता ।

हम एक पूर्णांक को a और दूसरे पूर्णांक को b की तरह् संकेत द्वारा सूचित करें तो, ऊपर कही गई बाते की तरह कह सकते हैं।

$$\mathbf{a+b=b+a}$$

इसलिए हम कहते हैं, पूर्णांकों के लिए योग में क्रम विनिमय गुण होता है ।

खुद करके देखिए:

आइए, नीचे दी गई तीनों पूर्णांक संख्याओं का योगफल तय करें :

$(-3)+\{(-5)+(-2)\} =$

$\{(-3)+(-5)\}+(-2) =$

- पहली स्थिति में योगफल कितना हुआ ?
- दूसरी स्थिति में योगफल कितना हुआ ?
- दोनों स्थितियों में क्या योगफल समान हुआ ?
- इससे आपने क्या सीखा ?

अर्थात् तीन संख्याओं को जोड़ते समय उन तीनों में से किन्हीं दो को पहले जोड़कर उसके योगफल को बची तीसरी संख्या के साथ जोड़ने पर एक ही योगफल मिलता है ।

हमें प्राकृत संख्या के क्षेत्र में तीन संख्याओं के जोड़ के बारे में भी यह मालूम था ।

तीनों संख्याओं को a, b और c संकेत द्वारा सूचित करने से ऊपर योग का जो धर्म हमने देखा था, उसे ऐसे कह सकते है :

a, b, c तीन पूर्णांक हों तो
$\mathbf{a+(b+c)=(a+b)+c}$ होगा।

अर्थात् पूर्णांक के लिए योग में साहचर्य गुण होता है।

- हम पहले से जानते हैं,

$5+0=5$
$9+0=9$
$74+0=74$

और भी कह संकते है :

$(-3)+0=(-3)$

क्या आप जानते हैं ?
शून्य (0) योज्य को तत्समक कहते है।

अब आप बताइए:

(i) $(-7)+0 = ?$　　(iii) $(-27)+0 = ?$

(ii) $(-12)+0 = ?$　　(iv) $0+(-43) = ?$

एक पूर्णांक के लिए संकेत a का व्यवहार करके हमने ऊपर योग संक्रिया का जो गुण देखा, उसे इस प्रकार कह सकते हैं।

a एक पूर्णांक होने से
$\mathbf{a+0=0+a=a}$

हमने देखा कि एक पूर्णांक के साथ (0) शून्य को जोड़ने से, योगफल वही मूल पूर्णांक के साथ समान होता है । योग के इस गुण को योज्य तत्समक गुण कहते हैं।

नीचे दी गई संख्याओं को जोड़कर योगफल बताइए :

(i) $(+5)+(-5) =$

(ii) $(+8)+(-8) =$

(iii) $(-12)+(+12) =$

(iv) $(-15)+(+15) =$

अब बताइए,
निम्न उक्तियों में द्वारा चिह्नित स्थान पर क्या लिखा जाएगा ?

(i) $(-7)+(*) = -7$

(ii) $(*)+(-4) = -4$

(iii) $(-18)+(*) = -18$

(iv) $(*)+(-28) = -28$

हमने देखा कि पूर्णांकों में प्रत्येक धनात्मक संख्या के लिए, ऐसी एक ऋणात्मक संख्या है, जैसे कि मूल संख्या के साथ उसी संख्या को जोड़ने से योगफल शून्य होगा । वैसे पूर्णांकों में प्रत्येक ऋणात्मक संख्या के लिए ऐसी एक धनात्मक संख्या है, जैसे कि मूल संख्या के साथ उसी संख्या को जोड़ने से योगफल शून्य होगा । ऐसे दो संख्याओं को परस्पर की विपरीत संख्या कहा जाता है, अर्थात् दो परस्पर विपरीत संख्याओं का योगफल शून्य ही होता है ।

क्या आप जानते हैं ?
+ 4 को विपरीत संख्या (- 4) है
(-5) की विपरीत संख्या + 5 है ।

ऐसी दोनों संख्याओं को परस्पर **योज्य प्रतिलोम** कहते हैं।

संकेत व्यवहार करके हम उपयुक्त बात को निम्नप्रकार से कह सकते हैं:

a
$a+(-a)=(-a)+a=0$

पूर्णांक के लिए योग-संक्रिया का यह गुण प्रतिलोम गुण कहलाता है।

बोलिए :
योग संक्रिया का प्रतिलोम गुण प्राकृत संख्या में क्यों नहीं था ?

✍ उत्तर लिखिए :

1. दो पूर्णांक लिखिए जिनका योगफल एक ऋणात्मक संख्या हो ।
   (क) दोनों में से एक धनात्मक और दूसरी ऋणात्मक होगी ।
   (ख) दोनों संख्याएँ ऋणात्मक पूर्णांक होंगी।
   (ग) दोनों में से एक शून्य होगा ।
2. ऐसे दो पूर्णांक लिखिए, जिनका योगफल :
   (क) आपने जो संख्याएँ लिखी हैं, उनमें से छोटी होगी ।
   (ख) आपने जो संख्याएँ लिखी हैं, उनमें से एक से छोटी हैं और दूसरी से बड़ी हो।
   (ग) आपने जो संख्याएँ लिखी हैं, उन दोनों में से बड़ी है ।
3. दो पूर्णांक लिखिए, जैसे कि दोनों का वियोगफल
   (क) एक ऋणात्मक संख्या हो।
   (ख) लिखी गई प्रत्येक संख्या से बड़ा हो।
   (ग) लिखी गई प्रत्येक संख्या से छोटी हो।
   (घ) शून्य हो ।

क्या आप जानते हैं?
$(-3)+(-5)=-8$ । इस योग संक्रिया में जोड़, जोड़ी गई प्रत्येक संख्या से कम है।

1.3. घटाव (व्यवकलन) संक्रिया के विभिन्न गुण

(क) आइए, दो पूर्णांकों का वियोगफल तय करें। खाली खानों में वियोगफल लिखिए ।

(i) $(+5)-(+3) = \square$ (ii) $(+8)-(-2) = \square$

(iii) $(+2)-(+5) = \square$ (iv) $(-3)-(-4) = \square$

(v) $(-5)-(-2) = \square$ (vi) $(-4)-(-4) = \square$

ऊपर के वियोगफल प्रत्येक एक-एक पूर्णांक है ।

इससे हमने क्या जाना, बताइए और लिखिए। हम जान गए कि दो पूर्णांकों का वियोगफल एक पूर्णांक है । अर्थात् पूर्णांकों में वियोगफल संक्रिया में संवृत्ति गुण का पालन होता है ।

दो पूर्णांकों के लिए a और b को संकेत के रूप में व्यवहार करके संवृत्ति गुण को इस प्रकार लिखा जा सकता है ।

a और **b** दोनों पूर्णांक हो
a – b सदैव एक पूर्णांक होगा ।

अब बताइए :
क्या प्राकृत संख्याओं में आपने वियाग-संक्रिया को संवृत्त गुण का पालन करते हुए देखा है ?
इसका कारण क्या है ?

याद रखिए :

5 + (- 3) जो 5 - 3 है ।

अर्थात् 5 + (- 3) = 5 - 3

ध्यान दें, 5 + (- 3) यहाँ एक योग संक्रिया है । इसे 5 - 3 के रूप में लिखा जा सकता है । (5 - 3) एक वियोग संक्रिया है । कहा जा सकता है कि पूर्णांक के क्षेत्र में प्रत्येक योग-संक्रिया को वियोग-संक्रिया के रूप में दर्शाया जा सकता है ।

हम जान गए हैं कि पूर्णांकों में योग संक्रिया में क्रम-विनिमय गुण, साहचर्य गुण और योज्य तत्समक गुण लागू होते हैं। पूर्णांकों की वियोग-संक्रिया में क्या वे गुण लागू होते हैं ? खुद परीक्षण कीजिए।

अभ्यास- 1.2

1. नीचे दी गई उक्तियों को पढ़िए। सही उक्ति के पास '✓' निशान और गलत उक्ति के पास '×' निशान दीजिए ।

   (क) दो पूर्णांकों का योगफल सदैव पूर्णांक होता है ।

   (ख) दो पूर्णांकों का वियोगफल सदैव ऋणात्मक संख्या होती है ।

   (ग) पूर्णांक के क्षेत्र में योज्य तत्समक शून्य होता है ।

   (घ) दो पूर्णांकों में छोटी संख्या से बड़ी संख्या को घटाया संभव नहीं है ।

   (ङ) शून्य से कोई भी पूर्णांक संख्या घटाने से वियोगफल सदैव ऋणात्मक होता है ।

2. खाली जगहें भरिए :

   (क) (+ 3) + (—) = 0

   (ख) (- 7) + (—) = 0

   (ग) – 8 का योज्य प्रतिलोम है — ।

   (घ) 0 का योज्य प्रतिलोम है — ।

   (ङ) पूर्णांक ( ), अपना ही योज्य प्रतिलोम है ।

3. निम्न प्रश्नों की दाईं ओर कोष्ठक में से सही शब्द चुनकर खाली जगहें भरिए :

   (क) + 3 के योज्य प्रतिलोम की अपेक्षा + 3 ( ) है । (बड़ा, छोटा, समान)

   (ख) + 3 का योज्य प्रतिलोम की अपेक्षा - 5 ( ) है । (बड़ा, छोटा, समान)

4. (क) ऐसे दो पूर्णांक लिखिए, जिनका योगफल तुम्हारी लिखी गई प्रत्येक संख्या से बड़ा हो।

(ख) ऐसे दो पूर्णांक लिखिए, जिनका योगफल तुम्हारी लिखी गई प्रत्येक संख्या से छोटा हो ।

5. >, = , < में से सही चिह्न चुनकर खाली जगहें भरिए ।

(क)	+ 3 का योज्य प्रतिलोम		- 3 का योज्य प्रतिलोम है ।
(ख)	- 5 का योज्य प्रतिलोम		- 7 का योज्य प्रतिलोम है ।
(ग)	3 का योज्य प्रतिलोम		5 का योज्य प्रतिलोम है ।
(घ)	+ 9 का योज्य प्रतिलोम		- 4 का योज्य प्रतिलोम है ।
(ङ)	- 4 का योज्य प्रतिलोम		0 का योज्य प्रतिलोम है ।

1.4 पूर्णांकों की गुणन-संक्रिया

हम प्राकृत संख्याओं की गुणन-संक्रिया संबंधी चर्चा कर चुके हैं। अब पूर्णांकों मे की गुणन-संक्रिया के संबंध में चर्चा करेंगे । पूर्णांक तीन प्रकार के हैं। वे हैं - धनात्मक, ऋणात्मक और शून्य । इसलिए पूर्णांकों की किसी भी संक्रिया की चर्चा करते समय हम :

(क) धनात्मक संख्या के साथ धनात्मक संख्या का गुणा करना ।

(ख) धनात्मक संख्या के साथ ऋणात्मक संख्या का गुणा करना ।

(ग) धनात्मक संख्यां के साथ ऋणात्मक संख्या का गुणा करना ।

(घ) शून्य के साथ धनाात्मक संख्या का गुणा करना ।

(ङ) ऋणात्मक संख्या के साथ धनात्मक संख्या का गुणा करना।

(च) ऋणात्मक संख्या के साथ ऋणात्मक संख्या का गुणा करना ।

इन छह स्तरों पर गुणन संक्रिया की चर्चा करना जरूरी है ।

(क) धनात्मक संख्या के साथ धनात्मक संख्या का गुणन।

प्राकृत संख्या के गुणा संबंधी चर्चा करते समय हम इन धनात्मक संख्या के साथ धनात्मक संख्या के गुणा के संबंध में चर्चा कर चुके हैं। यहाँ गुणा को एक निश्चित संख्या साथ उसी संख्या के क्रमिक योग के रूप में लिया गया था ।

इसलिए - 5 x 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 या 5 + 5 + 5 है।

उसी प्रकार एक धनात्मक पूर्णांक के साथ अन्य एक पूर्णांक के गुणा को भी उसी धनात्मक संख्या के साथ उसी संख्या का क्रमिक योग के रूप में लिया जा सकता है ।

जैसे :
$$\begin{aligned}(+5) \times (+4) &= (+4) + (+4) + (+4) + (+4) + (+4)\\ &= (+8) + (+4) + (+4) + (+4)\\ &= (+12) + (+4) + (+4)\\ &= (+16) + (+4)\\ &= +20\end{aligned}$$

आइए, इस संक्रिया को संख्या रेखा पर दर्शाएंगे ।

आप उसी प्रकार (+ 6) x (+ 3) और (+ 4) x (+ 7) ज्ञात करके प्रत्येक स्थिति में गुणनफल लिखिए।
प्रत्येक स्तर पर हम ध्यान दे सकेंगे कि
दो धनात्मक संख्याओं का गुणनफल एक धनात्मक संख्या होती है ।

(ख) धनात्मक संख्या के साथ शून्य का गुणन :

हम पूर्ण संख्या के स्तर पर गुणा पर चर्चा करते समय भी शून्य के साथ शून्य स्तर पर एक संख्या की गुणन संक्रिया कर चुके हैं।

इसलिए हम जानते हैं:

$5 \times 0 = 0$ या $(+5) \times 0 = 0$

$0 \times 3 = 0$ या $0 \times (+3) = 0$

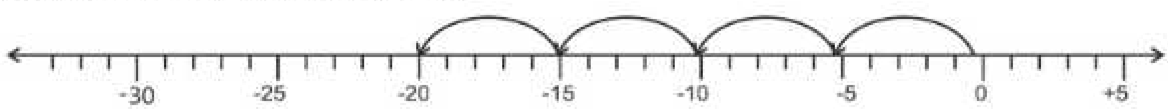
(ग) धनात्मक पूर्णांक संख्या के साथ ऋणात्मक पूर्णांक संख्या का गुणन

तुम जानते हो: $(+4) \times (+5) = 4 \times 5$
$= 5+5+5+5$
$= 20$

अर्थात् 4 x 5 का अर्थ है 4 संख्या के 5 का योग । धनात्मक पूर्णांक संख्या के साथ ऋणात्मक संख्या के गुणा को क्या हम उसी प्रकार अर्थात् क्रमिक योग के रूप में लिख सकेंगे ? हाँ, लिख सकेंगे । हम 4 x (- 5) को 4 (- 5) के योग के रूप में लिख सकेंगे । जैसे :

$(+4) \times (-5) = 4 \times (-5)$
$= (-5)+(-5)+(-5)+(-5)$
$= (-10)+(-5)+(-5)$
$=(-15)+(-5)$
$=-20$

आइए, संख्या रेखा की मदद से हम उन्हें जोड़ें।



हमने देखा कि : $(-5)+(-5)+(-5)+(-5) = -20$

इसलिए $4 \times (-5) = -20$

✍ संख्या रेखा का व्यवहार करके तुम खुद गुणा करो :

(क) $3 \times (-2)$ (ख) $4 \times (-3)$ (ग) $5 \times (-5)$ (घ) $5 \times (-8)$

हमने देखा :

एक धनात्मक पूर्णांक x ऋणात्मक पूर्णांक = ऋणात्मक पूर्णांक

जैसे :

दोनों संख्याएँ	गुणनफल	गुणाफल का दूसरा रूप
3, (−2)	−6	−(3×2)
4, (−3)	−12	−(4×3)
5, (−5)	−25	−(5×5)

ऊपर के गुणा को हम नीचे की तरह लिख सकेंगे :

$4\times(-5)=-(4\times5)=-20$

$5\times(-3)=-(5\times3)=-15$

(घ) शून्य (0) के साथ ऋणात्मक संख्या का गुणन

शून्य (0) के साथ धनात्मक संख्या का गुणन के बारे में हम जानते हैं,

जैसे :

0 x 2 = 0
0 x 1 = 0
0 x 0 = 0
0 x (-1) = 0
0 x (-2) = 0
0 x (-3) = 0

अब हमें पता चला कि 0 को किसी भी ऋणात्मक संख्या के साथ गुणा करने से गुणनफल 0 होगा ।

(ङ) ऋणात्मक पूर्णांक के साथ धनात्मक पूर्णांक का गुणन

नीचे के गुणनफलों को ध्यान से देखिए :

$4\times3 = 12$

$3\times3 = 9 \quad = 12-3$

$2\times3 = 6 \quad = 9-3$

$1\times3 = 3 \quad = 6-3$

$0\times3 = 0 \quad = 3-3$

$-1\times3 \quad = 0-(3) = -3$

बाद की पंक्तियाँ खुद भरिए (जैसे ऊपर दर्शाया गया है)

−2×3 = −3−( ) =....... [पहले के गुणनफल से 3 कम]

−3×3 = ( )−( ) =....... [पहले के गुणनफल से 3 कम]

−4×3 = ( )−( ) =....... [पहले के गुणनफल से 3 कम]

हम पहले से जानते हैं, $3\times(-4) = -12$

उसी प्रकार हमने देखा $(-3)\times4 = -12 = 4\times(-3)$

नीचे जैसे दर्शाय गया हैं, इसी प्रकार हम बाद की संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करेंगे ।

$-3\times5 = 5\times(-3) = -(5\times3) = -15$

ध्यान दें :

प्रत्येक क्षेत्र में गुणक समान है । लेकिन एक पंक्ति से दूसरी पंक्ति में जाते समय गुण्य 1 कम होता जा रहा है । उसीके अनुसार गुणनफल भी 3 कम होता जा रहा है ।

✍ नीचे दिए गए प्रश्नों की खाली जगहें भरिए :

−4 ×6 = 6×(..........) = −(..........×.........) = ...

−3×8 = ...×(−3) = −(..........×.........) = ...

−5×4 = ...×(..........) = −(..........×..........) = ...

हमने देखा :

$3 \times (-5) = -(3 \times 5)$

$3 \times (-5) = -[3 \times (-5$ का योज्य प्रतिलोम $)]$

$= -(3 \times 5) = -15$

इस प्रणाली को सामान्यत: नीचे दर्शाए रूप में कहा जा सकता है :

क्या आप जानते हैं ?
3×-5 को $-[3 \times (-5)$ के योज्य प्रतिलोम के रूप में लिखा जा सकता है ।

a और **b** दोनों पूर्णांक हों तो

$$\mathbf{a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)}$$

1. गुणा कीजिए :

(क) $8 \times (-12)$ (ख) $14 \times (-9)$ (ग) $(-18) \times 8$ (घ) $(-16) \times 12$ (ङ) $(-15) \times 16$

2. खाली जगहें भरिए :

(क) $15 \times (-18)$ = $-(15 \times ....)$ = ...

(ख) $16 \times (-12)$ = $-(........ \times 12)$ = ...

(ग) $(-18) \times 12$ = $-(........ \times ....)$ = ...

(घ) $(-21) \times 14$ = $-(........ \times ....)$ = ...

(ङ) $(........) \times (-18)$ = $(-18) \times 16$ = $-(........ \times ....)$ = ...

(ङ) दो ऋणात्मक पूर्णांक संख्याओं का गुणन

आप $5 \times (-4)$ और $(-7) \times 6$ का गुणनफल तय करना जानते हैं। अब $(-4) \times (-3)$ का गुणा कैसे किया जाता है इसे जानिए :

आप जानते हैं :

$-4 \times 3 = -12$

$-4 \times 2 = -8 = -12 + 4$

$-4 \times 1 = -4 = -8 + 4$

$-4 \times 0 = 0 = -4 + 4$

बताइए :
इन पंक्तियों में क्या आप कोई संरचना देख सकते हैं?
गुणक (गुणन संक्रिया में दूसरी संख्या) को 1 कम कर देने पर गुणनफल कितना बढ़ जाता है ?

वैसे : $-4 \times (-1) = 0 + 4 = +4$

अब बाद की पंक्तियाँ उसी प्रकार भरिए :

$(-4) \times (-2) = 4 +$ .... = ...

$(-4) \times (-3) =$ .... + ... = ...

(क) $(-4)\times(-3)$ को जिस प्रकार हल किया गया उसी प्रकार $(-5)\times 4$ से शुरु करके $(-5)\times(-6)$ का गुणनफल कितना होगा ? ज्ञात कीजिए।

(ख) $(-6)\times 3$ से शुरु करके $(-6)\times(-7)$ का गुणनफल कितना होगा, ज्ञात कीजिए।

हमने देखा :

पिछले गुणनफलों पर ध्यान देने से पता चला है कि :

$(-4)\times(-3) = +12$ अर्थात् $(-4)\times(-3) = (+4)\times(+3)$

दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल

= उन दोनों संख्याओं के योज्य प्रतिलोम का गुणनफल ।

क्या आप जानते हैं ?

$-a$ का योज्य प्रतिलोमी $= a$

और $-b$ का योज्य प्रतिलोमी $= b$

संकेत का व्यवहार करके हम ऊपर की प्रणाली को नीचे दर्शाए गए तथ्य के रूप में लिख सकेंगे :

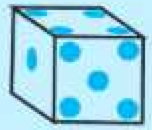
a और **b** दो ऋणात्मक पूर्णांक हों तो $\mathbf{(-a)\times(-b) = +(a\times b)}$

खुद करके देखिए :

- नीचे जैसे दर्शाया गया है, इसी प्रकार एक बोर्ड लीजिए, जिसमें -71 से $+71$ तक की संख्याएँ क्रम से लिखी गई हों :

–71	–70	–69	–68	–67	–66	–65	–64	–63	–62	–61
–50	–51	–52	–53	–54	–55	–56	–57	–58	–59	–60
–49	–48	–47	–46	–45	–44	–43	–42	–41	–40	–39
–28	–29	–30	–31	–32	–33	–34	–35	–36	–37	–38
–27	–26	–25	–24	–23	–22	–21	–20	–19	–18	–17
–6	–7	–8	–9	–10	–11	–12	–13	–14	–15	–16
–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71

- एक डब्बे में चार पासे लिए जाएँगे, उनमें से दो पासे सफेद और दो पासे काले होंगे ।
- सफेद पासे पर रहे बिन्दुओं को धनात्मक और काले पासे पर रहे बिन्दुओं को ऋणात्मक संख्या मानी जाएगी ।
- हर खिलाड़ी को एक गोटी चलानी होगी । वह खिलाड़ी खेल के शुरु होने के समय अपनी गोटी गार्ड के शून्य चिह्नित जगह पर रखेगा । भिन्न-भिन्न खिलाड़ी भिन्न भिन्न रंगों की गोटियाँ व्यवहार करेंगे ।



- हर खिलाड़ी अपनी पारी में डब्बे के भीतर न देखकर दो पासे लाकर उन्हें फेंकेंगा । दोनों पासों से मिली संख्या दोनों को गुणा करके गुणफल ज्ञात किया जाएगा । वही गुणनफल उस खिलाड़ी की संख्या होगी । उसके बाद वही दोनों पासों को डब्बे में डाल देना ।
- गुणनफल धनात्मक होने से वह खिलाड़ी बोर्ड़ पर अपनी गोटी उतने खाने +71 की ओर बढ़ाएगा । गुणनफल ऋणात्मक होने से वह अपनी गोटी उतने खाने –71 की ओर बढ़ाएगा ।
- जो पहले +71 के पास पहुँच जाएगा वह जीतेगा ।
- यदि दो से अधिक खिलाड़ी खेल रहे हों, तब जीतने वाला खिलाड़ी रुक जाएगा, अन्य खिलाड़ी खेलते रहेंगे । एक के बाद एक जीतते जाएँगे । –71 पर पहले पहुँचने वाला तृतीय घोषित होगा ।
- प्रथम स्थान में रहनेवाले को 10 पएंट मिलेंगे । द्वितीय स्थान पर आए खिलाड़ी को 8 पएंट और तीसरे तथा चौथे स्थान पर आनेवाले खिलाड़ियों को क्रमश : 5 और 3 पएंट मिलेंगे ।
- इस प्रकार एक पारी खतम होने के बाद दूसरी पारी का खेल होगा। दोनों पारियाँ खतम होने के बाद विजयी खिलाड़ी का नाम घोषित कर दिया जाएगा ।

1.4.1 तीन या उनसे अधिक ऋणात्मक संख्याओं का गुणा :

हमने देखा कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। और भी हम जानते हैं कि एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है ।

> **क्या आप जानते हैं ?**
> गणितज्ञ ऑएलर ने (1770 ई) पहले प्रमाणित किया था कि $(-1)\times(-1)=+1$

अब आइए, तीन या उनसे अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणा करेंगे ।

तीन प्राकृत संख्याओं का गुणा करते समय हम कैसे गुणा करते हैं ?

(क) $(-5)\times(-3)\times(-4) = \{(-5)\times(-3)\}\times(-4)$

$= \{+(5\times3)\}\times(-4)$ (क्या कारण है ?)

$= (+15)\times(-4)$

$= -(15\times4) = -60$

> हम तीनों संख्याओं में से प्रथम दो संख्याओं का गुणा करते हैं। जो गुणनफल मिलता है, उससे तीसरी संख्या का गुणा करते हैं।

(ख) $(-5)\times(-3)\times(-4)\times(-2) = \{(-5)\times(-3)\times(-4)\}\times -2$

$= \{(-60)\times(-2)$ [('क' में प्राप्त गुणनफल लिया गया है ।)]

$= +(60\times 2) = +120$

(ग) $(-5)\times(-3)\times(-4)\times(-2)\times(-6) = \{(-5)\times(-3)\times(-4)\times(-2)\}\times(-6)$

$= (+120)\times(-6)$ [('ख' में प्राप्त गुणनफल लिया गया है ।)]

$= -(120\times 6) = -720$

ऊपर जो गुणनफल मिले हैं, उन्हें ध्यान से देखिए। क्या देख रहे हैं?

- दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है ।
- तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है ।
- चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है ।
- पाँच ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है ।

खुद करके देखिए :

नीचे दी गई सारणी के खाने भरिए :

ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणा करना	गुणनफल किस प्रकार की संख्या है ?
दो	धनात्मक पूर्णांक
तीन	
चार	
पाँच	
छह	
सात	
आठ	
नौ	
दस	

ऊपर की सारणी से क्या पता चला ?

- युग्म संख्यक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होगा ।
- विषम संख्यक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होगा ।

खुद करके देखिए :

$(-1)\times(-1)=+1$

$(-1)\times(-1)\times(-1)=$.................

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=$.................

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=$.................

$(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)=$.................

(क) सम संख्यक -1 को लेकर गुणा करने से गुणनफल कितना होगा ?

(ख) विषम संख्यक -1 के लेकर गुणा करने से गुणनफल कितना होगा ?

उत्तर तय कीजिए :

(क) $(-3)\times(-5)\times(-2)\times(-7)$ का गुणनफल किस प्रकार की संख्या होगी ?

(ख) $(-3)\times(-5)\times(+2)\times(-7)$ का गुणनफल किस प्रकार की संख्या होगी ?

(ग) ऊपर के दोनों गुणनफलों में से कौन-सा ऋणात्मक पूर्णांक और दूसरा कौन-सा धनात्मक पूर्णांक है ?

(घ) उन गुणनफलों में से एक धनात्मक पूर्णांक होते समय दूसरा क्या ऋणात्मव पूर्णांक हुआ ?

(ङ) निम्न संख्यक पूर्णांकों के गुणनफल में कौन-सा चिह्न लगेगा ?

(i) पाँच ऋणात्मक पूर्णांक और दो धनात्मक पुर्णांक

(ii) दो ऋणात्मक पूर्णांक औरं पाँच धनात्मक पूर्णांक

(iii) तीन ऋणात्मक पूर्णांक और पाँच धनात्मक पूर्णांक

(iv) आठ ऋणात्मक पूर्णांक और सात धनात्मक पूर्णांक

1.5 पूर्णांकों की गुणन प्रक्रिया के गुण

आइए, पूर्णांकों में गुणन-संक्रिया के बारे में कुछ जानेंगे ।

(क) गुणन-संक्रिया में संवृत्ति गुण

नीचे दिए गए दो पूर्णांकों का गुणा कीजिए और गुणनफल किस प्रकार की संख्या है, लिखिए :

जैसे : $(-3)\times(+4) = -12$	यह एक पूर्णांक है ।
$(+5)\times(+7) =$	....
$(+6)\times(-4) =$	....
$(-5)\times(+8) =$	....
$(-7)\times(-6) =$	....

बताइए:
पूर्णांको की योग-संक्रिया में संवृत्ति गुण क्या है ?

इससे तुमने क्या सीखा ?

दो पूर्णांकों का गुणनफल भी एक पूर्णांक होता है ।

क्या तुम ऐसे दो पूर्णांक बता सकेंगे, जिनका गुणनफल एक पूर्णांक नहीं है ?

सभी छात्र-छात्राएँ कहने लगे -

'ऐसे दो पूर्णांक नहीं हैं जिनका गुणनफल पूर्णांक नहीं हैं।

तो सभी ने स्वीकार किया कि-

दो पूर्णांकों का गुणनफल सदैव एक पूर्णांक होता है ।

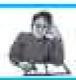
हम संकेतों का व्यवहार करके कह सकते हैं :

a और **b** दो पूर्णांक होने पर
a × **b** भी एक पूर्णांक होगा ।

अर्थात्

पूर्णांक की गुणन-संक्रिया में संवृत्ति गुण होता है ।

(ख) गुणन संक्रिया में क्रम-विनिमय का गुण



खुद करके देखिए:

नीचे की सारणी में पहले, दूसरे खानों में दोनों संख्याओं का गुणनफल लिखिए। उन दोनों गुणनफल को देखकर तीसरे खाने में अपना निर्णय लिखिए।

पहला खाना	दूसरा खाना	तीसरा खाना
$(+4)\times(-5) = -20$	$(-5)\times(+4) = -20$	$(+4)\times(-5)=(-5)\times(+4)$
$(+6)\times(+7) =$	$(+7)\times(+6) =$	
$(-8)\times(+9) =$	$(+9)\times(-8) =$	
$(-12)\times(-5) =$	$(-5)\times(-12) =$	
$(+18)\times(-4) =$	$(-4)\times(+18) =$	
$(+16)\times(-12) =$	$(-12)\times(+16) =$	
$(-12)\times 0 =$	$0\times(-12) =$	

ऊपर की सारणी में आपने क्या देखा, लिखिए।

हमने देखा :

''दो पूर्णांकों का गुणा करके फिर से क्रम बदलकर गुणा करने से दोनों गुणनफल समान होते हैं।

हमें मालूम हुआ-

पूर्णांक की गुणन-संक्रिया में क्रमविनिमय गुण होता है ।

हम सामान्यत: कह सकेंगे :

a और **b** दो पूर्णांक हों तो
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

(ग) गुणन के क्षेत्र में गुणात्मक तत्समक गुण

योग के क्षेत्र में योज्य तत्समक गुण के बारे में हम चर्च्चा कर चुके हैं ।

$3+0=3,\ \ -5+0=-5$ इनको देखकर हमें ज्ञात हुआ कि किसी भी पूर्णांक के साथ शून्य का योग करने से योगफल उसी संख्या के साथ समान होता है । इसलिए पूर्णांक के 0 (शून्य) योज्य तत्समक है ।

उसी प्रकार गुणन के क्षेत्र में हमें ज्ञात है कि

$+5\times1=+5$

$0\times1=0$

$-7\times1=-7$

अब हमें ज्ञात हुआ कि किसी भी पूर्णांक को 1 से गुणा करने से गुणनफल वही पूर्णांक होता हैं।
संकेतों का व्यवहार करके हम कह सकते हैं।

> **a** एक पूर्णांक हो तो
> $\mathbf{a\times1=1\times a=a}$

इसे गुणा के क्षेत्र में **अभेद** गुण कहा जाता है और 1 को **गुणात्मक तत्समक** कहते है ।

अब बताइए, एक पूर्णांक को -1 से गुणा करने से गुणनफल कितना होगा ? निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :

$(-4)\times(-1)\ =+(4\times1)\ =\ +4$ [+4 है –4 का योज्य प्रतिलोम]

$(+3)\times(-1)\ =-(3\times1)\ =\ -3$ [–3 है +3 का योज्य प्रतिलोम]

$(-7)\times(-1)\ =$ ☐

$(-1)\times(+15)=$ ☐

$(-1)\times(-8)\ =$ ☐

$(+15)\times(-1)=$ ☐

> **क्या आप जानते हैं ?**
> 0 x (-1) = ?
> 0 का योज्य प्रतिलोम है = ?

> **बताइए**
> a का योज्य प्रतिलोम है –a
> –a का योज्य प्रतिलोम है a

आप जो देखा, उसे सामान्यत: इस प्रकार कहेंगे :

> **a एक पूर्णांक हो तो**
> $\mathbf{a\times(-1)=(-1)\times a=-a}$ **यह a का योज्य प्रतिलोम है**

(घ) गुणन-संक्रिया में साहचर्य गुण

आइए, $-3,-2$ और 5 तीनों पूर्णांको का गुणा कीजिए।

$[(-3)\times(-2)]\times5=(+6)\times(+5)=+30$

$(-3)\times[(-2)\times5]=-3\times(-10)=+30$

हमने पहले -3 और -2 का गुणा किया । फिर अनेक गुणनफल के साथ 5 का गुणा किया । अब गुणनफल मिला +30।
दूसरी बार हमने -3 को -2 और 5 के गुणनफल के साथ गुणा किया । गुणनफल भी मिला +30 ।
इसलिए हमें ज्ञात हुआ कि

$[(-3)\times(-2)]\times5=-3\times[(-2)\times5]$

तीन पूर्णांकों का गुणा करते समय पहले किन दो पूर्णांकों का गुणा किया गया । गुणनफल उस पर निर्भर नहीं रहता । पूर्णांकों को किसी भी क्रम में गुणा करने से समान गुणनफल प्राप्त होता है ।

इस बात को संकेतों का व्यवहार करके हम कह सकते हैं :

> **a, b** ও **c** और तीन पूर्णांक हों तो,
> $$(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$$

हम जानते हैं, पूर्णांक के क्षेत्र में गुणन-संक्रिया में यह गुणन का साहचर्य गुणा है ।

हम सिर्फ दो संख्याओं को एक साथ गुणा कर सकते हैं। इसलिए तीन संख्याओं का गुणा करते समय पहले इन तीनों में से किन्हीं दो का गुणा किया जाता है ।

तीन पूर्णांकों का गुणनफल ज्ञात करने के लिए हम किन दो का पहले गुणा करने के बाद की गुणन-क्रिया सरल होगी। उस पर विचार करते हैं और उसी के अनुरूप हम साहचर्य गुण-धर्म का व्यवहार करके गुणा करते हैं।

जैसे : - 8, - 7 और - 5 का गुणनफल ज्ञात करना है । आइए, हम देखें कि कितने तरीकों से यह गुणन-संक्रिया हो सकती है ।

पहला तरीका - $[(-8)\times(-7)]\times(-5)=$

दूसर तरीका - $(-8)\times[(-7)\times(-5)]=$

तीसरा तरीका - $[(-8)\times(-5)]\times(-7)=$

बताइए:
इन तीनों तरीकों में से किस तरीके से गुणा करना आपको अधिक आसान लगता है और क्यों ?

(ङ) योग पर गुणन का वितरण गुण

हमें प्राकृत संख्या के क्षेत्र में योग पर गुणन के वितरण गुण पर मालूम है ।

आइए, एक उदाहरण लेकर उसे याद करें :

जैसे : $4\times(5+3)=(4\times5)+(4\times3)$

[यहाँ गुणन योगपर वितरण करता है]

अब, पूर्णांक के क्षेत्र में इसे सत्यापित करें

(i) $(-2)\times(3+5)=(-2)\times8=-16$
और $[(-2)\times3]+[(-2)\times5]=(-6)+(-10)=-16$

इसलिए हमने देखा -
$(-2)\times(3+5)=[(-2)\times3]+[(-2)\times5]$

✍ निम्न दो उक्तियों को सत्यापित कीजिए।

(i) $3\times[(-4)+(-5)]=[3\times(-4)]+[3\times(-5)]$

(ii) $-4\times[(-3)+2]=[(-4)\times(-3)]+[(-4)\times2]$

क्या प्रत्येक उक्ति सत्य है ?

हमने देखा पूर्णांक के क्षेत्र में योग पर गुणन-संक्रिया वितरण करती है । संकेतों का व्यवहार करके हम इस गुण को इस प्रकार कह सकते हैं

a, b और c पूर्णांक हों तो
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

यह योग पर **गुणन का वितरण** गुण है ।

अब निम्न उक्तियों को देखेंगे ।

क्या हम कह सकते हैं ?

$$4 \times (3-8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$$

आइए, देखें :

$$4 \times (3-8) = 4 \times (-5) = -20$$

और $4 \times 3 - 4 \times 5 = 12 - 32 = -20$

$$\therefore 4(3-8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$$

बताइए:
- $4 \times [5 + (-3)] = 4 \times 5 + 4 \times (-3)$ क्या यह सही है ?
- $(-5) \times [(-4) + (-2)] = (-5) \times (-4) + (-5) \times (-2)$ क्या यह सही है ?

और एक उदाहरण देखेंगे :

$$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times [(-4) + 6]$$
$$= (-5) \times (+2) = -10$$

और $[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$

$$\therefore (-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$$

फिर $(-9) \times [10 - (-3)]$ और $[(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$ लेकर परीक्षण कीजिए ।

आपको क्या मिला ?

क्या पूर्णांक के क्षेत्र में वियोग पर गुणन का वितरण गुण होता है ?

हमने देखा :

घटाव पर भी गुणन का वितरण गुण होता है । संकेतों का व्यवहार करके हम इस गुण को इस प्रकार कह सकते हैं।

a, b , c पूर्णांक हों तो
$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$$

यह घटाव पर गुणन का वितरण गुण है ।

निम्नलिखित की जाँच कीजिए

(i) $10 \times [6 - (-2)] = 10 \times 6 - 10 \times (-2)$; क्या यह सही है ?

(ii) $(-15) \times [(-7) - (-1)] = (-15) \times (-7) - (-15) \times (-1)$; क्या यह सही है ?

(च) **वितरण गुण की सहायता से शून्य से पूर्णांक का गुणन :** योग पर गुणन का वितरण गुण के अनुसार निम्न उक्तियाँ सत्य हैं :

(i) $(+3)\times[5+(-5)]=[(+3)\times 5+(+3)\times(-5)]$

अर्थात् $(+3)\times 0=(+15)+(-15)=0$

(ii) $(-5)\times[(-4)+4]=[(-5)\times(-4)+(-5)\times 4]$

अर्थात् $(-5)\times 0=(+20)+(-20)=0$

उसी प्रकार गुणन के वितरण गुण के अनुसार $0\times[(-7)+(+7)]$ का मान ज्ञात करो ।

हमने (i) में देखा कि एक धनात्मक पूर्णांक $\times\ 0=0$

(ii) में भी देखा कि एक ऋणात्मक पूर्णांक $\times 0=0$

क्या आप जानते हैं ?
3–5 यह $3+(-5)$ आप जानते हैं।
अर्थात् $(+2)\times(3-5)$ और $(+2)\times[3+(-5)]$ अलग नहीं हैं। अत:
$(+2)\times(3-5)=(+2)\times 3-(+2)\times 5$
और $(+2)\times[3+(-5)]=(+2)\times 3+(+2)\times(-5)$
में कोई अंतर नहीं।
अत: पूर्णांक के लिए घटाव पर गुणन का वितरण गुण लागू होगा और योग पर गुणन का वितरण करना अलग बात नहीं।

पूर्णांक के क्षेत्र में क्रम विनिमयता गुणा के अनुसार हम कह सकते हैं :

एक धनात्मक पूर्णांक $\times 0=0\times$ वही धनात्मक पूर्णांक $=0$

एक ऋणात्मक पूर्णांक $\times 0=0\times$ वही ऋणात्मक पूर्णांक $=0$

हमने ऊपर के उदाहरणों में देखा :

एक पूर्णांक $\times 0=0$

संकेतों का व्यवहार करके हम इस गुण को इस प्रकार कह सकते हैं :

a पूर्णांक हो तो
$$\mathbf{a\times 0=0\times a=0}$$

1.5.1 गुणा के काम को सरल करना

$(-25)\times 37\times 4$ को दो तरीकों से हल किया गया है :

पहला तरीका

$(-25)\times 37\times 4=[(-25)\times 37]\times 4$
$=(-925)\times 4=-3700$

दूसरा तरीका

$(-25)\times 37\times 4=[(-25)\times 4]\times 37$
$=(-100)\times 37=-3700$

ऊपर के दोनों तरीकों से कौन-सा सरल लगता है ? कारण बताइए।

ध्यान दें, दूसरे तरीके में गुणा को क्रम विनिमय और साहचर्य गुणों की मदद ली गई है ।

क्रम विनिमय, साहचर्य और वितरण गुणों की मदद से कैसे गुणा करने का काम सरल किया जा सकता है, उसके और कई उदाहरण नीचे दिए गए हैं।

(क) 16×12 का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

16×12 को हम $16\times(10+2)$ के रूप में लिख सकेंगे

इसलिए $16\times 12=16\times(10+2)=16\times 10+16\times 2=160+32=192$

(ख) $(-23)\times 48 = (-23)(50-2) = (-23)\times 50 - (-23)\times 2 = (-1150) - (-46)$

$= -1150 + 46 = -1104$

✍ **वितरण प्रक्रिया से गुणा करने से काम आसान हो जाता है ।**

(क) $(-49)\times 18$; (ख) $(-25)\times(-31)$ (ग) $70\times(-19)+(-1)\times 70$

उदाहरण :

गुणन-फल ज्ञात करो :

(i) $(-18)\times(-10)\times 9$ (ii) $(-20)\times(-2)\times(-5)\times 7$

हल :

(i) $(-18)\times(-10)\times 9 = [(-18)\times(-10)]\times 9 = 180\times 9 = 1620$

(ii) $(-20)\times(-2)\times(-5)\times 7 = (-20)\times[(-2)\times(-5)]\times 7$

$= [(-20)\times 10]\times 7 = (-200)\times 7 = -1400$

उदाहरण :

एक कक्षा के प्रश्नपत्र में 15 प्रश्न दिए गए थे। प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 अंक और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए -2 अंक दिए जाने का प्रावधान था ।

सीमा ने सभी प्रश्नों के उत्तर दिए थे । उनमें से सिर्फ 9 प्रश्नों के उत्तर सही थे । उसे कुल कितने अंक मिले थे ?

हल :

(क) सीमा के अंक :

प्रत्येक सही उत्तर के लिए मिलते है 4 अंक

9 सही उत्तरों के लिए मिलेंगे $= 9 \times 4 = 36$ अंक

गलत उत्तरों की संख्या $= 15 - 9 = 6$

प्रत्येक गलत उत्तर के लिए मिलते हैं -2 अंक

6 गलत उत्तरों के लिए मिलेंगे $6 \times (-2) = -12$ अंक

अब सीमा के कुल अंक $= 36 + (-12) = 36 - 12 = 24$

उदाहरण :

मान लीजिए कि भूमि की सतह से ऊपर की दूरी को धनात्मक पुर्णांक और भूमि की सतह के नीचे की दूरी को ऋणात्मक पूर्णांक से निरुपित किया जाता है। उसके अनुसार नीचे लिखे प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(क) एक लिफ्ट किसी खान कूप में 5 मीटर प्रति मिनट की रफतार से नीचे जाता है । एक घंटे बाद यंत्र की स्थिति किस संख्या पूरा सूचित होगी ? (यह पहले भू-पृष्ठ पर था।)

(ख) यदि वह यंत्र भूमि से 15 मीटर ऊपर हो और वही से खान कूप में उसी वेग से जाए तो एक घंटे के बाद उसकी स्थिति किस संख्या द्वारा सूचित किया जाएगा ?

हल :

(क) चूँकि लिफ्ट नीचे की ओर जा रहा है, इसलिए उसके द्वारा तय की गई दूरी ऋणात्मक पूर्णांक से सूचित की जाएगी। प्रत्येक मिनट में उसकी स्थिति -5 मीटर बदलेगी

एक घंटे यानी 60 मिनट बाद उसकी स्थिति $(-5) \times 60$ मी $= -300$ मीटर बदलेगी ।

लिफ्ट की पहली स्थिति भूमि पर होने से इसकी स्थिति को 0 मीटर द्वारा सूचित किया जाएगा । एक घंटे के बाद लिफ्ट की स्थिति मीटर यानी भूमि से $0 + (-300) = -300$ मीटर नीचे होगी है ।

(ख) 45 मीनट में लिफ्ट की स्थिति में परिवर्तन $= (-5) \times 45 = -225$ मीटर अर्थात्, यह अपनी पहली स्थिति से -225 मीटर नीचे गया है । उसकी अंतिम स्थिति $= (+15) + (-225) = -210$ मीटर है । अर्थात् लिफ्ट भूमि की सतह से 210 मी. नीचे है ।

अभ्यास - 1.3

1. **निम्नलिखित गुणनफलों को ज्ञात कीजिए।**

(क) $3 \times (-2)$ (ख) $(-1) \times 222$ (ग) $(-24) \times (-25)$ (घ) $(-348) \times (-1)$

(ङ) $(-12) \times 0 \times (-16)$ (च) $(-8) \times (-15) \times 10$ (छ) $18 \times (-6) \times (-5)$ (ज) $(-22) \times (-5) \times (-8)$

(झ) $(-1) \times (+2) \times (-3) \times (-4)$ (ञ) $(-7) \times (-5) \times (-8) \times (-1)$

2. **निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए ।**

(क) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

(ख) $(-24) \times [(-6) + (-3)] = [(-24) \times (-6)] + [(-24) \times (-3)]$

3. (क) शून्य के अलावा किसी पूर्णांक को a द्वारा सूचित किए जाने से $(-1) \times a$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(ख) किस पूर्णांक का (-1) से गुणा करने से निम्न गुणनफल प्राप्त होंगे ?

(i) -34 (ii) 42 (iii) 0

4. $(-1) \times 5$ से शुरू करके गुणा के विभिन्न क्रम दिखाते हुए $(-1) \times (-1) = 1$ दर्शाइए।

5. गुणा के उपयुक्त गुणों का व्यवहार करके गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(क) $24 \times (-47) + (-47) \times (-14)$ (ख) $8 \times 48 \times (-125)$ (ग) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$

(घ) $(-46) \times 102$ (ङ) $8 \times (50-2)$ (च) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$

(छ) $(-17) \times (-29)$ (ज) $(-57) \times (-19) + 57$

6. एक कमरे का तापमान 40^0 है। हिमीकरण यंत्र 5^0 से प्रति घंटे की दर से कमाया जा सकता है । 10 घंटे के बाद कमरे का तापमान कितना होगा ?

7. जेम्स के घर के सामने एक सड़क पूर्व से पश्चिम की दिशा में गई है । जेम्स एक बार घर से निकलकर साइकिल से पूर्व की दिा में 8 कि.मी. गया । जाकर 'क' पास पहुँचा । 'क' से पश्चिम की ओर 12 कि.मी. जाकर 'ख' के पास पहुँचा। (क) यदि जेम्स के घर से पुर्व की ओर के स्थानों को धनात्मक पूर्णांक द्वारा और पश्चिम की ओर के स्थानों को ऋणात्मक पूर्णांको द्वारा सूचित किया जाए, तब क और ख की स्थिति को सुचित करने के लिए कौन-सी संख्या का व्यवहार किया जाएगा ? (ख) यदि 'क' स्थान +10 द्वारा और ख स्थान – 6 द्वारा सूचित किया जाए, तब 'क' से किस दिशा में 'ख' स्थित है ? 'क' और 'ख' के बीच दूरी कितनी है ?

8. खाली जगह पर उपयुक्त पूर्णांक रखिए, जैसे कि उक्ति सही हो ?

(क) $-5\times(..........)=40$ (ग) $7\times(.............)=-63$

(ख) $(...............)\times(-12)=-96$ (घ) $(...........)\times(-11)=99$

1.6 पूर्णांक के लिए भाग संक्रिया :

भाग, गुणा की विपरीत संक्रिया है, यह हम जानते हैं, आइए, कुछ उदाहरण देखें ।

$\therefore\ 4\times6=24$

इसलिए $24\div4=6$ और $24\div6=4$।

वैसे $8\times7=56$ से हमें मिलेंगा $56\div7=8$ और $56\div8=7$ ।

हमने देखा :

प्राकृत संख्या के क्षेत्र में गुणा से भाग के संबंध में दो तथ्य मिलते हैं।

क्या आप जानते हैं ?

गुणा के लिए : गुण्य × गुणक = गुणनफल

भाग के लिए :

	गुणफल	- भाज्य
	गुणक	- भाजक
	गुण्य	- भागफल
अथवा	गुणनफल	- भाज्य
	गुण्य	- भाजक
	गुणक	- भागफल

खुद करके देखिए :

दिए गए गुणन तथ्य को भाग के तथ्य में लिख सकेंगे।

निम्न सारणी में दिए गए पूर्णांक गुणा से संबंधित है, उससे संबंधित भाग के तथ्य में खाली जगहें भरिए।

गुणा के तथ्य	भाग के तथ्य
$4\times(-7) = -28$	$(-28)\div(-7)=4$ $(-28)\div4=(-7)$
$(-6)\times8 = -48$	
$(-9)\times(-7) = 63$	
$(-7)\times5 =$	
$(-9)\times6 =$	
$7\times(-8) =$	
$(-12)\times(-4) =$	

इस सारणी से हमें पता चला कि

$(-28) \div 4 = -7$
$(-48) \div 8 = -6$
$(-35) \div 5 = -7$
$(-56) \div 7 = -8$

हमने देखा

$(-28) \div 4 = -(28 \div 4) = -7$
$(-48) \div 8 = -(48 \div 8) = -6$

क्या आप बता पाएँगे ?
आप ऐसी चार भाग-संक्रिया के उदाहरण दीजिए, जिनमें भागफल ऋणात्मक पूर्णांक हों।

- सारणी के उदाहरणों से हमें और भी ज्ञात हुआ ?

$63 \div (-9) = -7$ और $63 \div (-7) = -9$

$48 \div (-12) = -4$ और $48 \div (-4) = -12$

ऊपर के तथ्य को हम सामान्यत: इस प्रकार कह सकते हैं :

> **a, b और c धनात्मक पूर्णांक हो $a \div b = c$ हो तो**
> **$(-a) \div b = a \div (-b) = -(a \div b) = -c$ होगा**

ज्ञात कीजिए :

(क) $96 \div (-12)$ (ख) $104 \div (-13)$ (ग) $112 \div (-14)$

- ऊपर की सारणी के तथ्यों से हमें ज्ञात हुआ कि :

$(-28) \div (-7) = 4$, $(-48) \div (-6) = 8$, $(-54) \div (-9) = 6$

$(-28) \div (-7) = +(28 \div 7) = 4$
$(-48) \div (-6) = +(48 \div 6) = 8$
$(-56) \div (-8) = +(56 \div 8) = 7$

ऊपर हमने जो देखा उसे इस प्रकार कह सकते हैं

> **a, b और c धनात्मक पूर्णांक और $a \div b = c$ हो तो**
> **$(-a) \div (-b) = a \div b = c$**

भागफल ज्ञात करो :

(क) $(-32) \div (-8)$ (ख) $(-45) \div (-9)$ (ग) $(-48) \div (-6)$

1.7 भाग के संबंध में कुछ जानने की बातें

पूर्णांक के क्षेत्र में गुणा के जितने गुण हैं, उनका भाग में प्रयोग हो सकता है या नहीं, आइए, देखें ।

- पूर्णांक गुणा के अंतर्गत संवृत्त है । भाग संक्रिया में संवृत्त गुण होता है या नहीं, आइए देखें ।

उक्ति	परिणाम
$(-8) \div 2 = -4$	भागफल पूर्णांक है ।
$(-36) \div (-9) = 4$	भागफल पूर्णांक है ।
$(48) \div (-12) = -4$	भागफल पूर्णांक है ।
$(-12) \div 5 = ?$	भागफल क्या पूर्णांक होगा ।

हमने देखा :

एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक से भाग देने पर भागफल सदैव पूर्णांक नहीं होता ।

इसलिए पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत्त नहीं है । पूर्णांक की संक्रिया में गुणा क्रम विनिमय है ।

क्या आप जानते हैं ?
पूर्णांक गुणा के अन्तर्गत संवृत्त है ।

- **क्या पूर्णांक के लिए भाग क्रम विनिमय है ?**

  $(-8) \div 2 =$ _____, $2 \div (-8) =$ _____

  क्या दोनों भागफल बराबर है ?

  इससे हमें क्या ज्ञात हुआ ?

  अत : पूर्णांक के लिए भाग क्रम विनिमय नहीं है ।

- पूर्णांक के लिए गुणन का साहचर्य गुण होता है ।

  क्या पूर्णांक के लिए भाग का साहचर्य गुण होता है । आइए जाँच कीजिए :

  $[(-8) \div 4] \div (-2) = (-2) \div (-2) = 1$

  $(-8) \div [4 \div (-2)] = (-8) \div (-2) = 4$

  $[(-8) \div 4] \div (-2)$ और $(-8) \div [4 \div (-2)]$ के नाम बराबर है,

  हमें ज्ञात हुआ कि :

  पूर्णांकां के लिए भाग का साहचर्य नहीं है ।

पूर्णांक के लिए कोई भी पूर्णांक $a \times 1 =$ वही पूर्णांक a ।

भाग की संक्रिया में हमने देखा

$(-8) \div 1 = -8$ क्योंकि $(-8) \times 1 = -8$

$0 \div 1 = 0$ क्योंकि $0 \times 1 = 0$

पूर्णांक की संक्रिया में कोई भी पूर्णांक a हो, $a \times (-1) = -a$ तो (यह a कार योज्य प्रतिलोम है)

हमने भी देखा :

$8 \div (-1) = -8$ $(-8$, 8 का योज्य प्रतिलोम है)

$(-5) \div (-1) = 5$ (5, -5 का योज्य प्रतिलोम है)

$0 \div (-1) = 0$ (0, 0 का योज्य प्रतिलोम है)

अब हमने देखा :

a एक पूर्णांक हो तो $a \div (-1) = -a$ (a का योज्य प्रतिलोम है)

- हमें ज्ञात है कि पूर्ण संख्या के क्षेत्र में शून्य से भाग देना अर्थ-हीन है । अर्थात् $8 \div 0$ अर्थहीन है ।

  पूर्णांक की संक्रिया में क्या होगा आइए, देखें ;

  $(-5) \div 0$ का भागफल कितना है ?

  जैसे $6 \div (-2) = -3$, क्योंकि $(-2) \times (-3) = 6$,

  वैसे $(-5) \div 0 =$ कितना होगा ?

बताइए

0 से किस संख्या को गुणा करने से गुणनफल -5 होगा ? क्या ऐसी संख्या है ? आपके उत्तर के पक्ष में कारण क्या हैं ?

किस संख्या को 0 से गुणा करने से गुणनफल – 5 होगा ?

अर्थात् $(-5) \div 0$ भी अर्थहीन है ।

$0 \div 0 =$?

आइए, देखें, कौन-सी संख्या $\times 0 = 0$?

$5 \times 0 = 0, \quad 8 \times 0 = 0, \quad 15 \times 0 = 0$

तब $0 \div 0$ का भागफल क्या कोई निश्चित संख्या हुई ?

जरूर आप कहेंगे - 'नहीं' ।

अतएव, एक पूर्णांक को 0 से भाग देना अर्थहीन है ।

सामान्यत: हम कह सकते हैं कि पूर्णांक को शून्य (0) से भाग देना अर्थहीन है । (परिभाषित नहीं)। भाग के संबंध में कुछ उदाहरण नीचे दिए गए हैं । उन्हें ध्यान से देखिए :

एक परीक्षा में प्रत्येक सही उत्तर के लिए 5 अंक दिए जाते हैं। प्रत्येक गलत उत्तर के लिए – 2 अंक दिए जाते हैं।

(i) राधा ने परीक्षा में सभी प्रश्नों के उत्तर दिए थे । पर उनमें से सिर्फ 10 उत्तर सही थे । उसे कुल 30 अंक मिले थे तो परीक्षा में कितने प्रश्न पूछे गए थे ?

(ii) माधव सभी प्रश्नों के उत्तर दे नहीं सका था । उसने सात प्रश्नों के सही उत्तर दिए थे और उसे कुल 19 अंक मिले थे । तब उसने कितने प्रश्नों के उत्तर दिए थे ?

हल : (i) प्रत्येक सही उत्तर के लिए मिलते हैं 5 अंक

राधा को 10 सही उत्तर के लिए मिले $5 \times 10 = 50$ अंक

पर उसे 30 अंक मिले हैं । अतएव, गलत उत्तरों के लिए उसे मिले $= 30 - 50 = -(50 - 30) = -20$

प्रत्येक गलत उत्तर के लिए मिलते हैं – 2 अंक

$\therefore$ अतएव, राधा के गलत उत्तरों की संख्या $= (-20) \div (-2) = 10$

राधा के कुल उत्तर $= 10 + 10 = 20$

राधा ने सभी प्रश्नों के उत्तर दिए थे । अर्थात् कुल प्रश्नों की संख्या = 20 है ।

(ii) माधव को ७ सही उत्तरों के लिए मिले अंक $= 5 \times 7 = 35$ । उसे कुल अंक मिले थे $= 19$

$\therefore$ गलत उत्तरों के लिए मिले थे $= 19 - 35 = -16$

प्रत्येक गलत उत्तर के लिए मिलते हैं – 2 अंक

$\therefore$ माधब के गलत उत्तरों की संख्या $= (-16) \div (-2) = 8$

माधव के उत्तरों की कुल संख्या = सही उत्तरों की संख्या + गलत उत्तरों की संख्या $= 7 + 8 = 15$

उदाहरण : एक दुकानदार प्रत्येक कलम को 1 रुपए के फायदे पर बेचता है । अपने पुराने स्टॉक में बची प्रत्येक पेंसिल को 40 पैसे नुकसान पर बेचता है ।

(i) एक निश्चित महीने में उसने 45 कलमें बेची थीं । कुछ पेंसिले भी बेची थीं । उस महीने में उसके नुकसान 5 रुपए हुए । तब उस महीने में उसने कितनी पेंसिलें बेची थी ?

(ii) अगले महीने में उसका लाभ या नुकसान नहीं हुआ था। उसी महीने में उसने 70 कलमें बेची थीं। तब कितनी पेंसिलें बेची थीं ?

हल : (i) एक कलम से फायदा 1 रुपया या + 1 रुपया

45 कलमों से फायदा रुपए = $45 \times 1 = 45$

पर उस महीने में नुकसान हुआ 5 रुपए यानी – 5 रुपए

∴ कलमों और पेंसिलों से उसे मिले – 5 रुपए

कलमों से मिले थे + 45 रुपए

∴ तब पेंसिलों की बिक्री से मिले = कुल मिले रुपए - कलम से मिले रुपए

$= (-5)-(+45)$

$=-5-45$

$=-50$ रुपए

$=-5000$ रुपए

प्रत्येक पेंसिल से नुकसान 40 पैसे या – 40 पैसे

कुल बेची गई पेंसिलें $=(-5000) \div (-40) = 125$

(ii) अगले महीने में फायदा याद नुकसान कुछ नहीं हुआ

∴ उसकी आय – 0

प्रत्येक पेंसिल में नुकसान = – 40 पैसे

70 कलमें बेचकर उसकी आय $70 \times + 1 = + 70$ रुपए

पेंसिल की बिक्री से आय = कुल आय – कलम से होनेवाली आय

$= 0 -(+70$ रुपए$)$

$= -70$ रुपए

$= -7000$ पैसे

एक पेंसिल बेचने से उसकी आय हुई – 40 पैसे

∴ बेची गई पेंसिल की संख्या = $(-7000) \div (-40) = 175$

क्या आप जानते हैं ?
फायदे को धनात्मक और नुकसान को ऋणात्मक आय मानेंगे ।

अभ्यास - 1.4

1. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(क) $(-40) \div (-10)$ (ख) $(-60) \div (-6)$ (ग) $(-37) \div (+37)$

(घ) $15 \div [(-4) + 3]$ (ङ) $18 \div [-3 - (-2)]$ (च) $0 \div (-5)$

(छ) $27 \div [(-14) + (-13)]$ (ज) $(-19) \div [-2 - (-21)]$ (झ) $[(-25) + 5] \div (-1)$

(ञ) $(-25) \div [5 \div (-1)]$ (ट) $(-32) \div [(-8) \div 4]$

2. a, b और c के लिए निम्न पूर्णांक लें, तो $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$ इसे सत्योपित कीजिए

(क) $a = 12, b = -4, c = 2$ (ख) $a = -10, b = 1, c = -1$

3. (क) ४ जोड़े पूर्णांक (a, b) लिखिए, जिसमें $a \div b = -4$, a एक धनात्मक पूर्णांक है ।

जैसे $(+12, -3)$ क्योंकि $(+12) \div (-3) = -4$

(ख) चार जोड़े पूर्णांक (a, b) लिखिए, जिसमें $a \div b = -3$ और a एक ऋणात्मक पुर्णांक है ।

जैसे $(-15, 5)$, क्योंकि $(-15) \div 5 = -3$

4. एक स्थान पर दोपहर का तापमान 0^0 की अपेक्षा 8^0 अधिक था । आधी रात तक हर घंटे में तापमान 2^0c दर से कम होने लगा। कब तापमान 0^0 की अेपक्षा 6^0 कम होगा ? आधी रात। 12 बजे तापमान कितना होगा ?

5. कोयला उत्तोलन करने का एक यंत्र खान के भीतर हर मिनट में 6 मीटर के वेग से जाता है । यदि भूमि की सतह से 10 मीटर की ऊँचाई से यंत्र खान के भीतर गया था तब वह –350 मी सूचित स्थान पर पहुँचने के लिए कितना समय लगेगा ?

द्वितीय अध्याय

भिन्न संख्या और दशमलव संख्या

2.1 हमें जो ज्ञात है :

हमने पिछली कक्षा में भिन्न संख्या और दशमलव-संख्याओं से परिचित हुए हैं । भग्न संख्याओं में उचित भिन्नों विषम भिन्नों, और मिश्र भिन्नों को पहचानने के साथ-साथ भिन्न संख्याओं के जोड़ और घट ावका अभ्यास कर चुके हैं। इसके अलावा भिन्न-संख्या में तुलना, समान और असमान भिन्न संख्या, संख्या-रेखा में भिन्न का स्थान-निरूपण और समतुल्य भिन्न-संख्या आदि के संबंध में चर्च्चा कर चुके हैं।

उसी प्रकार हमने दशमलव संख्याओं की तुलना संख्या के अंकों के स्थानीयमान के अनुसार उन्हें विस्तारित प्रणाली से लेखन, दशमलव संख्याओं का जोड़-घटाव, संख्या-रेखा पर उनका स्थान निरूपण आदि के संबंध में अध्ययन किया है ।

अब भिन्न संख्याओं और दशमलव संख्याओं के गुणन और भाग के संबंध में सीखेंगे । इसके पहले भिन्न संख्या के संबंध में एक सामान्य जानकारी होनी चाहिए । वह है- भिन्न के अंश और हर कोई उभयनिष्ठ गुणन खंड होता है, अंश और हर को उसी अभयनिष्ठ गुणनखंड से भाग देने पर जो नया भिन्न मिलता है, वह मूल भिन्न का लघुतम रूप होता है ।

खुद करके देखिए:

$\frac{12}{18}$ को सरलतम रूप में लिखिए ।

- $\frac{12}{18}$ में 12 अंश है और 18 हर है ।
- 12 और 18 के उभयनिष्ठ गुणनखंड क्या-क्या है ?
- 12 और 18 के उभयनिष्ठ गुणनखंड में सबसे बड़ा कौन सा है ?
- 12 और 18 को सबसे बड़े उभयनिष्ठ गुणनखंड से भाग देने पर कौन-कौन सी संख्याएँ मिलेंगी ?
- तब $\frac{12}{18}$ का सरलतम रूप क्या है ?

आप को $\frac{12}{18}$ का सरलतम रूप $\frac{2}{3}$ मिला होगा ।

अभ्यास - 2.1

1. भिन्न संख्याओं का स्थान संख्या रेखा पर निरूपण कीजिए:

(क) $\frac{2}{3}$ (ख) $\frac{3}{5}$ (ग) $\frac{7}{2}$

2. निम्न संख्याओं को उनके अंकों के स्थानीयमान के अनुसोर विस्तारित रूप में लिखिए।

(क) 21.52 (ख) 13.534 (ग) 2.25

3. निम्न संख्याओं को अवरोही क्रम से लिखिए।

(क) $\frac{2}{2},\frac{2}{3},\frac{8}{21}$ (ख) $\frac{1}{5},\frac{3}{7},\frac{7}{10}$

4. निम्न संख्याओं को सरलतम रूप में लिखिए।

(क) $\frac{8}{12}$ (ख) $\frac{10}{30}$ (ग) $\frac{27}{36}$

5. जोड़िए :

(क) $4+\frac{7}{8}$ (ख) $2\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}$ (ग) $\frac{7}{10}+\frac{2}{5}+1\frac{1}{2}$

6. घटाइए :

(क) $\frac{9}{10}-\frac{4}{15}$ (ख) $8\frac{1}{2}-3\frac{5}{8}$ (ग) $7-\frac{5}{8}$

7. एक आयताकार टीन के चद्दर की लंबाई और चौड़ाई क्रमश : $12\frac{1}{2}$ से.मी. और $10\frac{2}{5}$ से.मी. है । तब उसका परिमाप तय कीजिए ।

8. रिंकु ने 25.75 दाम की एक किताब खरीद करके दुकानदार को 50 रुपए का एक नोट दिया । दुकानदार रिंकु को कितना लौटाएगा ?

2.2 भिन्न संख्या का गुणन

हम प्राकृत संख्याओं का गुणा करना जानते हैं। आइए, हम निम्न गुणन-संक्रिया को देखेंगे ।

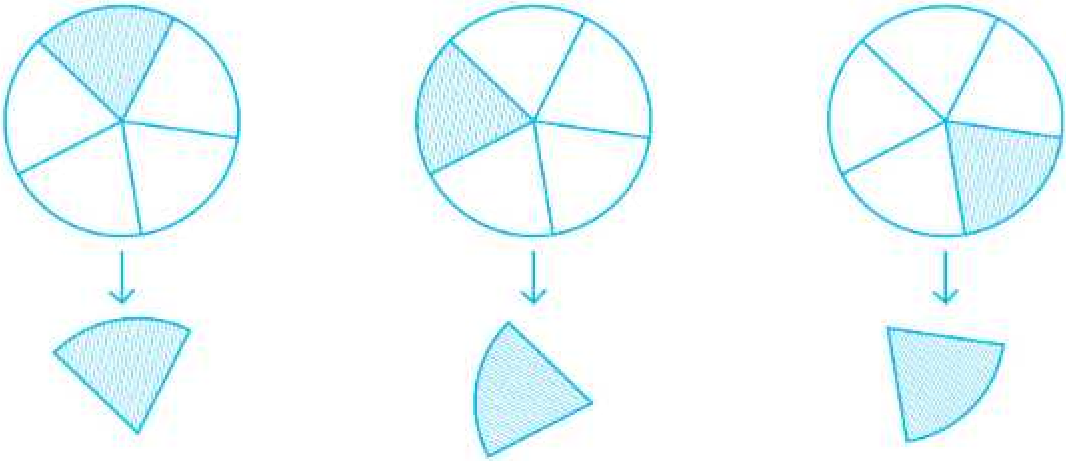
5×7 = 5 बार 7 का योग
= 7+7+7+7+7
= 35

क्या आप जानते हैं ?
हम किसी भी संख्या के क्रमिक योग को गुणा कहते हैं।

भिन्न के क्षेत्र में हम गुणन - संक्रिया कैसे करेंगे :

2.2.1 एक भिन्न संख्या और एक प्राकृत संख्या का गुणा

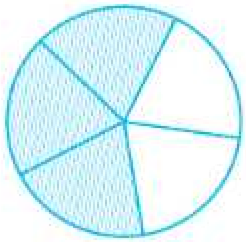
$3\times\frac{1}{5}$ को हम तीन और $\frac{1}{5}$ का जोड़ कह सकते हैं। निम्न की आकृतियों (2.1) को देखिए।



(चित्र 2.1)

यहाँ तीन समान आकृतियों ली गई हैं । प्रत्येक को पाँच बराबर भागों में बाँटा गया है । प्रत्येक $\frac{1}{5}$ का भाग छायांकित किया गया है ।

प्रत्येक छायांकित अंश को काटकर नीचे दिखाया गया है ।



(चित्र 2.2)

चित्र 2.2 अन्य एक समान आकृति को 5 बराबर भागों में विभाजित करके ऊपर के तीनों $\frac{1}{5}$ भागों को लाकर इस आकृति में जोड़ा गया है ।

अब बताइए, आकृति में क्या दिखाई पड़ता है ?

आकृति में 5 बराबर भागों में 3 भाग छायांकित किए गए हैं ।

अतएव, $3\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

हम हम सकते हैं $3\times\frac{1}{5}=\frac{3\times1}{5}=\frac{3}{5}$

पूर्णांक 3 को भिन्न के अंश 1 से गुणा करने में गुणनफल का अंश मिला है । भिन्न का हर गुणनफल का हर ही है ।

नीचे के उदाहरणों को देखिए :

उदाहरण - 1 : 3 और $\frac{2}{7}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

हल : $3\times\frac{2}{7}=\frac{3\times2}{7}=\frac{6}{7}$

उदाहरण - 2 : 4 और $\frac{3}{5}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $4\times\frac{3}{5}=\frac{4\times3}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$

> **क्या आप जानते हैं ?**
> गुणफल विषम भिन्न होने पर उसे मिश्र भिन्न में बदल दिया जाता है ।

उत्तर लिखिए :

(क) $2\times\frac{2}{5}=\frac{2\times\ldots\ldots}{\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

(क) $3\times\frac{5}{7}=\frac{\ldots\times\ldots}{\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

जो उत्तर मिला वह उचित भिन्न है या विषम भिन्न है ?

यदि वह बिषम भिन्न है, तो उसे मिश्र भिन्न में बदलकर उत्तर ज्ञात करना होगा ।

उदाहरण - ३ समीर के पास 28 रुपए थे । उसने उसका $\frac{1}{4}$ भाग संजय को दे दिया । उसने संजय को कितना दिया ? उसने संजय को कितना दिया ?

हल : 28 के $\frac{1}{4}$ =28 4 के बराबर हिस्सों से 1 भाग दिया $=28\div4=7$

हमें पता था $28\times\frac{1}{4}=\frac{28\times1}{4}=\frac{28}{4}=7$

2.2.2. दो भिन्न संख्याओं का गुणन

मान लो, हमें $\frac{2}{3}$ और $\frac{4}{5}$ से गुण ज्ञात करना है।

हम $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ को $\frac{2}{3}$ बार $\frac{4}{5}$ का योग कह सकते हैं।

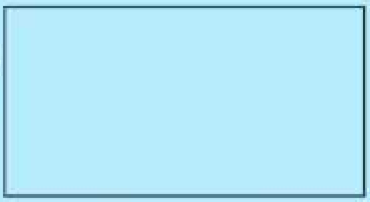
कारण सोचकर बताइए ।

तब $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ का कार्य कैसे करेंगे ?

> **क्या आप जानते हैं ?**
> $\frac{2}{3}$ पूरे कहने का कोई अर्थ नहीं है । हम 1 बार, 2 बार, 5 बार आदि कहते हैं। उसका अर्थ भी समझते हैं । क्यों कि गिनने के लिए गणन संख्या का व्यवहार किया जाता है । भिन्न संख्या का व्यवहार नहीं किया जाता ।

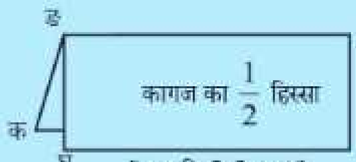
खुद करके देखिए :

- चित्र 2. 3(क) में जैसे दिखाया गया है, वैसे एक आयताकार कागज लीजिए।
- उस कागज को दो बराबर हिस्से कीजिए। मोड़े गए कागज के ऊपर का भाग कागज का $\frac{1}{2}$ भाग है । (चित्र 2.3 (ख)
- अब दो सतहों में मोड़े कागज को फिर से तीन बराबर भाग में मोड़ लीजिए।



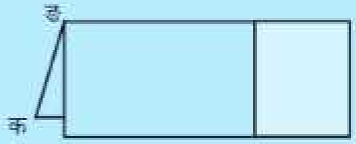
[(चित्र 2.3 (क)]

चित्र 2.3(ग) में दर्शाया जाने वाला भाग पहले लिए गए कागज के $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3}$ भाग है ।



[आकृति 2.3 (ख)]

- आकृति 2.3 (ग) के मोड़े गए कागज पर रंग भरिए। रंगीन भाग पहले लिए गए कागज का $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3}$ भाग है।
- अब मोड़े गए कागज को पुरा खोल दीजिए। खुले गए कागज को देखकर भिन्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



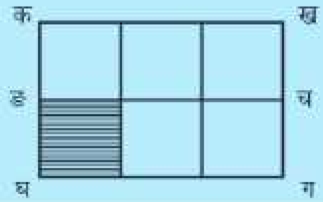
[आकृति 2.3 (ग)]

(क) मोड़े गए कागज पर चिह्नों से कागज कितने बराबर भागों में बांट गया है ?

(ख) कागज का छायांकित भाग कागज के कितने बराबर भागों से कितने भाग है ?

(ग) छायांकित भाग किस भिन्न का सूचक है ? इससे हमने क्या सीखा ?

कागज के $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ अर्थात् $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$



खुद करके देखिए:

- आयताकार कागज का एक टुकड़ा लीजिए।
- इसे चार बराबर भागों में मोड़िए।
- मोड़े गए कागज को फिर से दो बराबर भागों में मोड़ दीजिए।
- मोड़े गए कागज के ऊपर के भाग में रंग भरिए।
- मोड़े गए कागज को अब खोल दीजिए।

कागज का देखकर निम्न खाली जगहें भरिए :

(a) कागज का टुकड़ा .... बराबर भागों में विभाजित है ।

(b) कागज के .... बराबर भागों में से .... बराबर भाग रंगीन दिखाई पड़ता है ।

(c) कागज का .... भाग रंगीन है ।

(d) कागज को पहले .... बराबर भागों में मोड़ा गया था । बाद में मोड़े गए कागज को फिर से........... बराबर भागों में मोड़ दिया गया । अतएव, कागज .... कुल भागों में विभाजित हुआ ।

(e) हमें पता चला कि कागज के .... भाग में रंग भरा गया है ।

- इससे हमें क्या ज्ञात हुआ ?

..................× .... = $\frac{1}{8}$

अब देखेंगे - $\frac{1}{8} = \frac{1\times1}{4\times2}$

अतएव, $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{1\times1}{4\times2} = \frac{1}{8}$

हमें ज्ञात हुआ :

- दो भिन्नों का गुणनफल एक भिन्न होता है ।
- गुणनफल का अंश = गुणा किए गए दो भिन्नों के अंशों का गुणनफल

  गुणनफल का हर - गुणा किए गए दो भिन्नों के हरों का गुणनफल

  जैसे - $\frac{1}{5}\times\frac{1}{7} = \frac{1\times1}{5\times7} = \frac{1}{35}$

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$

-
-

आइए, और एक गतिविधि से दो भिन्नों का गुणनफल तय कीजिए :

खुद करके देखिए :

- एक आयताकार कागज लीजिए। ऊपर से नीचे की ओर रेखा खींचकर कागज को तीन बराबर भागों में विभाजित कीजिए। (पहले तीन मोड़ करके बाद में रेखा खींचकर या स्केल से तीन बराबर भाग करके रेखा खींच सकते हैं।)

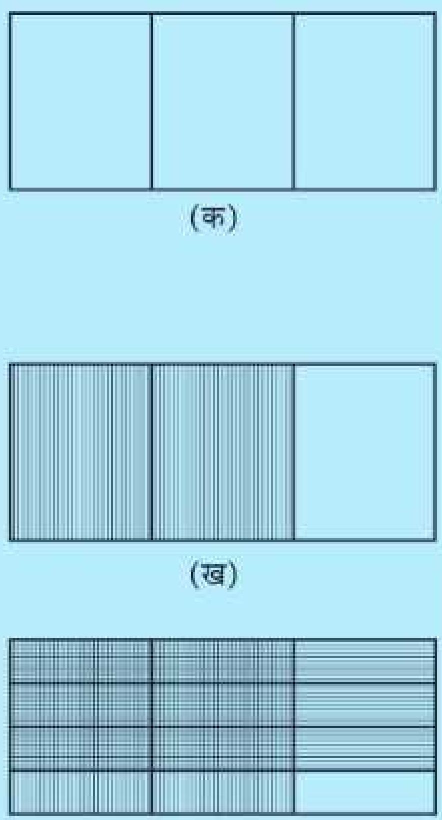
  दो भाग्रें को काली स्याही से ऊपर से नीचे की ओर छायांकित कीजिए। (चित्र 'ख' की तरह)
- बाइँ से दाइँ की ओर रेखा खींचकर कागज को 4 बराबर हिस्सों से विभ-ाजित कीजिए। (चित्र 'ग' की तरह) कागज को 4 बराबर भाग करके बाद में रेखा खींच सकते है या स्केल से भाबकर रेखा खींच सकते हैं।
- अब 4 बराबर भागों से 3 भागों पर लाल स्याही से बाइँ से दाइँ की ओर रेखा खींचकर पूरा कीजिए ।

  (क) कागज के .... भागों पर ऊपर से नीचे की ओर काली स्याही से रेखा खींचकर पूरा किया गया है ।

  (ख) काली स्याही से रेखा खींचकर पूरे किए गए $\frac{2}{3}$ भागों के .... भाग लाल स्याही से रेखा खींचकर पूरा किया गया है।

  (ग) कागज पर .... के .... भागों में काली और लाल दोनों स्याही से रेखाएँ खींचीं गई हैं।

  (घ) कागज पर कुल 12 भागों में से .... भागों में दोनों काली और लाल स्याही में रेखाएँ हैं।



(ग)

चित्र 2.4

अतएव, हमें पता चला कि : $\frac{2}{3}$ का $\frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ या $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$

पर $\frac{6}{12} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4}$

अतएव, $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4}$

हमें यह भी पता चला कि :

- दो भिन्नों का गुणनफल एक भिन्न होगा ।
- गुणनफल का अंश - गुणा किए गए दोनों भिन्नों के अंशों का गुणनफल ।
  गुणनफल का हर - गुणा किए गए दोनों भिन्नों के हरों का गुणनफल

  जैसे : $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$

उदाहरण -4 : $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{9}$ का गुणनफल कितना है?

हल : $\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{3 \times 4}{5 \times 9} = \frac{12}{45}$

उदाहरण - 5: $\frac{2}{3}$ और $1\frac{2}{5}$ का गुणनफल कितना है?

हल : $\frac{2}{3} \times 1\frac{2}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$

$= \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$

उदाहरण-6 : एक दुकानदार के पास 40 पेंसिलें थीं। उसने पहले दिन पेंसिलों का $\frac{1}{5}$ भाग बेच दिया । दुसरे दिन बेचे हुए पेंसिलों का $\frac{1}{4}$ भाग बेच दिया । उसने उन दो दिनों में कुल कितनी पेंसिलें बेची थीं ?

हल : पहले दिन बेची गई पेंसिलें $= 40$ का $\frac{1}{5}$ भाग

$= 40 \times \frac{1}{5} = \frac{40}{5} = 8$ $\left[\frac{40}{5} \text{ का अर्थ है } 40 \div 5\right]$

बची पेंसिलें $= 40 - 8 = 32$

दूसरे दिन बेची गई पेंसिलें $= 32$ का $\frac{1}{4}$ भाग

$= 32 \times \frac{1}{4} = \frac{32}{4} = 8$ $\left[\frac{32}{4} \text{ का अर्थ है } 32 \div 4\right]$

दोनों दिनों में कुल बेची गई पेंसिलें $= 8 + 8 = 16$

अभ्यास - 2.2

1. गुणा कीजिए :

(क) $2\times\frac{1}{5}$ (ख) $7\times\frac{3}{5}$ (ग) $5\times\frac{2}{9}$ (घ) $8\times\frac{2}{3}$ (ङ) $4\times1\frac{3}{5}$ (च) $2\frac{1}{2}\times3$

2. गुणा कीजिए । (गुणनफल विषम भिन्न हो,तो उसे मिश्र भिन्न में बदलिए।)

(क) $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$ (ख) $\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}$ (ग) $\frac{4}{9}\times\frac{5}{7}$ (घ) $\frac{5}{8}\times\frac{3}{4}$

(ङ) $1\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$ (च) $\frac{4}{5}\times3\frac{1}{3}$ (छ) $2\frac{1}{3}\times1\frac{1}{2}$ (ज) $3\frac{1}{2}\times1\frac{2}{5}$

3. गुणा कीजिए। (संभव हो तो उसे सरलतम रूप में बदलकर फिर मिश्र भिन्न में बदल दें।)

(क) $3\frac{1}{2}\times1\frac{3}{8}$ (ख) $2\frac{1}{2}\times1\frac{1}{5}$ (ग) $2\frac{2}{5}\times1\frac{3}{4}$

4. नीचे के प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(क) 24 का $\frac{1}{2}$ (ख) 18 का $\frac{2}{3}$ (ग) 27 का $\frac{5}{9}$ (घ) 121 का $\frac{7}{11}$

5. एक कार 16 कि.मी. तय करने के लिए 1 लीटर पेट्रोल की जरूरत पड़ती है । $2\frac{3}{4}$ लीटर पेट्रोल डालने से वह कार कितना रास्ता तय करेगी ?

6. रिंकी एक सीधी पंक्ति में 9 पौधे लगाएगी । यदि दो पौधों के बीच में दूरी $\frac{3}{4}$ मीटर रहती है तो पहले और आखिरी पौधे की बीच की दूरी कितनी होगी ?

7. एक कक्षा में कुल 56 छात्र-छात्राएँ पढ़ते हैं। उनमें से $\frac{2}{7}$ भाग छात्राएँ हैं । कुल छात्रों का $\frac{1}{5}$ भाग रोज साइकिल से स्कूल आते हैं । तब

(a) कक्षा में कितने छात्र पढ़ते हैं? (b) कितने छात्र साइकिल से स्कूल आते हैं ?

8. गुणा कितना होगा ? (क) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{7}{9}$

सूचना $\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{7}{9}=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\right)\times\frac{7}{9}$

$=\frac{2\times1}{3\times5}\times\frac{7}{9}$

क्या आप जानते हैं ?
तीन भिन्न संख्याओं का गुणा करते समय गुणन का साहचर्य गुणा प्रयुक्त होता है ।

(ख) $\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{6}{7}$

9. गुणा कीजिए :

(क) $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$

ध्यान दें : अंश या हर पूरा कट जाने से उसके स्थान पर 1 लिया जाता है ।

(ख) $\frac{3}{5}\times\frac{7}{9}\times\frac{15}{28}$

क्या आप जानते हैं ?

भिन्न का गुणा करने के बाद गुणनफल को सरलतम रूप में बदला जा सकता है । या गुणा करने से पहले निम्न गतिविधि से कार्य कर सकते हैं।

- पहले भिन्न का अंश 2 है । दूसरे भिन्न का हर 4 है । इनका उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है । अतएव, 2 और 4 दोनों को 2 से भाग देना या 2 से काटना होगा।
- उसी प्रकार दूसरे भिन्न का अंश 3 और तीसरे का हर 6 है, दोनों को उभयनिष्ठ गुणनखंड 3 से काटेंगे । तीसरे का लव 5 है । पहले भिन्न का हर भी 5 है । दोनों को हम काटेंगे।

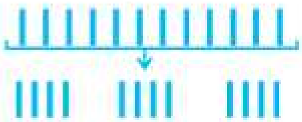
यह कार्य निम्न गतिविधि से दर्शाया जाता है :

$$\frac{\not{2}}{\not{5}}\times\frac{\not{3}}{\not{4}_2}\times\frac{\not{5}}{\not{6}_2} = \frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

2.3 भिन्न संख्या द्वारा भाग

हम पहले से एक धनात्मक पूर्णांक को दूसरे धनात्मक पूर्णांक से भाग देना जानते हैं। उस स्थिति में हम कैसे भाग - संक्रिया पूरी करते हैं, उसे फिर से याद करेंगे :

मान लीजिए कि हम 12 को 4 से भाग देंगे ।



: 12 वस्तुएँ हैं

: हम उन्हें 4 संमूहों में बाँटेंगे ।

क्या आप जानते हैं ?

भाज्य में भाजक जितनी बार रहता है, भागफल वही होता है ।

हमें पता चला कि 12 में 4 तीन बार है।

अतएव, हमने कहा, $12 \div 4 = 3$

आइए, एक धनात्मक पूर्णांक एक भिन्न संख्या से भाग देंगे ।

2.3.1 धनात्मक पूर्णांक को भिन्न संख्या से भाग देना :

आइए 1 को $\frac{1}{2}$ से भाग देंगे ।

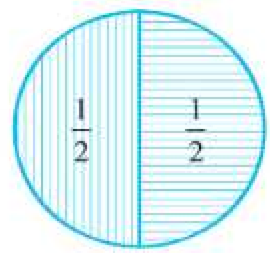
इसके लिए पहले तय करेंगे कि 1 में कितने $\frac{1}{2}$ हैं,

चित्र 2.5 में एक आकृति को 2 बराबर भाग किया गया है ।

इसलिए प्रत्येक भाग आकृति का $\frac{1}{2}$ भाग है ।

यह स्पष्ट आकृति में दो $\frac{1}{2}$ है ।

अर्थात् 1 में $\frac{1}{2}$ दो बार है । अतएव, $1\div\frac{1}{2}=2$



[चित्र 2.5]

✍ चित्र 2.6 को देखकर निम्न खाली जगहें भरिए :

चित्र - 'क' : 1 में .... $\frac{1}{3}$ है ।

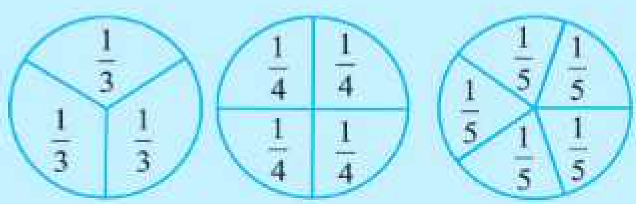
$\therefore 1\div\frac{1}{3}=$ ....

चित्र - 'ख' 1 में .... $\frac{1}{4}$ है ।

$\therefore 1\div\frac{1}{4}=$ ....

चित्र - 'ग' 1 में .... $\frac{1}{5}$ है ।

$\therefore 1\div\frac{1}{5}=$ ....



[चित्र 2.6]

अब देखेंगे कि भाग कैसे किया जाता है ?

$1 \div \frac{1}{2} = 2$ (चित्र 2.5 में दर्शाया गया है)

पर $1 \times 2 = 2$ हम लिख सकते है $1 \times \frac{2}{1} = 2$

[क्योंकि 2 के साथ $\frac{2}{1}$ समान है । इसलिए 1×2 की जगह पर $1 \times \frac{2}{1}$ भी लिखा जा सकता है ।]

∴ हमने देखा

$1 \div \frac{1}{2}$ जो $1 \times \frac{2}{1}$ है

वैसे $1 \div \frac{1}{3} = 1 \times \frac{3}{1} = 3$

हमने देखा :

भाग की संक्रिया में भाजक यदि एक भिन्न संख्या हो, तब भागफल पाने के लिए भाज्य को भाजक की विपरीत भिन्न संख्या (अंश को हर और हर को अंश में बदलकर) से गुणा करते है ।

याद रखिए : एक भिन्न संख्या के अंश को हर और हर को अंश के रूप में लेने से जो भिन्न संख्या लिखी जाती है, उसे पहले की भिन्न संख्या का **व्युत्क्रम (प्रतिलोम)** कहा जाता है ।

अतएव, $\frac{1}{3}$ का प्रतिलोम = $\frac{3}{1}$

$\frac{2}{5}$ का प्रतिलोम = $\frac{5}{2}$

$\frac{3}{4}$ का प्रतिलोम = ...

$\frac{5}{7}$ का प्रतिलोम = ...

हम कह सकते हैं :

भाग की संक्रिया में भाजक एक भिन्न संख्या हो तो भागफल पाने के लिए भाज्य को भाजक के प्रतिलोम से गुणा किया जाता है ।

उदाहरण - 7 3 को $\frac{3}{5}$ से भाग दें

हल : $3 \div \frac{3}{5} = 3 \times \frac{3}{5}$ का प्रतिलोम $= 3 \times \frac{5}{3} = \frac{15}{3} = 5$ (उत्तर)

उदाहरण - 8 : 2 को $1\frac{2}{3}$ से भाग दें ।

हल : $2 \div 1\frac{2}{3} = 2 \div \frac{5}{3} = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ (उत्तर)

ध्यान दें : मिश्र भिन्न को विषम भिन्न में बदलकर भाग की संक्रिया पूरी की गई ।

✍ नीचे दी गई खाली जगहें भरिए :

(क) $\frac{2}{3}$ का प्रतिलोम = ... (ख) $\frac{3}{7}$ का प्रतिलोम = ...

(ग) $\frac{5}{2}$ का प्रतिलोम = ... (घ) 4 का प्रतिलोम = ...

(ङ) $1 \div \frac{1}{5} =$ ....×......... = ... (च) $2 \div \frac{3}{4} =$ ....×......... = ...

2.3.2 भिन्न को धनात्मक पूर्णांक से भाग देना

$2 \quad \frac{2}{1}$

एक भिन्न को एक धनात्मक पूर्णांक से भाग देते समय पहले की तरह भी भाज्य को भाजक के प्रतिलोम से गुणा किया जाता है ।

जैसे: $\frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \times \left(4 \text{ का प्रतिलोम}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2 \times 1}{3 \times 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

उदाहरण - 9 : $\frac{3}{5}$ को 2 से भाग दीजिए। (उत्तर)

हल : $\frac{3}{5} \div 2 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ (उत्तर)

उदाहरण - 10 : $2\frac{1}{3}$ को 5 से भाग दीजिए।

हल : $2\frac{1}{3} \div 5 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$ (उत्तर)

✍ हल कीजिए :

(क) $\frac{4}{5} \div 3 =$ (ख) $3\frac{1}{3} \div 4 =$

2.3.3 भिन्न संख्या को भिन्न संख्या से भाग देना ।

एक भिन्न संख्या भाज्य को एक भिन्न संख्या भाजक से भाग देने के समय भी भाग संक्रिया में पहले की प्रणाली का प्रयोग किया जाता है । अर्थात् भाज्य ÷ भाजक = भाज्य × भाजक का प्रतिलोम

उदाहरण - 11 : $\frac{1}{3}$ को $\frac{5}{6}$ से भाग दीजिए

हल : $\frac{1}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{6} \text{ का प्रतिलोम}\right)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{15}$

$= \frac{2}{5}$ [सरलतम रूप में बदल दिया गया है]

बताइए :
एक संख्या को उसी संख्या के प्रतिलोम के साथ गुणा करने से गुणनफल कितना होगा ?

निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए :

(क) $\frac{2}{7} \div \frac{3}{5}$ (ख) $1\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$ (ग) $2\frac{3}{5} \div 1\frac{2}{3}$

अभ्यास - 2.3

1. निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए :

(क) $12 \div \frac{3}{4}$ (ख) $8 \div \frac{7}{3}$ (ग) $4 \div \frac{8}{5}$

(घ) $3 \div 2\frac{1}{3}$ (ङ) $5 \div 3\frac{4}{7}$

2. निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए :

(क) $\frac{7}{3} \div 2$ (ख) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{7}$ (ग) $3\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$

(घ) $4\frac{1}{3} \div 3$ (ङ) $3\frac{1}{2} \div 4$

3. निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए :

(क) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$ (ख) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{7}$ (ग) $3\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$

(घ) $\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2}$ (ङ) $2\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{5}$

4. $\frac{3}{5}$ मीटर लंबे फीते से $\frac{1}{5}$ मीटर के कितने टुकड़े फीते काटे जा सकते हैं ?

2.4 दशमलव संख्या से गुणा करना

दशमलव संख्या (या दशमलव भिन्न संख्या) एक स्वतंत्र प्रकार का भिन्न है, जिसका हर 10, 100, 1000 जैसे 10 के घात-संख्या होती है । इस भिन्न संख्या को दशमलव बिन्दु का प्रयोग करके दशमलव संख्या के रूप में लिखा जाता है।

जैसे : $\frac{3}{10} = 0.3$

$2\frac{27}{100} = 2.27$ (आदि)

ऊपर की संक्रिया में हर एक दशमलव बिन्दु के रूप में है। इसलिए दशमलव संख्या को लेकर गुणा करते समय दशमलव संख्या को भिन्न संख्या में बदलकर हम गुणा कर सकते हैं।

2.4.1 दो दशमलव संख्याओं का गुणा करना :

आइए 0.3 और 1.5 का गुणा करेंगे ।

जैसे : $0.3 \times 1.5 = \frac{3}{10} \times 1\frac{5}{10}$

$= \frac{3}{10} \times \frac{15}{10}$

$= \frac{45}{100}$

$= 0.45$

बताइए:
यहाँ $1\frac{5}{10}$ के लिए $\frac{15}{10}$ लिखा गया है ? क्यों ?

ध्यान दीजिए : यहाँ दोनों अंशों के गुणनफल से दोनों दशमलव संख्या का गुणनफल मिला है । दोनों हरों का गुणनफल अर्थात 100, हमें गुणनफल में दशमलव बिन्दु का स्थान निरूपण करने में मदद किया है ।

अतएव हमने देखा :

- गुणन संक्रिया में हमने 0.3 को ३ के रूप में और दूसरी संख्या 1.5 को 15 के रूप में लिया है । इन दोनों का गुणनफल मिला $3 \times 15 = 45$
- पहली संख्या के दशमलव बिन्दु के बाद एक अंक है । दूसरी संख्या के दशमलव बिन्दु के बाद भी एक अंक है । गुणनफल के दशमलव बिन्दु के बाद दो अंक है ।
- गुणा करने के समय हमें पहली संख्या के दशमलव बिन्दु के बाद अंक संख्या 1 और दूसरी संख्या के दशमलव बिन्दु के बाद का अंक 1 को जोड़कर 2 मिले। हमें गुणनफल के दशमलव बिन्दु के बाद भी अंक 2 मिले ।

किस स्थिति में दो दशमलव संख्या का गुणा करना पड़ता है, अब देखें :

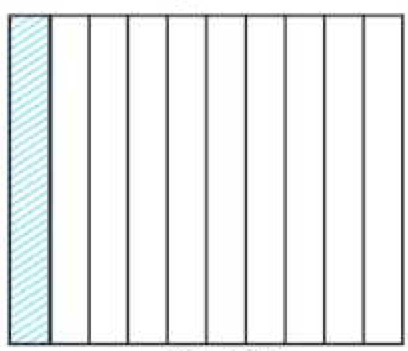
मानस ने किलोग्राम 8.50 दर से 2.5 कि.ग्रा. करेला खरीदा । वह सब्जीवाले को कितना भुगतान कराएगा ? आप जरूर कहेंगे कि मानस भुगतान करेगा - (8.50×2.50) रूपए ।

ध्यान दें 8.5 और 2.5 एक एक दशमलव संख्या है । हमें इस स्थिति में दो दशमलव संख्या का गुणा करना होगा ।

आइए, गुणन-संक्रिया पर और एक बार ध्यान दें।

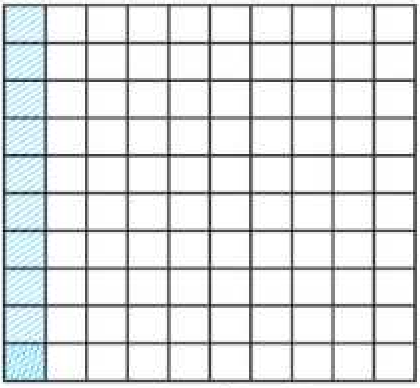
बगल में दिए गए चित्र 2.7 को देखिए।

- यहाँ एक कागज-पट्टी को कितने बराबर भागों में बाँटा गया है ?
- प्रत्येक भाग कागज-पट्टी का भाग है $\frac{1}{10}$ या 0.1 भाग है तब छायांकित अंश कागज-पट्टी के कितने भाग हैं ?



(चित्र 2.7)

फिर कागज पट्टी पर बाईं ओर से दाईं ओर रेखाएँ खींची गईं और उसे 10 बराबर भागों में बाँटा गया है । (चित्र 2.8) । इससे चित्र 2.7 में दर्शाया गया छायांकित भाग भी 10 बराबर भागों में बाँटा गया है । पूरी कागज पट्टी $10 \times 10 = 100$ बराबरं भागों में बाँटी गई है ।



(आकृति 2.8)

परिणाम-स्वरूप चित्र 2.8 में क्रम छायांकित भाग पूरी कागज-पट्टी को $\frac{1}{10}$ भाग का एक दशांश है ।

वह भाग छायांकित भाग पूरी कागज-पट्टी का कितना अंश है ?

हम कह सकते हैं, यह भाग छायांकित भाग पूरी कागज पट्टी के $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$ भाग है ।

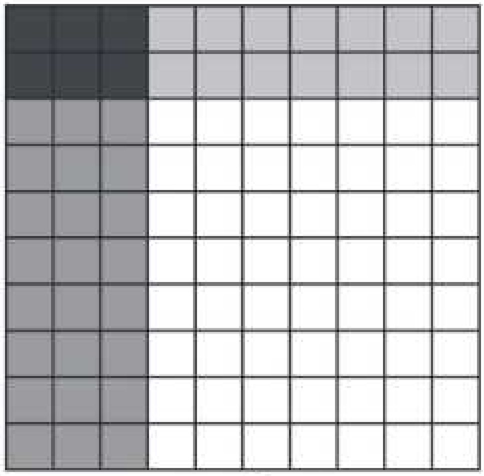
या 0.1 का 0.1 का भाग = 0.1×0.1 भाग है ।

पूरी पट्टी को 1 मान लें, तो छोटे छायांकित भाग 0.1×0.1 सख्या को दर्शाता है । यह भाग पूरी कागज-पट्टी को 100 भागों में से एक भाग है। अर्थात् इसका $\frac{1}{100} = 0.01$, अतएव, $0.1 \times 0.1 = 0.01$

- आइए, 0.2×0.3 का मान ज्ञात करेंगे ।

आकृति 2.9 में कागज पट्टी पर बाईं से दाईं ओर रेखा खींचकर 10 बराबर भागों में बाँटा गया है । दस भागों में से 2 को लाल रंग से चिह्नित किया गया है ।

फिर ऊपर से नीचे की ओर रेखाएँ खींचकर कागजपट्टी को दस बराबर भागों में बाँटा गया है । उनमें से तीनों को काली रेखा से चिह्नित किया गया है । अत: लाल रंग और काली दोनों रेखाओं से चिह्नित भाग, पूरी कागज पट्टी के $\frac{2}{10}$ भाग का $\frac{3}{10}$ भाग है । या 0.2 का 0.3 भाग यानी 0.2×0.3 भाग है । पूरी कागज-पट्टी $10 \times 10 = 100$ छोटे खानों में बाँटी गई है । लाल और काले दोनों रंगों से भरे गए खाने $2 \times 10 = 6$ खाने हैं। यह कुल 100 खानों में से 6 खानों को दर्शाता है। अत: यह भाग पुरी कागज-पट्टी का $\frac{6}{100}$ भाग यानी 0.6 भाग है ।



(आकृति 2.9)

हमने देखा, $0.2 \times 0.3 = 0.06$ ।

तब दशमलव संख्या का गुणा कैसे किया जाता है, आइए देखें :

0.2×0.3

दशमलव बिन्दु को छोड़कर दोनों संख्याओं को लिखेंगे और गुणनफल ज्ञात करेंगे । हमें मिलेगा - $2 \times 3 = 6$

पहली संख्या 0.2 में दशमलव के बाद का अंक है = 1

दूसरी संख्या 0.3 में दशमलव बिन्दु के बाद का अंक है = 1

दोनों संख्याओं में दशमलव बिन्दु के बाद अंक है = 1 + 1 = 2

इसलिए गुणनफल में दशमलव बिन्दु के बाद 2 अंक रहेंगे ।

ऊपर मिले गुणनफल 6 को 06 के रूप में लिखा जाएगा । (इससे गुणनफल का मान नहीं बदला)

तब हमने देखा :

निम्न चार सोपानों में गुणन संक्रिया पूरी की गई ।

पहला सोपान : $0.2 \times 0.3 = 0.6$ के लिए $2 \times 3 = 6$

दूसरा सोपान : पहली और दूसरी दोनों संख्याओं के दशमलव बिन्दु के बाद कुल अंक $1 + 1 = 2$

तीसरा सोपान : जो गुणनफल 6 मिला, उसकी बाईं ओर एक शून्य जोड़कर इसे दो अंकीय करने से मिला 06

चौथा सोपान : जो गुणनफल मिला है उसकी दाईं ओर से दो अंक छोड़कर दशमलव बिन्दु लगाने से मिला 06 या 0.06

उदाहरण 12 : 1.2 और 2.5 का गुणा कीजिए।

हल :

पहला सोपान : $12 \times 25 = 300$

दूसरा सोपान : दोनों संख्याओं के दशमलव संख्या के बाद में कुल अंक है $= 1 + 1 = 2$

तीसरा सोपान : गुणनफल की दाईं ओर से दो अंक छोड़कर दशमलव बिन्दु लगाने से मिला 3.00

$1.2 \times 2.5 = 3.00$ या 3

ज्ञात कीजिए :

(क) 0.5×0.6

(ख) 0.8×1.6

(ग) 2.4×4.2

(घ) 1.5×1.25

उदाहरण - 13

एक समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई 1.5 से.मी. है । त्रिभुज का परिमाप बताइए ।

हल :

समबाहु त्रिभुज का परिमाप $= 3 \times$ भुजा की लंबाई

$= 3 \times 1.5$ से.मी.

$= 4.5$ से.मी.

उदाहरण - 14

एक आयतकार की लंबाई और चौड़ाई क्रमश- 73.5 से.मी. और 0.15 मीटर है । आयत का क्षेत्रफल तय करो ।

हल :

आयत की लंबाई = 73.5 से.मी.

= 0.735 मी.

आयत की चौड़ाई = 0.15 मी.

$\therefore$ आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

= (0.735×0.15) वर्ग मी.

= 0.11025 वर्ग मी. (उत्तर)

क्या आप जानते हैं ?

1मी.= 100

1से.मी. = $\frac{1}{100}$ से.मी.

दशमलव संख्या को एक धनात्मक पूर्णांक से कैसे गुणा किया जाता है, अब देखेंगे :

$0.4 \times 8 = ?$

यहाँ पहली संख्या के दशमलव संख्या के बाद के अंक की संख्या = 1 दूसरी संख्या में कोई दशमलव भाग नहीं है । अत: दोनों संख्याओं में दशमलव बिन्दु के बाद कुल अंक = 1

∴ गुणनफल की दाईं ओर से एक अंक छोड़कर दशमलव बिन्दु दिया जाएगा।

परिणामस्वरुप, $0.4 \times 8 = 3.2$

8.0 जैसी संख्या का गुणा करना हो, तो दशमलव बिन्दु के बाद कोई अंक नहीं है, ऐसा मानेंगे, क्योंकि 8.0 = 8

पर 8.04 हो तो यहाँ दशमलव बिन्दु के बाद दो अंक हैं, ऐसा मानेंगे ।

8.40 के क्षेत्र में दशमलव बिन्दु के बाद अंक - संख्या 1 मानेंगे क्योंकि 8.40 = 8.4

2.4.2 दशमलव संख्याओं का 10, 100 और 1000 से गुणा करना ।

हमें पता है कि एक दशमलव संख्या के भिन्न संख्या में बदलने से इसका हर 10, 100 या 1000 जैसी संख्या होती है ।

$0.2 = \frac{2}{10}$, $0.34 = \frac{34}{100}$, $0.042 = \frac{42}{1000}$ आदि

अब एक दशमलव संख्या को 10, 100 या 1000 जैसी संख्या से गुणा करेंगे ।

$0.2 \times 10 = \frac{2}{10} \times 10 = 2$ या 2.0

यहाँ हमने देखार मूल संख्या 0.2 या 0.20 का दशमलव बिन्दु एक स्थान दाईं ओर विस्थापित करके 2 के दाईं ओर रखने से गुणन फल मिलता है ।

$0.5 \times 100 = \frac{5}{10} \times 100 = \frac{500}{10} = 50$ या 50.0

क्या आप जानते हैं ?
दशमलव संख्या की दाईं ओर कितने भी शून्य 0 लगाने पर भी संख्या में कोई बदलाव नहीं आता ।
जैसे : $0.2 = 0.20$
$= 0.200$

यहाँ हमने देखा, मूल संख्या 0.5 या 0.500 के दशमलव बिन्दु के दो स्थान दाईं ओर लेकर विस्थापित करके 5 के बाद के पहले शून्य के दाईं ओर रखने से हमें गुणनफल मिलता है ।

अतएव, हमने देखा :

एक दशमलव संख्या को 10, 100, 1000 जैसी संख्या से गुणा करते समय गुण्य संख्या (दशमलव संख्या) के अंक में कोई बदलाव नहीं होगा । सिर्फ दशमलव बिन्दु के स्थान में बदलाव होता है ।

दशमलव बिन्दु के स्थान का क्या बदलाव होता है ?

(1) एक दशमलव संख्या को 10 से गुणा करते समय दशमलव बिन्दु एक स्थान दाईं ओर विस्थापित किया जाता है।

(2) एक दशमलव संख्या के 100 से गुणा करते समय दशमलव बिंदु दो स्थान दाईं ओर विस्थापित हो जाता है ।

(3) एक दशमलव संख्या को 1000 से गुणा करते समय दशमलव बिन्दु तीन स्थान दाईं ओर विस्थापित होता है ।

ध्यान दें :

गुणा करने से दशमलव बिन्दु जितने स्थान दाईं ओर विस्थापित होगा, यदि मूल दशमलव संख्या के दशमलव बिंदु के बाद उससे कम स्थान होगा, तब मूल दशमलव संख्या के बाद आवश्यक संख्या के शून्य लिखकर उसके बाद दशमलव बिंदु को विस्थापित किया जाता है । जैसे : 3.2 1000 का मान ज्ञात करेंगे । इस गुणन-संक्रिया में गुणनफल मिलने के लिए दशमलव बिन्दु को तीन स्थान दाईं और विस्थापित करना आवश्यक हैं । पर दशमलव बिंदु के बाद एक ही स्थान है । इसलिए दशमलव संख्या 3.2 के बाद और दो शून्य लिखना होगा ।

$3.2\times1000 = 3.20000\times1000$
$= 3200.0$

(1) गुणा कीजिए :

(क) 3.4×10 =

(ख) 0.56×100 =

(ग) 1.04×1000 =

(घ) 0.3×100 =

(2) खाली जगहें कीजिए :

(क) दशमलव संख्या को 100 से गुणा करते समय, दशमलव बिंदु ……… स्थान दाईं ओर विस्थापित होगा ।

(ख) दशमलव संख्या को 1000 से गुण करते समय दशमलव बिन्दु ……… स्थान दाईं ओर विस्थापित होगा ।

अभ्यास - 2.4

1. निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए :

(क) 0.2×6 (ख) 8×4.3 (ग) 2.71×5

(घ) 20.1×4 (ङ) 211.02×4 (च) 3.4×5.0

2. निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए :

(क) 1.3×10 (ख) 36.8×10 (ग) 31.5×100

(घ) 1.56×100 (ङ) 0.5×1000 (च) 13.27×1000

3. निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए :

(क) 2.5×0.3 (ख) 0.1×21.8 (ग) 1.3×3.1

(घ) 0.5×0.005 (ङ) 11.2×0.13 (च) 1.07×0.02

4. एक आयत की लंबाई 5.7 से.मी. और चौड़ाई ३ से.मी. हैं। इसकार परिमाप और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. एक स्कुटर 1 मीटर पेट्रोल से 55 कि.मी. जाता है। 8.4 लीटर पेट्रोल से स्कुटर कितनी दूरी तय करेगा ?

6. एक पानी-टंकी से 115.75 लीटर पानी आता है। उसी प्रकार की 12 पानी-टंकियों से कितना किलो लीटर पानी आएगा ?

2.5. दशमलव संख्याओं की भाग संक्रिया

लिजा, जिनु और जिनिजा तीन बहनें हैं। लिजा के पास 7.5 मी. का रिबन है । उसने उसे तीन बराबर भाग करके तीनों में बाँट देना चाहा । उसे कैसे पता चलेगा कि प्रत्येक टुकड़े रिबन की लंबाई कितनी होगी ?

उसने सोचा, यदि रिबन की लम्बाई 12 मी. हैं और उसे 3 बराबर भागों में बाँटाना पड़ना तो वह 12 को 3 से भाग दे देती। अब उसे 7.5 को 3 से भाग देना होगा । उसने सोचा एक दशमलव संख्या को एक धनात्मक पूर्णांक से भाग देने की संक्रिया जानना जरूरी है।

निहार ने अपनी कक्षा के कुछ रंगीन कागज से सजाना चाहा। उसके पास 19.5 मी. लंबी एक कागज पट्टी है । वह उससे 1.5 मीटर लंबी वाली कितने रंगीन कागज के टुकड़े प्राप्त कर सकेगी ?

निहार ने सोचा :

यदि कुल पट्टी की लंबाई 24 मीटर होती और उसे उससे 3 मीटर लंबी पट्टियाँ काटनी पड़तीं, तो वह 24 को 3 से भाग देता । यहा पूरी पट्टी की लंबाई 19.5 मीटर है । काटी जाने वाली पट्टियों की लंबाई 1.5 मीटर है । यहाँ भी उसे 19.5 को 1.5 के भाग देना पड़ेगा ।

इसलिए उसे दशमलव संख्या में भाग-संक्रिया जानना जरूरी है ।

जिन स्थितियों में भाग दिया जाता है, वे हैं-

(क) कुछ वस्तुओं के संग्रह को कुछ बराबर भागों में भाग देने के समय भाग की संक्रिया की जाती है । जैसे 40 आमों को 5 बराबर भाग करना हों तो 40 को 5 से भाग दिया जाता है।

(ख) कुछ वस्तुओं के संग्रह को हर बार समान संख्या को वस्तुओं निकाल देने से सर्वाधिक कितनी बार निकाल ली जाएँगी, यह जानने के लिए भाग की संक्रिया की जाती हैं।

जैसे 30 कॉपियों में हर लड़के को 5 कॉपियाँ दी जाएँगी तो सर्वाधिक कितने लड़कों को कॉपियाँ मिलेंगी, यह जानने के लिए 30 को 5 से भाग देना पड़ेगा।

वैसे 7.5 मी. लंबे रिबन को 3 बराबर भाग करने के लिए 7.5 को उसे भाग देना होगा । और भी 19.5 मी. एक पट्टी से 1.5 मी. लंबी कितनी पट्टियाँ काट ली जा सकती हैं ? इसे जानने के लिए 19.5 को 1.5 से भाग देना होगा ।

2.5.1. दशमलव संख्या को 10,100 और 1000 से भाग देना :

अब $231.5 \div 10$ का भागफल ज्ञात करेंगे ।

$$\frac{231.5}{10} = \frac{2315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{2315}{100} = 23.15$$

या $\frac{231.5}{10} = \frac{231.5 \times 10}{10 \times 10} = \frac{2315}{100} = 23.15$ (यहाँ अंश और हर दोनों के 10 से गुना किया गया)

उसी प्रकार $231.5 \div 100$

$$= \frac{231.5}{100} = \frac{231.5 \times 10}{100 \times 10} = \frac{2315}{1000} = 2.315$$

और $231.5 \div 1000$

$$= \frac{231.5}{1000} = \frac{231.5 \times 10}{1000 \times 10} = \frac{2315}{10000} = 0.2315$$

- एक दशमलव संख्या को 10 से भाग देने से जो भागफल मिलता है उससे भिन्न संख्या का दशमलव बिंदु अपने पहले के स्थान से कितने स्थान बाईं ओर को विस्थापित होता है ?
- एक दशमलव संख्या को 100 और 1000 से भाग देने से दशमलव बिन्दु क्रमश: बाईं ओर को कितने स्थान विस्थापित होता है ? ध्यान दें : भागफल प्राप्त करने का यह एक सरल प्रणाली है ।

मान ज्ञात कीजिए :

(क) $125 \div 10$ भागफल कितना है ?

(क) $235.41 \div 100$ भागफल कितना है ?

(क) $123.5 \div 1000$ भागफल कितना है ?

2.5.2 दशमलव संख्या को पूर्णांक से भाग देना :

अब आओ, 6.4. को 2 से भाग देंगे ।

हम जानते हैं, $10 = 2 \times 5$

वैसे $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$

अर्थात् 10, 100, 1000 आदि संख्याआलें का उभयनिष्ठ संक्रिया में इसका व्यवहार करेंगे ।

$$6.4 \div 2 = \frac{6.4}{2} = \frac{6.4 \times 5}{2 \times 5} = \frac{32.0}{10} = 3.20$$

बताइए :
यहाँ $\frac{6.4}{2}$ के हर में 5 गुणा क्यों किया गया है ?

वैसे,

$$3.6 \div 5 = \frac{3.6}{5} = \frac{3.6 \times 2}{5 \times 2} = \frac{7.2}{10} = 0.72$$

$$7.8 \div 4 = \frac{7.8}{4} = \frac{7.8}{2 \times 2} = \frac{7.8 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 5 \times 5} = \frac{7.8 \times 25}{100} = \frac{195.0}{100} = 1.95$$

(हर के गुणनखंड दो 2 होने से दो 5 से गुणा करना पड़ा)

ध्यान दें, भाजक संख्या के अभाज्य गुणनखंड सिर्फ 2 और 5 होने पर यह प्रणाली अपनाई जाती है ।

भाजक संख्या के अभाज्य गुणनखंडों में 2 या 5 से भिन्न दूसरी संख्या होने पर क्या किया जाएगा ? आइए, वैसे एक भाग-संक्रिया पर ध्यान देंगे ।

$$23.8 \div 7 = \frac{238}{10} \div 7 \quad \text{(पहला सोपान)}$$

$$= \frac{238}{10} \times \frac{1}{7} = \frac{238 \times 1}{10 \times 7} \quad \text{(दूसरा सोपान)}$$

$$= \frac{238 \times 1}{7 \times 10} = \frac{238}{7} \times \frac{1}{10} \quad \text{(तीसरा सोपान)}$$

$$= 34 \times \frac{1}{10} = \frac{34}{10} \quad \text{(चौथा सोपान)}$$

$$= 3.4 \quad \text{(पाँचवँ सोपान)}$$

भाग की संक्रिया : पहला सोपान : भाज्य की दशमलव संख्या को भिन्न संख्या में बदला दिया गया ।

दूसरा सोपान : भाज्य के भाजक के प्रतिलोम के साथ गुणा किया गया ।

तीसरा सोपान : भिन्न संख्या की गुणन प्रणाली का प्रयोग किया गया ।

चौथा सोपान : हर में गुणा के क्रम विनिमय गुण का प्रयोग किया गया ।

पाँचवाँ सोपान : पूर्णांक में रही भाग - संक्रिया का भागफल ज्ञात किया गया । उसे $\frac{1}{10}$ से गुणा करके दशमलव संख्या में बदल दिया गया ।

मान ज्ञात कीजिए :

(क) $2.4 \div 2$ (ख) $3.6 \div 4$ (ग) $3.3 \div 5$

(घ) $42.6 \div 25$ (ङ) $73.8 \div 3$ (च) $36.1 \div 14$

2.5.3 दशमलव संख्या को दशमलव संख्या से भाग देना :

आइए, 24.45 को 0.5 से भाग देंगे ।

एक दशमलव संख्या को पूर्णांक द्वारा भाग देने की संक्रिया से हम परिचित हो गए हैं । यहाँ भाजक पूर्णांक हो तो हम पहले की संक्रिया का प्रयोग कर सकेंगे ।

(क) $24.5 \div 0.5$

$$= \frac{24.45}{0.5} = \frac{24.45 \times 10}{0.5 \times 10} \quad \text{[हर को पूर्णांक संख्या में परिणत किया गया]}$$

$$= \frac{244.5}{5} = \frac{244.5 \times 5 \times 2}{5 \times 2} \quad \text{[हर को 10 में परिणत किया गया]}$$

$$= \frac{489.0}{10} = 48.9$$

(ख) $24.01 \div 0.7$ $= \frac{2401}{100} \div \frac{7}{10}$

$= \frac{2401}{100} \times \frac{10}{7} = \frac{2401}{10} \times \frac{1}{7}$ (अंश और हर दोनों को 10 से काट दिया गया)

$= \frac{2401}{7} \times \frac{1}{10} = 343 \times \frac{1}{10}$

$= 34.3$

मान ज्ञात कीजिए

(क) $32.72 \div 0.4$ (ख) $48.06 \div 0.9$ (ग) $90.48 \div 1.2$

उदाहरण 15 :

एक सड़क की लंबाई 150 मी. है । रास्ते के किनारे पर 12.5 मी. के अंतर में बिजली के खंभे गाड़े जाएँगे । सड़क के एक छोर पर पहला खंभा गाड़ा जाएगा । तो कुल कितने खंभे गाड़े जाएँगे ?

हल :

दो खंभों के बीच अंतर = 12.5 मी.

कुल दूरी = 150 मी.

बीच में अंतरों की संख्या $= \frac{150}{12.5} = \frac{150 \times 10}{12.5 \times 10}$

$= \frac{1500}{125}$

$= \frac{60}{5}$ दोनों को 25 से काटने के बाद (अंश और हर)

$= 12$

खंभों की संख्या $= 12 + 1 = 13$

उदाहरण - 16

एक समबहुभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 2.5 से.मी. । इसका परिमाप 12.5 से.मी. है । इस समबहुभुज की कितनी भुजाएँ हैं ?

हल :

परिमाप = प्रत्येक भुजा की लंबाई × भुजाओं की संख्या

∴ भुजाओं की संख्या $= \frac{\text{परिमाप}}{\text{प्रत्येक भुजा की लंबाई}}$

$= \frac{12.5}{2.5} = \frac{12.5 \times 10}{2.5 \times 10}$

$= \frac{125}{25} = 5$

क्या आप जानते हैं?

जिस बहुभुज की भुजाओं की लंबाई बराबर हों उसे समबहुभुज कहते हैं।

अब बताइए : यहाँ अंश और हर के साथ 10 का क्यों गुणा किया गया है ? अंश और हर दोनों को 100 से गुणा करने से क्या उत्तर मिलेगा ?

भाज्य दशमलव संख्या हो, भाजक पूर्णांक हो, उस स्थिति में भाग देने की विकल्प संक्रिया :

पहला उदाहरण :

मान लीजिए कि हम 17.4 को 6 से भाग देंगे । हम पिछली कक्षा में जिस प्रकार भाग देने की संक्रिया पूरी करते थे, यहाँ भी उसी प्रकार भाग देंगे ।

```
    2.9
6 | 17.4
  | 12
  -----
    5.4   ------>
    5.4
  -----
     0
```

ध्यान दें

यहाँ भाज्य है 5 इकाई और 4 दशांश यानी 54 दशांश भाज्य को दशांश किया गया है । इसलिए भागफल भी दशांश होगा । अत: योगफल में दशमलव बिंदु स्थापित किया गया ।)

∴ भागफल = 2.9 है।

दूसरा उदाहरण

आइए 17.4 को इसी संक्रिया से 5 से भाग देंगे ।

```
    3.48
5 | 17.4
  | 15
  -----
    2.4   ------>
    2.0
  -----
    0.40  ------>
     .40
  -----
      0
```

यहाँ भाज्य 2.4 को दशांश में बदल दिया गया । यह हुआ 24 दशांश । भागफल में दशमलव बिंदु दिया गया । 24 दशांश को 5 से भाग दिया गया ।

यहाँ दशांश को शतांश में बदल दिया गया । अब मिला 40 शतांश । फिर इसे 5 से भाग दिया गया ।

∴ भागलफल 3.48 है।

तीसरा उदाहरण :

आइए 17.4 को 7 से भाग देंगे ।

```
    2.48
7 | 17.4
  | 14
  -----
    3.4
    2.8
  -----
    0.60  ------>
     .56
  -----
    0.04
```

शतांश में बदलने से हुआ 60 शतांश। इसे 7 से भाग दिया गया।

∴ यहाँ भागफल 2.48 है । शेषफल 0.04 है ।

तीसरा उदाहरण की भाग-संक्रिया पर ध्यान देने से निम्न बातें हमारे सामने आईं ।

- यहा भाग की संक्रिया समाप्त नहीं होती ।
- हम उत्तर दे सकते थे - भागफल 2 और शेषफल 3.4 बताकर ।

  या भागफल 2.4 और शेषफल 0.6 बताकर

  या भागफल 2.48 और शेषफल 0.04 बताकर ।

  हम चाहेंगे तो भाग की संक्रिया को ओग बढ़ाकर सहस्रांश स्थान तक ले सकते हैं और भागफल प्राप्त कर सकते हैं।

2.5.4 लंबाई और वजन (वस्तुत्व) की माप की इकाई का परिवर्त्तन

लिजा का दोस्त रजत है । जब लिजा 7.5 मी. लंबी एक रिबन को अपने और अपनी दो बहनों में बराबर भाग से बाँटने का काम कर रही थी, वहाँ रजत था । उसने लिजा का काम देखा । उसके बाद उसने लिजा से कहा, 'तूम जो हिसाब किया है, मैं भी वही करूँगा । ध्यान से देखें।'

रजत ने कहा, "रिबन की लंबाई 7.5 मी. = 750 से.मीटर

अब रिबन को 3 बराबर हिस्सों में बाँटने से प्रत्येक हिस्से में कितना आएगा ?"

लिजा ने कहा, "प्रत्येक हिस्से के टुकड़े की लंबाई 250 से.मी. होगी ।"

रजत ने कहा, "100 से.मी. में 1 मीटर होता है । अब प्रत्येक हिस्से की लंबाईं को मीटर में बदलिए।"

लिजा ने हिसाब किया - 100 से.मी. = 1 मीटर

250 से.मी. $= 250 \div 100$

$= 2.50$ मी.

बताइए:
250 से.मी. को कि.मी. इकाई में परिवर्त्तन करने से क्या होगा ?

लिजा ने सोचा, 'अनेक स्थितियों में माप के परिमाणृ की इकाई में परिवर्त्तन करने की आवश्यकता पड़ती हैं ।

उदाहरण - 17

(क) 2.4 मीटर को से.मी. में बदलिए।

(ख) 457 से.मी. को मीटर में बदलिए।

(ग) 3.2 कि.ग्रा. को ग्राम में बदलिए।

(घ) 2524 ग्राम को कि.ग्रा. में बदलिए।

हल :

(क) यहाँ मीटर इकाई को से.मी. इकाई में परिवर्त्तन किया जाएगा ।

1 मी. = 100 से.मी.

$\therefore$ 2.4 मी. $= 2.4 \times 100$ से.मी. = 240 से.मी.

क्या आप जानते हैं?
किसी दशमलव संख्या को 100 से गुणा करते समय दशमलव बिंदु को दो स्थान दाईं ओर विस्थापित किया जाता है।

(ख) यहाँ से.मी. इकाई को मीटर इकाई में परिवर्त्तन किया जाता है ।

100 से.मी. = 1 मीटर

475 से.मी. = (457 ÷ 100) मी. = 4.57 मी.

(ग) यहाँ कि.ग्रा. इकाई को ग्राम इकाई में परिवर्त्तन किया जाएगा ।

1 कि.ग्रा. = 1000 ग्राम

∴ 3.2 कि.ग्रा. = 3.2 × 1000 ग्राम = 3200 ग्राम

(घ) यहाँ ग्राम इकाई को कि.ग्रा. इकाई में परिवर्त्तन किया जाएगा ।

1000 ग्राम = 1 कि.ग्रा.

∴ 2524 ग्राम = (2524 ÷ 1000) ग्राम = 2.524 कि.ग्रा.

बताइए:
3.2 कि.ग्रा. को मिलीग्राम में परिवर्त्तन करने से कितना होगा ?

मान ज्ञात कीजिए :

(क) 2.6 मीटर को से.मी. में परिवर्त्तन कीजिए।

(ख) 3.24 मी. को डेसीमीटर में परिवर्त्तन कीजिए ।

(ग) 3.48 से.मी. को मीटर और से.मी. इकाई का व्यवहार करके लिखने के लिए खाली जगहे भरिए।
.... मी .... से.मी ।

(घ) 0.728 ग्राम को कि.ग्रा. में परिवर्त्तित कीजिए।

(ङ) 3.2 कि.ग्रा. को ग्राम इकाई में परिवर्त्तित कीजिए।

(च) 4357 ग्राम को नीचे के निर्देशानुसार लिखिए।
4357 ग्राम = ... कि.ग्रा. .... ग्राम ।

अभ्यास - 2.5

1. निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए :

(क)	6.4 ÷ 2	(ख)	12.4 ÷ 4	(ग)	2.48 ÷ 4	(घ)	65.4 ÷ 6
(ङ)	14.49 ÷ 7	(च)	0.80 ÷ 5	(छ)	3.76 ÷ 8	(ज)	10.8 ÷ 3

2. निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए :

(क)	4.8 ÷ 10	(ख)	6.78 ÷ 10	(ग)	23.6 ÷ 10	(घ)	0.56 ÷ 10
(ङ)	126.3 ÷ 10	(च)	036 ÷ 10	(छ)	0.02 ÷ 10	(ज)	4.8 ÷ 10

3. निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए :

(क)	132.4 ÷ 100	(ख)	257.4 ÷ 100	(ग)	348.0 ÷ 100	(घ)	25.7 ÷ 100
(ङ)	32.4 ÷ 100	(च)	4.79 ÷ 100	(छ)	0.321 ÷ 100	(ज)	0.012 ÷ 100

4. निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए।

(क) $345.8 \div 1000$ (ख) $35.48 \div 1000$ (ग) $345 \div 1000$ (घ) $7.68 \div 1000$

5. निम्नलिखित संबंधों को सत्यापित कीजिए :

(क) $35.6 \div 1000 = 3.56 \div 10$

(ख) $283.5 \div 1000 = 2.835 \div 10$

(ग) $47.2 \div 1000 = 472.0 \div 10$

(घ) $0.839 \div 10 = 8.39 \div 10$

6. निम्नलिखित प्रश्नों का मान ज्ञात कीजिए :

(क) $7.0 \div 3.5$ (ख) $36 \div 0.2$ (ग) $3.25 \div 0.5$ (घ) $37.8 \div 1.4$

7. एक स्कुटर ने 3 लीटर पेट्रोल से 100.2 कि.मी. तय किया । वह प्रति लीटर पेट्रोल में कितने कि.मी. तय करेगा ?

8. एक दुधवाले के पास 31.2 लीटर दूध था । उसने चार चाय के दुकानों में सारा दुध बराबर बाँट दिया । प्रत्येक दुकानदार को कितना दूध मिला ?

9. 23.5 मीटर लंबे रिबन को 5 लड़कियों में बराबर बाँट दिया गया । प्रत्येक लड़की को कितने लंबे रिबन का टुकड़ा मिला ?

10. एख दुकानदार के पास 37.5 कि.ग्रा. चीनी थी । उसने 2.5 कि.ग्रा. के हिसाब से एक-एक पैकेट बनाया । वह कुल चीनी के कितने पैकेट में भरेगा ?

11. निर्देश के अनुसार इकाइयों को परिवर्त्तन कीजिए :

(क) 7.2 मी. को से.मी. इकाई में लिखिए ।

(ख) 4.2 मी. को से.मी. इकाई में लिखिए ।

(ग) 7.48 मी. को डेसी.मी. इकाई में लिखिए।

(घ) 238 से.मी. को मीटर इकाई में लिखिए।

(ङ) 357 से.मी. को मीटर इकाई में लिखिए।

(च) 2.3 से.मी. को मिली मीटर इकाई में लिखिए।

क्या आप जानते हैं ?

1000 मी	=	1 किलो.मी.
100 मी.	=	1 हेक्टो.मी.
10 मी	=	1 डेका.मी.
1 मी.	=	10 डेसी.मी.
	=	100 से.मी.
	=	1000 मिली.मी.

12. निर्देश के अनुसार इकाई का परिवर्त्तन कीजिए :

(क) 3.2 कि.ग्रा. को ग्राम की इकाई में लिखिए।

(ख) 52.47 कि.ग्रा. को ग्राम की इकाई में लिखिए ।

(ग) 2537 ग्राम को कि.ग्रा. की इकाई में लिखिए।

(घ) 483.2 ग्राम को कि.ग्रा. की इकाई में लिखिए।

(ङ) 5.2 ग्राम को मिली ग्राम की इकाई में लिखिए।

तृतीय अध्याय

मौलिक ज्यामितिक चित्र

3.1 हमें जो ज्ञात है :

हमने जिन ज्यामितिक आकृतियों के बारे में पिछली कक्षा में पढ़ा था, वे हैं -

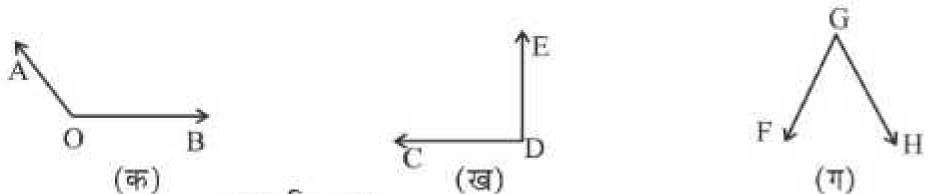
- सरलरेखा, रेखाखण्ड, रश्मि
- कोण और कोण की माप, माप के आधार पर कोणो के प्रकार - न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण ।
- विभिन्न प्रकार के अैरखिक बेद आकृतियाँ, जैसे त्रिभुज, चतुर्भुज । अरैखिक आकृतियों के शीर्ष, कोण, भुजा, अंत देय, बर्हिदेश, विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज, जैसे ट्रपिजियम, समांतर, चतुर्भुज, आयत, वर्ग, रम्बस । वक्ररैखिक आकृतियों, जैसे वृत्त, त्रिज्या, व्यास, ज्या, वृत्तकला, वृत्तखंड, अर्द्धवृत्त , वृत का अंत: भाग, बर्हिभाग।

आइए हम जो जानते है, उन्हें याद करें:

1. नीचे दी गई आकृतियों में से रेखा, रश्मि और रेखाखंड को पहचानिए।

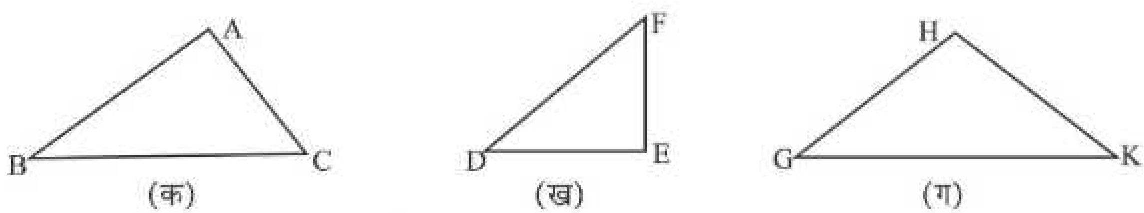
आकृति - 3.1

2. नीचे दी गई आकृतियों में से न्यून कोण, समकोण और अधिक कोण को पहचानिए ।



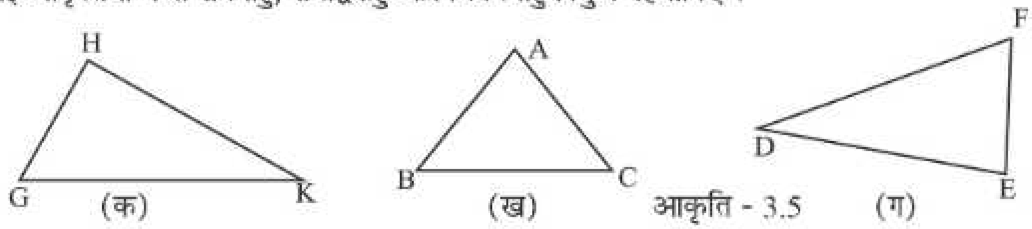
आकृति - 3.2

3. नीचे दी गई आकृतियों में से समकोण त्रिभुज, अधिक कोण त्रिभुज और न्यूनकोण त्रिभुज पहचानिए।



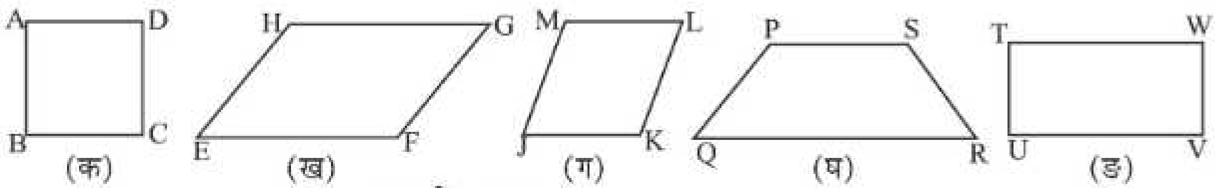
आकृति - 3.3

4. नीचे दी गई आकृतियों में से समबाहु, समद्विबाहु और विषमबाहु त्रिभुज पहचानिए ।



आकृति - 3.5

5. (क) नीचे दी गई आकृतियों में से ट्रापिजियम सामतंरिक क्षेत्र, आयत, वर्ग और रम्बस को पहचानिए।



आकृति - 3.5

(ख) ऊपर दी गई आकृतियों में से किन किन आकृतियों के सभी कोण समकोण हैं ?

(ग) आकृति में कौन-कौन से कोण समान माप के हैं ? किन-किन की भुजाएँ बराबर हैं ?

(घ) आकृति में किन-किन भुजाओं की लम्बाई बराबर है ?

3.2 विभिन्न प्रकार के कोण-युग्म

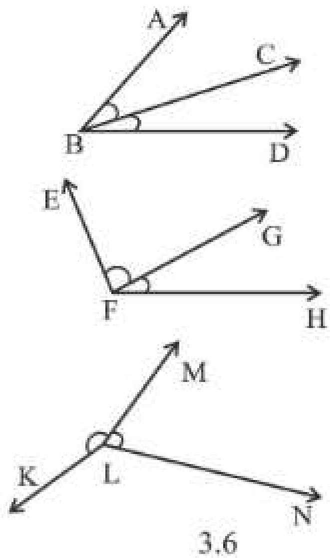
3.2.1. आसंलग्न कोण

बगल में दी गई आकृति (क), (ख) और (ग) में तीन कोण-युग्म हैं।

(क) आकृति में ∠ABC और ∠CBD

(ख) आकृति में ∠EFG और ∠GFH

(ग) आकृति में ∠KLM और ∠MLN



3.6

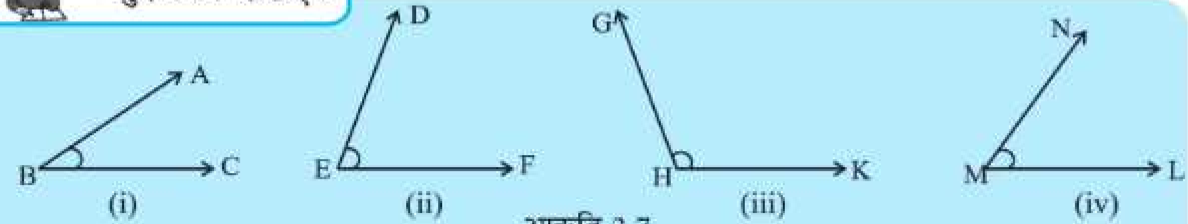
(क) आकृति पर ध्यान दीजिए

- ∠ABC और ∠CBD दोनों का शीर्षबिन्दु B है । अतएव हम कहते हैं B बिन्दु ∠ABC और ∠CBD का उभयनिष्ठ शीर्षबिन्दु है ।
- $\overrightarrow{BC}$, ∠ABC और ∠CBD प्रत्येक की भुजा है । अतएव हम $\overrightarrow{BC}$ को ∠ABC और ∠CBD की उभयनिष्ठ भुजा कहते हैं ।
- A और D बिंदु $\overrightarrow{BC}$ या $\overleftarrow{BC}$ के विपरीत दिशा में हैं । अर्थात् दोनों कोणों क अंत: देश में कोई उभयनिष्ठ बिंदु नही है । इन तीनों कारणों में ∠ABC और ∠CBD को परस्पर आसन्न कोण कहा जाता है ।

✍ आकृति 3.6 (ख) और (ग) में जो परस्पर आसन्न कोण हैं, उनके नाम लिखिए।

3.2.2. पूरक (लंबपूरक) और संपूरक (ऋजुपुरक) कोण :

खुद करके देखिए :



आकृति 3.7

ऊपर के कोणों की माप चाँद की सहायता से ज्ञात कीजिए और उन्हें नीचे की सारणी में भरिए।

कोणों के माप	∠ABC	∠DEF	∠GHK	∠LMN
कोणों के मान				

- किन दो कोणों के मान का योग 90^0 है ?
- किन दो कोणों की माप का योग 180^0 है ?
- जिन दोनों कोणों की माप का योग 90^0 है, उन दोनों कोणों के नाम लिखिए।

आपने जो सारणी बताई है, उस पर ध्यान दीजिए।

डिग्री इकाई में ∠ABC के मान को संकेत में m∠ABC लिखा जाते हैं।

- जिन दो कोणों की मान का योग 180^0 है, उन दोनों कोणों को परस्पर संपुरक (ऋजुपुरक) कोण कहा जाता है ।
- यहाँ परस्पर संपूरक कोणों के नाम लिखिए।
- यहाँ ∠ABC और ∠LMN एक दूसरे के पूरक हैं।
  अर्थात् ∠ABC का पूरक ∠LMN है और ∠LMN का पूरक ∠ABC है ।
- आपने लिखा कि∠DEF और ∠GHK की माप का योग
  अतएव ∠DEF और ∠GHK परस्पर संपूरक है ।
  अर्थात् ∠DEF का संपूरक ∠GHK है और ∠GHK का संपूरक ∠DEF है ।

बताइए :
दो परस्पर संपूरक कोणों में से एक अधिक कोण हो तो दूसरा किस प्रकार का कोण होगा ?

3.2.3. आसन्न पूरक और आसन्न संपूरक कोण :

नीचे की आकृतियाँ देखिए।

3.8

आकृति (क) में ∠ABC और ∠CBD दोनों परस्पर क्या आसन्न कोण होंगे ? क्यों ?
आकृति (क) में ∠EFG और∠GFH दोनों परस्पर क्या आसन्न कोण होंगे ? क्यों ?

सारणी में लिखिए :

कोणों के नाम	∠ABC	∠CBD	∠EFG	∠GFH
कोणों के मान				

- ∠ABC और ∠CBD के मान का योग ज्ञात कीजिए।
- ∠EFG और ∠GFH की मान का योग ज्ञात कीजिए।

क्या देखा ?

(क) किन दो आसन्न कोणों की माप का योग 90^0 हुआ ।

(ख) किन दो आसन्न कोणों के माप का योग 180^0 हुआ ।

(ग) कौन-कौन से दो कोण परस्पर पूरक हैं ?

(घ) कौन-कौन से दो कोण परस्पर संपूरक हैं ?

बताइए:
∠ABC और ∠ABD आसन्न होगा ? इसका कारण क्या है ?

क्या आप जानते हैं:
परस्पर आसन्न परिपूरक कोण युग्म को भी एक रेखीय युग्म कोण कहा जाता है ।

∠ABC और ∠CBD परस्पर आसन्न पूरक हैं, क्योंकि वे दोनों आसन्न हैं और परस्पर पूरक हैं।

∠EFG और ∠GFH परस्पर आसन्न संपूरक हैं, क्योंकि वे दोनों आसन्न हैं और परस्पर संपूरक हैं।

खुद करके देखिए :

- एक स्केल लीजिए।
- स्केल के एक किनारे को आकृति 3.8 (ख) के E और F बिन्दु के साथ सटाकर रखिए।
- आप क्या देख रहे हैं?
- आपने देखा होगा कि H बिन्दु भी स्केल के किनारे के साथ सटकर रहता है ।

हमने रेखा $\overleftrightarrow{FE}$ और $\overleftrightarrow{FH}$ दोनों एक रेखा पर हैं। इसलिए आसन्न कोण ∠EFG , ∠GFH के बर्हिभाग भुजाएँ $\overleftrightarrow{FE}$ और $\overleftrightarrow{FH}$ भी एक रेखा पर रहती हैं ।

इस कारण से आसन्न कोण दोनों को सरल-युग्म कहा जाता है ।

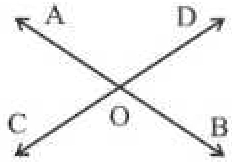
3.2.4. परस्पर शीर्षाभिमुखी कोण

आकृति 3.9 (क) की कैंची में कितने कोण देख सकते हैं?

आकृति (ख) में $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दोनों रेखाएँ परस्पर को 'O' बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं। इस चित्र में कितने कोण दिखाई पड़ते हैं?

आकृति 3.9 (ख) में चार कोण दिखाई पड़ते हैं। वे चार कोण हैं :

∠AOC, ∠COB, ∠BOD, ∠DOA



3.9

ध्यान दें :

- ∠AOC और ∠COB दोनों का उभयनिष्ठ शीर्षबिन्दु 'O' है ।
- ∠AOC और ∠COB दोनों की उभयनिष्ठ भुजा $\overrightarrow{OC}$ है ।

- A और B बिन्दु $\overleftrightarrow{CO}$ की विपरीत दिशाओं में हैं $\overrightarrow{OC}$ ।

अब हम सुनिश्चित कर सकते है कि :

∠AOC और ∠AOD परस्पर आसन्न कोण है ।

उसी प्रकार ∠AOC के साथ क्या कोई दुसरा आसन्न कोण है ?

तुम जरुर बताओगे कि ∠AOC के ∠AOD साथ आसन्न है ।

∠AOC के साथ ∠COB आसन्न है ।

∠AOC के साथ ∠COA आसन्न है ।

उसी आकृति में कौन-सा कोण शेष बचा ?

शेष कोण है ∠BOD

इन ∠BOD और ∠AOC को परस्पर शीर्षभिमुखी कोण कहा जाता है ।

∠AOC का शीर्षभिमुखी कोण ∠BOD और ∠BOD का शीर्षभिमुखी कोण है ∠AOC ।

अतएव, हम कह सकते हैं :

दो रेखाएँ परस्पर को प्रतिच्छेद करने से जो चार कोण बनते हैं, उनमें एक कोण के साथ आसन्न न होने वाला कोण उसका शीर्षभिमुखी कोण कहलाता है।

बताइए

∠AOC और ∠COB दोनों किस प्रकार के कोण हैं ?

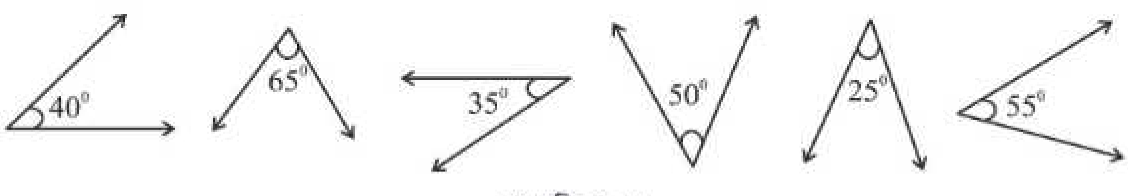
क्या आप जानते हैं ?

परस्पर शीर्ष कोणों को परस्पर विपरीत कोण भी कहते हैं।

✎ आप आकृति 3.9 (ख) से कितने युग्म परस्पर शीर्षाभिमुखी कोण देख रहे हैं ?

अभ्यास - 3.1

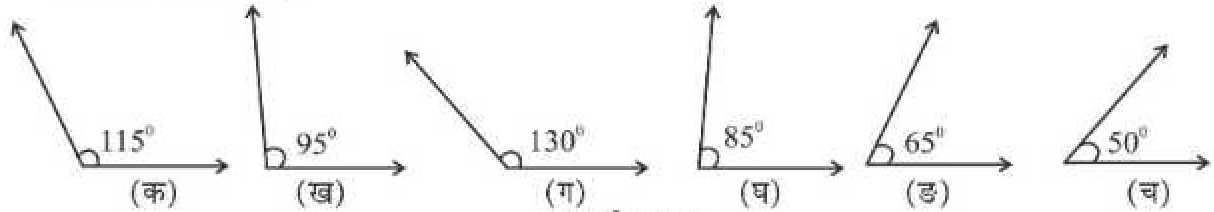
1.



आवृति 3.10

ऊपर 6 कोणो की आकृतियाँ और उनकी माप दर्शाई गई हैं । उनमें से जो परस्पर पूरक कोण-युग्म हो, उनको पहचानिए और उनके नाम लिखिए।

2.



आवृति 3.11

ऊपर 6 कोणों की आकृतियाँ और उनकी माप दर्शाई गई हैं। उनमे से जो परस्पर संपूरक कोण-युग्म हो, उनको पहचानिए और उनके नाम लिखिए।

3. नीचे दिए गए डिग्री माप के कोणों के पूरक कोण को माप ज्ञात कीजिए।

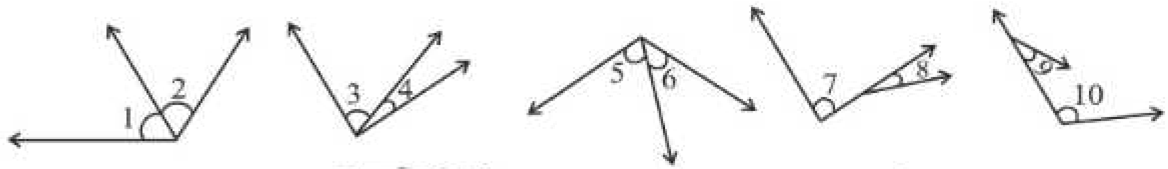
(क) 40° (ख) 70° (ग) 85°

4. नीचे दिए गए डिग्री माप के कोणों के संपूरक कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

(क) 30° (ख) 90° (ग) 110°

> **क्या आप जानते हैं ?**
> क्या एक अधिक कोण का पूरक कोण रहता है। आपने उत्तर का कारण लिखिए।

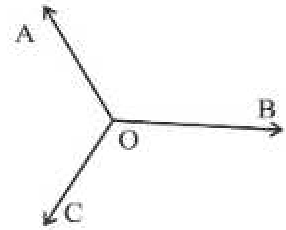
5. नीचे की आकृतियों में परस्पर आसन्न कोण-युग्म के नाम लिखिए । किस आकृति के दो कोण परस्पर आसन्न नहीं हैं ?



आकृति 3.12

6. बगल में दी गई आकृति में परस्पर आसन्न कोण-युग्मों के नाम लिखिए।

सूचना : यहाँ तीन युग्म आसन्न कोण दिए गए हैं, उन्हें जानने की कोशिश कीजिए।

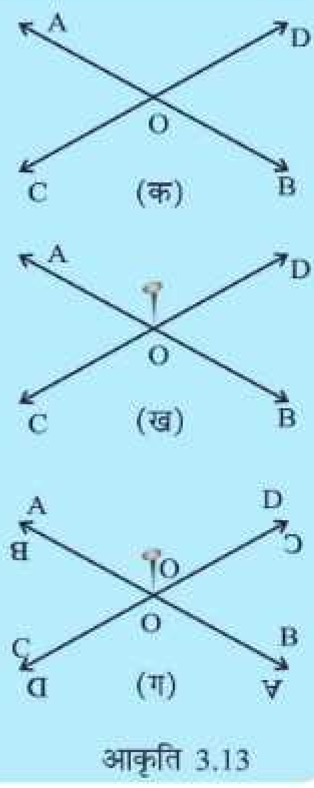


3.3. परस्पर शीर्षभिमुखी कोणों में संबंध

परस्पर शीर्षशिमुखी कोणों के संबधों को जानने के लिए नीचे दी गई गतिविधि करेंगे ।

खुद करके देखिए:

- स्केल का व्यवहार करके बगल में दी गई आकृति 3.13 (क) की तरह अपनी कॉपी में आकृति बनाइए जिनमें दो रेखाएँ परस्पर को प्रतिच्छेद करती हैं । रेखाओं के नाम दो $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ प्रति छेद बिंदु का नाम दो O।
- एक पारदर्शी कागज उस आकृति पर रखो । उस पारदर्शी कारगज पर उन $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ रेखाओं का अंयकन करो । प्रतिच्छेद बिंदु का नाम दीजिए O।
- अब हमें पारदर्शी कागज पर कॉपी में बनी आकृति का एक प्रतिरूप मिल गया।
- 'O' बिंदु पर एक कील लगा दीजिए। आकृति में जैसे दर्शाया गया है ।
- अब अपनी कॉपी को स्थिर रखकर पारदर्शी कागज को धीरे-धीरे घुमाओ, जैसे कि कील स्थिर रहे।
- जब पारदर्शी कागज पर लिखा 'A' अक्षर कॉपी में लिखे 'B' अक्षर पर आ जाए तब पारदर्शी कागज स्थिर रहेगा । अब आप देखेंगे कि पारदर्शी कागज की दोनों रेखाएँ कॉपी की दोनो रेखाओं से मिल गई हैं। अब क्या देखते हैं ?



आकृति 3.13

(क) पारदर्शी कागज पर लिखे गए अक्षर उल्टे दीख रहे है ।

A दीखता है ∀ की तरह

B दीखता है ꓭ की तरह

C दीखता है Ɔ की तरह

D दीखता है ᗡ की तरह

(ख) कॉपी के किस अक्षर के पास पारदर्शी कागज का कौन सा अक्षर है ?

कॉपी के A के पास पारदर्शी कागज का उल्टा B है।

कॉपी के B के पास पारदर्शी कागज का उल्टा A है।

कॉपी के C के पास पारदर्शी कागज का उल्टा D है।

कॉपी के D के पास पारदर्शी कागज का उल्टा C है।

(ग) कॉपी की $\overleftrightarrow{AB}$ रेखा के साथ पारदर्शी काजग की $\overleftrightarrow{DC}$ रेखा मिल गई है।

कॉपी की $\overleftrightarrow{CD}$ रेखा के साथ पारदर्शी कागज $\overleftrightarrow{AB}$ की रेखा मिल गई है।

अब आकृति को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. कॉपी के ∠AOC के साथ पारदर्शी कागज का कौन सा कोण मिल जाता है ?
2. कॉपी के ∠BOD के साथ पारदर्शी कागज का कौन सा कोण मिल जाता है ?
3. दो कोण परस्पर मिल जाने से उन दोनों कोणों के बीच किस संबंध का पता चला ?
4. ऊपर की गतिविधि से ∠AOD और ∠BOC की माप के बीच किस संबंध का पता चला ?

अब तुम चाँद (प्रोट्राक्टर) की सहायता से ∠AOB, ∠BOC, ∠COD और ∠DOA की माप लेकर निम्न सारणी में लिखिए।

कोण	∠AOC	∠BOD	∠BOC	∠DOA
कोण की माप				

सारणी देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

1. ∠AOC की माप के साथ किस कोण की माप समान है ?
2. ∠BOC की माप के साथ किस कोण की माप समान है ?
3. ∠AOC और ∠BOD को किस प्रकार के कोण कहते हैं?
4. ∠BOC और ∠DOA को किस प्रकार के कोण कहते हैं?

✍ आकृति 3.13 की तरह और भिन्न-भिन्न आकृतियाँ बनाकर उनमें शीर्षाभिमुखी कोणों को दर्शाइए। कोणों की माप लिखिए । शीर्षाभिमुखी कोण-युग्म में क्या संबंध है, लिखिए ।

हमें ज्ञात हुआ :

दो रेखाएँ परस्पर को प्रतिच्छेद करने से, उत्पन्न प्रत्येक युग्म शीर्षभिमुखी कोण समान माप के होते हैं।

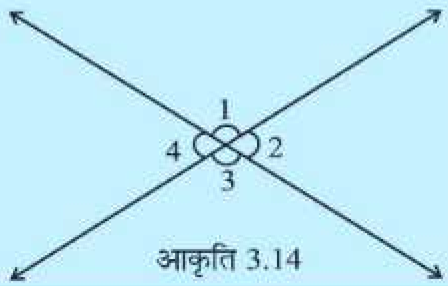
✍ बगल में दी गई आकृति को देखकर उत्तर दीजिए:

(क) $\angle 1$ के साथ कौन सा दूसरा कोण सरल युग्म बनाता है ?

(ख) $\angle 3$ का शीर्षभिमुखी कोण कौन-सा है ?

(ग) $\angle 2$ का शीर्षभिमुखी कोण कौन-सा है ?

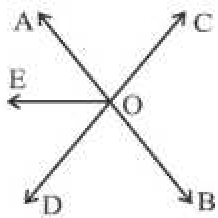
(घ) बगल में दी गई आकृति में $\angle 4$ की माप 60° हो तो, अन्य तीन कोणों की माप कितनी होगी ?



आकृति 3.14

अभ्यास - 3.1

1. बगल में दी गई आकृति में $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ रेखाएँ परस्पर को 'O' बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं।



आकृति 3.15

(क) $\angle AOC$ के एक आसन्न कोण का नाम लिखिए।
क्या ऐसे दूसरे कोण हैं ? यदि हैं, उनके नाम लिखिए।

(ख) $\angle AOC$ और $\angle AOB$ क्या दोनों परस्पर आसन्न कोण हैं ?

(ग) $\angle COB$ के साथ के कोण रेखीय युग्म कोण बनाते हैं उनके नाम लिखिए ।

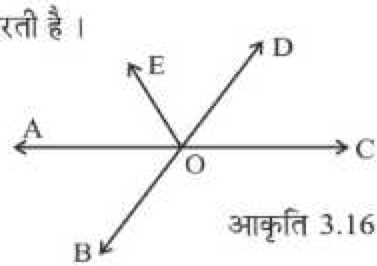
(घ) $\angle AOD$ के किसी संपुरक कोण का नाम लिखिए।
क्या $\angle AOD$ के साथ परस्पर परिपूरक होनेवाला कोई कोण है ? यदि हो, उसके नाम लिखिए।

(ङ) $\angle AOC$ के शीर्षभिमुखी कोण का नाम लिखिए।

(च) आकृति में $\angle AOD$ का शीर्षभिमुखी कोण हो तो, उसका नाम लिखिए।

(छ) आकृति में $\angle BOD$ का शीर्षभिमुखी कोण हो तो, उसका नाम लिखिए।

2. बगल की आकृति में $\overleftrightarrow{AC}$ और $\overleftrightarrow{BD}$ रेखाएँ परस्पर को बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है ।



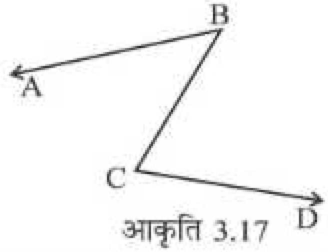
आकृति 3.16

(क) दो परस्पर शीर्षभिमुखी कोण-युग्मों के नाम लिखिए।

(ख) चार रेखीय कोण युग्मों के नाम लिखिए।

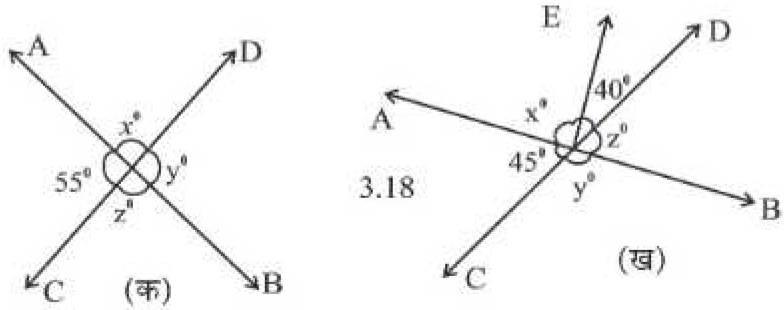
(ग) $m\angle AOE = 75^\circ, m\angle EOD = 40^\circ$ हो तो
$m\angle AOB, m\angle BOC, m\angle COD$ की माप लिखिए।

3. बगल की आकृति 3.17 में $\angle ABC$ और $\angle BCD$ क्या परस्पर आसन्न कोण हैं ? अपने उत्तर के लिए कारण दर्शाइए।



आकृति 3.17

4.



3.18

बगल की आकृति (क) और (ख) में $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ परस्पर को प्रतिच्छेद करती हैं । आकृति (क) में एक कोण की माप और आकृति (ख) में दो कोणों की माप लिखी गई है । प्रत्येक आकृति में x, y और z कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

5. खाली जगहें भरिए :

(क) दो कोणों की माप का योगफल, ... हो तो दोनों कोण परस्पर पूरक होंगे ।

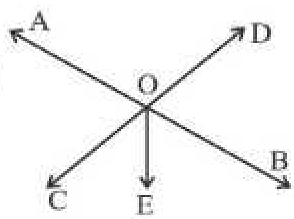
(ख) दो परस्पर संपूरक कोणों की माप .... है ।

(ग) एक रेखीय् कोण-युग्म बनाने वाले कोण-युग्म परस्पर .... है ।

(घ) दो रेखाएँ परस्पर को प्रतिच्छेद करें तो शीर्षभिमुखी कोण-युग्म की माप .... है ।

(ङ) दो परस्पर छेदी रेखाओं द्वारा बने शीर्षभिमुखी एक कोण-युग्म न्यून कोण हो तो दूसरे शीर्षभिमुखी कोण-युग्म में से प्रत्येक कोण .... होगा ।

6. बगल की आकृति में $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ परस्पर को 'O' बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है ।



आकृत 3.19

(क) जो शीर्षभिमुखी कोण-युग्म अधिक कोण के है, उन दोनों के नाम लिखिए।

(ख) जो आसन्न कोण रेखीय कोण-युग्म नहीं हैं, उनके नाम लिखिए ।

ऐसे कितने आसन्न कोण-युग्म है ?

7. नीचे कुछ डिग्री-माप दी गई हैं, कौन कोण-युग्म पूरक कोणों और कौन कोण-युग्म संपूरक कोण की माप दर्शाते हैं, उन्हें दर्शाइए।

(क) $55^\circ, 125^\circ$ (ख) $43^\circ, 47^\circ$ (ग) $112^\circ, 68^\circ$ (घ) $62^\circ, 28^\circ$

(ङ) $40^\circ, 140^\circ$ (च) $70^\circ, 20^\circ$ (छ) $15^\circ, 165^\circ$ (ज) $90^\circ, 90^\circ$

8. (क) जो कोण अपना संपूरक कोण होता है, उसकी माप कितनी होगी ?

(ख) जो कोण अपना पूरक कोण है, उसकी माप कितनी होगी ?

9. दो परस्पर संपूरक कोणों में से एक की माप 10° बढ़ा दी गई । दूसरे कोण की माप में क्या परिवर्त्तन करने से दोनों नए कोण परस्पर संपूरक होंगे ?

10. परस्पर संपूरक कोण-युग्म में से दोनों

(क) क्या न्यून कोण हो सकते हैं?

(ख) क्या अधिक कोण हो सकते हैं?

(ग) क्या दोनों समकोण हो सकते हैं?

(घ) क्या एक न्यूनकोण और दूसरा समकोण हो सकते हैं?

(ङ) क्या एक न्यूनकोण और दूसरा अधिककोण हो सकते हैं?

11. (क) दो परस्पर संपूरक कोणों में से एक की माप दूसरे की माप से 5 गुना होने पर, दोनों कोणों की माप कितनी होगी ?

(ख) दो परस्पर पूरक कोणों में से एक की माप दूसरे से चार गुना होने पर दोनों कोणों की माप कितनी होगी ?

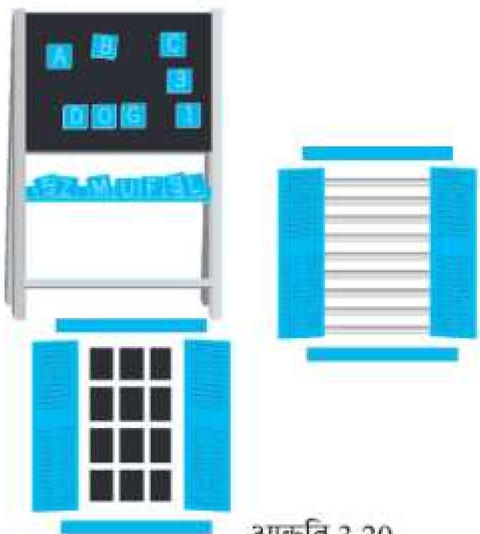
3.4. एकाधिक सरल रेखाएँ और उनकी प्रतिच्छेदी रेखा ।

दो रेखाओं की दो स्थिति याँ हो सकती हैं, हो सकता है, वे दोनों समानातंर या असमानांन्तर रेखाएँ (यानी परस्पर प्रतिच्छेदी) हो सकती हैं।

आकृति 3.20 (क) में एक श्यामपट स्टैंड पर रखा गया है । श्यामपट को ऊपर का किनारा और नीचे का किनारा दोनों समानांतर रेखाखंड हैं । उसी प्रकार बायाँ किनारा और दायाँ किनारा भी समानांतर रेखाखंड के नमूने हैं ।

आकृति (ख) में लोहे की छड़ों से बनी खिड़की हैं । यहाँ छड़े समानांतर रेखाओं के नमूने हैं ।

आकृति (ग)में ग्रील लगी खिड़की है । ग्रील की लोहे की पट्टियाँ परस्पर प्रतिच्छेादी रेखाखंडों के नमूने हैं।



आकृति 3.20

दो रेंखाओं का एक उभयनिष्ठ बिन्दु रहने से उन दोनों रेखाओं को परस्पर प्रतिच्छेदी रेखा कहा जाताहै । उस उभयनिष्ठ बिन्दु को दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु कहा जाता है ।

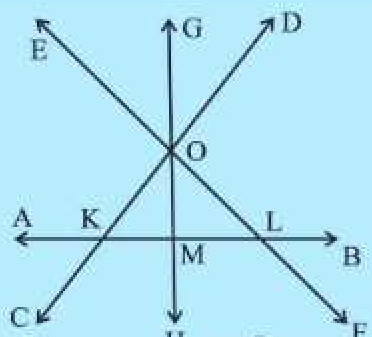
आप अपने परिवेश में कहाँ-कहाँ प्रतिच्छेदी रेखाएँ देखते हैं, उनके पाँच उदाहरण दीजिए ।

आकृति 3.21 में जैसी आकृतियाँ बनी हैं, तूम अपनी कॉपी में इसी प्रकार की आकृतियाँ बनाइए।

खुद करके देखिए :

(क) आप आकृति 3.21 में जो परस्पर प्रतिच्छेदी रेखायुग्म और उन दोनों का प्रतिच्छेद बिन्दु देख रहे हैं, उनके नाम लिखिए। जैसे : $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ परस्पर प्रतिच्छेदी हैं । उनका प्रतिच्छेद बिन्दु K है । ऐसे छह - युग्म परस्पर प्रतिच्छेदी रेखाओं और प्रत्येक रेखा - युग्म के प्रतिच्छेदन बिन्दु का नाम लिखिए।

- इन आकृति में क्या समानातंर रेखाएँ हैं ?



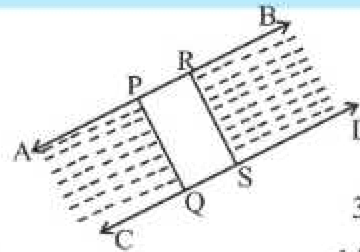
आकृति 3.21

(ख) दो रेखाओं या रेखाखंडों का एक से अधिक प्रतिच्छेद बिन्दु रहना क्या संभव है ? यदि संभव है ता ऐसी दो रेखाएँ खींचिए।

(ग) अपने परिवेश में परस्पर को समकोण में प्रतिच्छेद करने वाली रेखा या रेखाखंड को उदाहरण कहाँ देखने को मिलते हैं, लिखिए।

(घ) एक आयत के प्रत्येक युग्म भुजाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु पर उत्पन्न कोण की माप बताइए। एक पोस्टकार्ड लेकर यह गतिविधि कीजिए।

3.4.1. प्रतिच्छेदी रेखा



3.22

बगल की आकृति 3.22 में नहर के दोनों किनारे पर दो बाँध $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दो रेखाओं के नमूने हैं ।

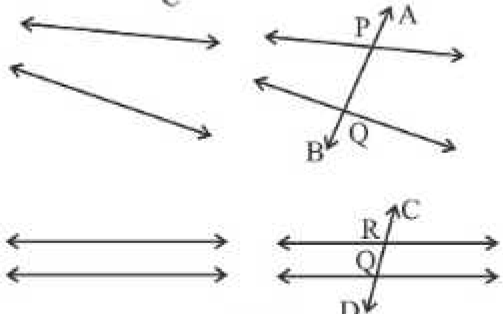
पुल का प्रत्येक किनारा $\overline{PQ}$ और $\overline{RS}$ एक - एक रेखाखंड के नमूने हैं। यहाँ $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ को $\overline{PQ}$ प्रतिच्छेद करती है ।

वैसे $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ को $\overline{RS}$ भी प्रतिच्छेद करती है ।

बगल की आकृति 3.23 (क) में दो असमानांतर रेखाएँ हैं। आकृति (ख) में एक रेखा दीजिए। असमानांतर रेखाओं को P और Q बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है ।

आकृति (ग) में दो समानातंर रेखाएँ हैं ।

आकृति (घ) में एक रेखा $\overleftrightarrow{CD}$ दो समानांनतर रेखाओ को R और Q बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है ।



3.23

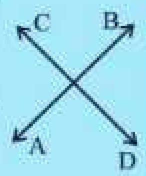
आकृति (ख) में $\overleftrightarrow{AB}$ को अन्य दो रेखाओं की **प्रतिच्छेदी रेखा** कहा जाता है ।

आकृति (घ) में $\overleftrightarrow{CD}$ को अन्य दो रेखाओं की **प्रतिच्छेदी रेखा** कहा जाता है ।

एक रेखा अन्य दो (या दो से अधिक) रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने से उस रेखा को प्रतिच्छेदी रेखा कहा जाता है ।

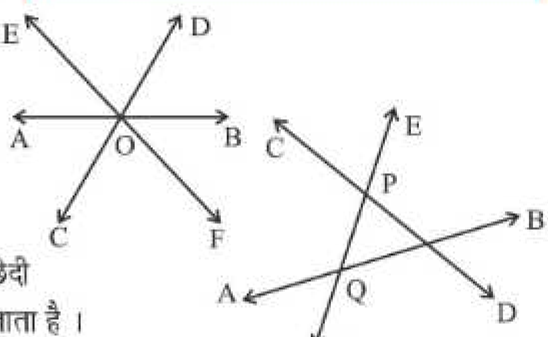
क्या आप जानते हैं ?

बगल की आकृति में $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दो परस्पर प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। यहाँ $\overleftrightarrow{AB}$ रेखा अन्य एक रेखा $\overleftrightarrow{CD}$ को प्रतिच्छेद करती है । यहाँ $\overleftrightarrow{CD}$ रेखा अन्य एक रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ के प्रतिच्छेद करती है। यहाँ $\overleftrightarrow{AB}$ या $\overleftrightarrow{CD}$ किसी को भी प्रतिच्छेद रेखा नहीं माना जाएगा ।



ध्यान दें : बगल की आकृति 3.24 (क) में $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दो परस्पर प्रतिच्छेदी (या समानांतर) रेखाएँ हैं । इन दोनों को $\overleftrightarrow{EF}$ O बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है ।

बगल की आकृति (ख) में $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ दो परस्पर प्रतिच्छेदी (या असमांतर) रेखाओं को $\overleftrightarrow{EF}$ दो भिन्न-भिन्न बिंदुओं P और Q बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है ।

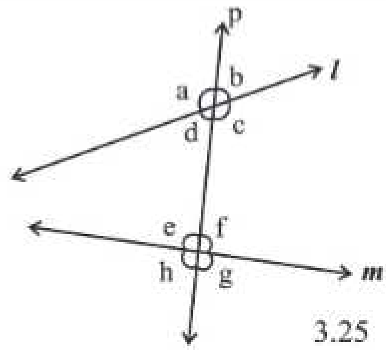


3.24

आकृति (क) में $\overleftrightarrow{EF}$, अन्य दो रेखाओं $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ की प्रतिच्छेदी रेखा नही है । यहाँ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ और $\overleftrightarrow{EF}$ को एक बिन्दुगामी रेखा कहा जाता है ।

आकृति (ख) में $\overleftrightarrow{EF}$ अन्य दो रेखाओं $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ की प्रतिच्छेदी रेखा है ।

3.4.2. प्रतिच्छेदी रेखा से उत्पन्न कोण :



3.25

आकृति ३.२५ में *l* और *m* दोनो रेखाओ के - रेखा भिन्न-भिन्न बिदुंओ पर प्रतिच्छेद करती है। अत: - रेखा एक प्रतिच्छेदी रेखा है। प्रत्येक प्रतिच्छेदन बिंदु पर कोण बने है। वे कोण a, b, c, d, e, f, g और h है।

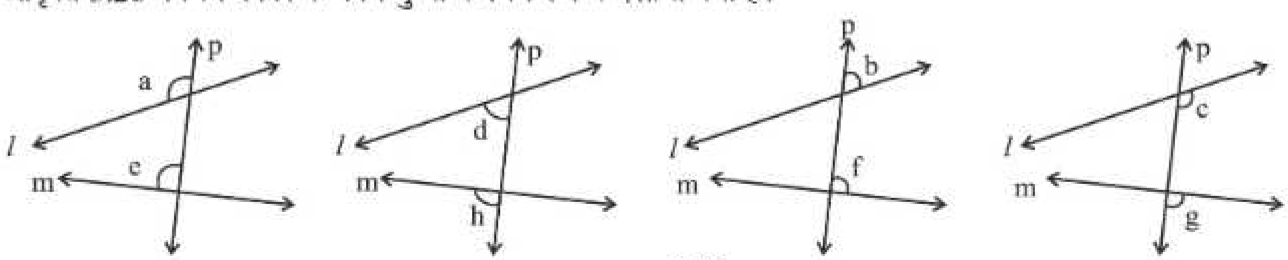
l रेखा और p रेखा के प्रतिच्छेदन बिन्दु पर 4 कोण बने हैं। *m* रेखा और p रेखा के प्रतिच्छेदन बिन्दु पर भी 4 कोण बने है।

इन 8 कोणों में ये भिन्न भिन्न कोणों को भिन्न नाम दिए जाते हैं ।

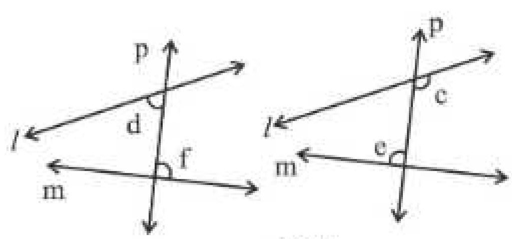
उन नामों को निम्न सारणी में देखिए:

प्रतिच्छेदी रेखा और m के अंत: कोण d, c, e, f
प्रतिच्छेदी रेखा और m के बाह्य कोण a, b, h, g
प्रतिच्छेदी रेखा p के दाईं ओर के कोण b, c, f, g
प्रतिच्छेदी रेखा p के बाईं ओर के कोण a, d, e, h
सगंत कोण के युग्म a और e, d और h, b और f, c और g
एकांतर अंत: कोण युग्म d और f, c और e
एकांतर बाह्य कोण-युग्म a और g, b और h
प्रतिच्छेदी रेखा के एक पार्श्व के अन्त: कोण युग्म d और e, c और f

आकृति 3.26 में भिन्न प्रकार के कोण युग्मों के भिन्न रूप में दर्शाया गया हैं।



3.26



3.27

ऊपर की चारों आकृतियों में चार युग्म संगत कोण हैं।

आकृति 3.27 में दो आकृतियाँ हैं। इनमें दो युग्म एकांतर कोण हैं।

ध्यान दें:

आकृति 3.26 में प्रत्येक संगत कोण युग्म -

- प्रतिच्छेदी रेखा के एक ही ओर हैं । ∠a और ∠e∠d और ∠h कोण युग्म प्रतिच्छेदी रेखा के बाईं ओर हैं। ∠b और ∠f, ∠c और ∠h कोण युग्म प्रतिच्छेदी रेखा के डाईं ओं है।

- प्रतिच्छेदी रेखा के अनुरूप दिशाओं में हैं । ∠a और ∠e, ∠b और ∠f प्रत्येक प्रतिच्छेदी रेखा के ऊपर हैं। ∠d और ∠h, ∠c और ∠g प्रत्येक प्रतिच्छेदी रेखा के नीचे है।

आकृति 3.27 (ख) में प्रत्येक एकांतर कोण युग्म :

- प्रतिच्छेदी रेखा की विपरीत दिशा में है। जैसे ∠d, प्रतिच्छेदी रेखा के बाईं ओर ∠f, प्रतिच्छेदी रेखा के दाईं ओर ∠e, प्रतिच्छेदी रेखा के बाईं ओर ∠c. प्रतिच्छेदी रेखा की दाईं ओर हैं।
- प्रतिच्छेदी रेखा की विपरीत दिशा में हैं। जैसे ∠d, प्रतिच्छेदी रेखा *l* के नीचे की ओर ∠f, प्रतिच्छेदी रेखा m उपर की ओर हैं । ∠e, प्रतिच्छेदी रेखा m के ऊपर की ओर ∠c, प्रतिच्छेदी रेखा *l* के नीचे की ओर हैं।

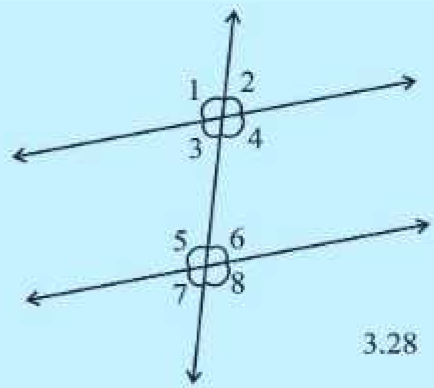
उत्तर लिखिए:

बगल की आकृति को देखकर निम्न कोण युग्म किस प्रकार के कोण हैं, लिखिए।

(क) ∠1 और ∠5 (ख) ∠3 और ∠6

(ग) ∠4 और ∠6 (घ) ∠4 और ∠5

(ङ) ∠3 और ∠6 (च) ∠2 और ∠6



3.28

3.4.3. दो समानांतर रेखा और प्रतिच्छेदी रेखा :

आप जानते हैं :

एक सतह पर खींची गई दो रेखाएँ परस्पर को किसी भी स्थान पर प्रतिच्छेद न करें, तो उन सरल-रेखाओं को समान्तंर रेखा कहा जाता हैं।

बताइए

- तीन रेखाओं को एक प्रतिच्छेदी रेखा कितने बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेगी ?
- दो रेखाओं के लिए कितनी प्रतिच्छेदी रेखा खींचना संभव है ?
- किन किन अंग्रेज अंक्षरों में समान्तर रेखाएँ पाई जाती हैं ?

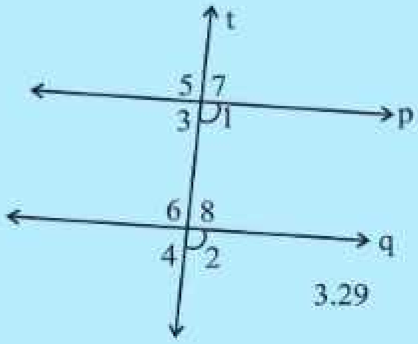
खुद करके देखिए :

- एक रुलिंग कागज लीजिए।
- स्केल के किनारे से कागज के पास-पास रहने वाली दो लकीरों को मिलाकर रेखा कलम से खींचिए। अब आप ने जो दो लकीरें खींची, वे कागज की लकीरों की तुलना में अधिक मोटी और स्पष्ट दीखेंगी।

  उसी चार जोड़ीं लकीरें को स्पष्ट कर दीजिए। प्रत्येक जोड़ी लकीरों को रेखा के सकेंत चिह्नत कीजिए।
- (दिशाओं में तीर चिह्न दों।)

प्रत्येक जोड़ी रेखा समान्तर रेखाएँ होंगी।

(क्योंकि रुलिंग कागज पर सभी लकीरें समान्तर हैं।)



3.29

- प्रत्येक जोड़ी समानांतार रेखाओं को लिए एक एक प्रतिच्छेदी खींचिए।
- प्रतिच्छेदी रेखा दोनों प्रतिच्छेदित रेखाओं के साथ जो कोण उत्पन्न करती है, उनके नामकरण करें। (आकृति में जैसे दर्शाए गए हैं।)
- रेखाओं और कोणों के नामकरण कीजिए।

  एक पारदर्शी कागज लेकर ऊपर की आकृति पर रखिए। पारदर्शी कागज पर p, q और t रेखाओं के साथ सटाकर तीन रेखाएँ खीचिए । और रेखाओं के नाम लिखिए । पारदर्शी कागज पर नकल किए गए कोणों के $\angle 1$, $\angle 2$ नाम आदि दीजिए।
- अब पारदर्शी कागज को धीरे-धीरे ऊपर की ओर खिसका दीजिए। पारदर्शी कागज पर अंकित p रेखा, रुलिंग कागज पर अंकित q के साथ मिल जाने के बाद पारदर्शी कागज को स्थिर रखिए।
- क्या देखते हैं?

  अब पारदर्शी कागज पर अंकित $\angle 2$, रुलिंग कागज पर अंकित $\angle 1$ के साथ पूरी तरह मिल जाना है।

  अब हमने देखा $m\angle 1 = m\angle 2$
- उसी प्रकार आकृति पर पारदर्शी कागज रखकर पहले की तरह गतिविधियाँ कीजिए। निम्न कोण युग्मों में क्या संबंध हैं, तय कीजिए।

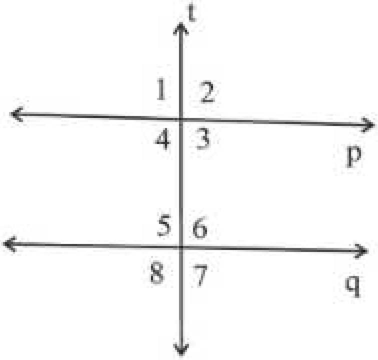
  (क) $\angle 3, \angle 4$ (ख) $\angle 5, \angle 6$ (ग) $\angle 7, \angle 8$

ऊपर की गतिविधि से हमें क्या पता चला ?

दो समानातंर रेखाओं को एक प्रतिच्छेदी रेखा प्रतिच्छेदन करने से, उत्पन्न प्रत्येक संगत-कोणों के युग्म समान माप के होते हैं।

इस निष्कर्ष का व्यवहार करके हम एक दूसरे निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं।

आकृति 3.30 को देखिए।



3.30

यहाँ p और q दो समानांतार रेखाएँ हैं । t उनकी एक प्रतिच्छेदी रेखा है।

संगत कोण होने से $m\angle 4 = m\angle 8$ t और q परस्पर के प्रतिच्छेद करने से शीर्षभिमुखी कोण $m\angle 8 = m\angle 6$ अतएव, $m\angle 4 = m\angle 6$ हैं।

फिर संगत कोण होने से $m\angle 7 = m\angle 5$ पर t और q कोणों दोनों परस्पर को प्रतिच्छेद करने से और शीर्षभिमुखी कोण होने से $m\angle 7 = m\angle 5$ ।

अतएव, $m\angle 3 = m\angle 5$ ।

$\angle 4$ और $\angle 6$ और $\angle 3$ और $\angle 5$ कोण-युग्म किस प्रकार के कोण-युग्म होगें?

क्या उपर्युक्त प्रत्येक कोण युग्म परस्पर एकांतर है?

अतएव, हमारा यह निष्कर्ष निकला :

दो समान्तर सरल रेखाओं को एक प्रतिच्छदी रेखा प्रतिच्छेद करने से, उत्पन्न प्रत्येक एकांतर कोण युग्म बराबर माप के होते हैं।

इस निष्कर्ष का उपयोग करके इस अन्य एक निष्कर्ष पर पँहुच सकेंगे।

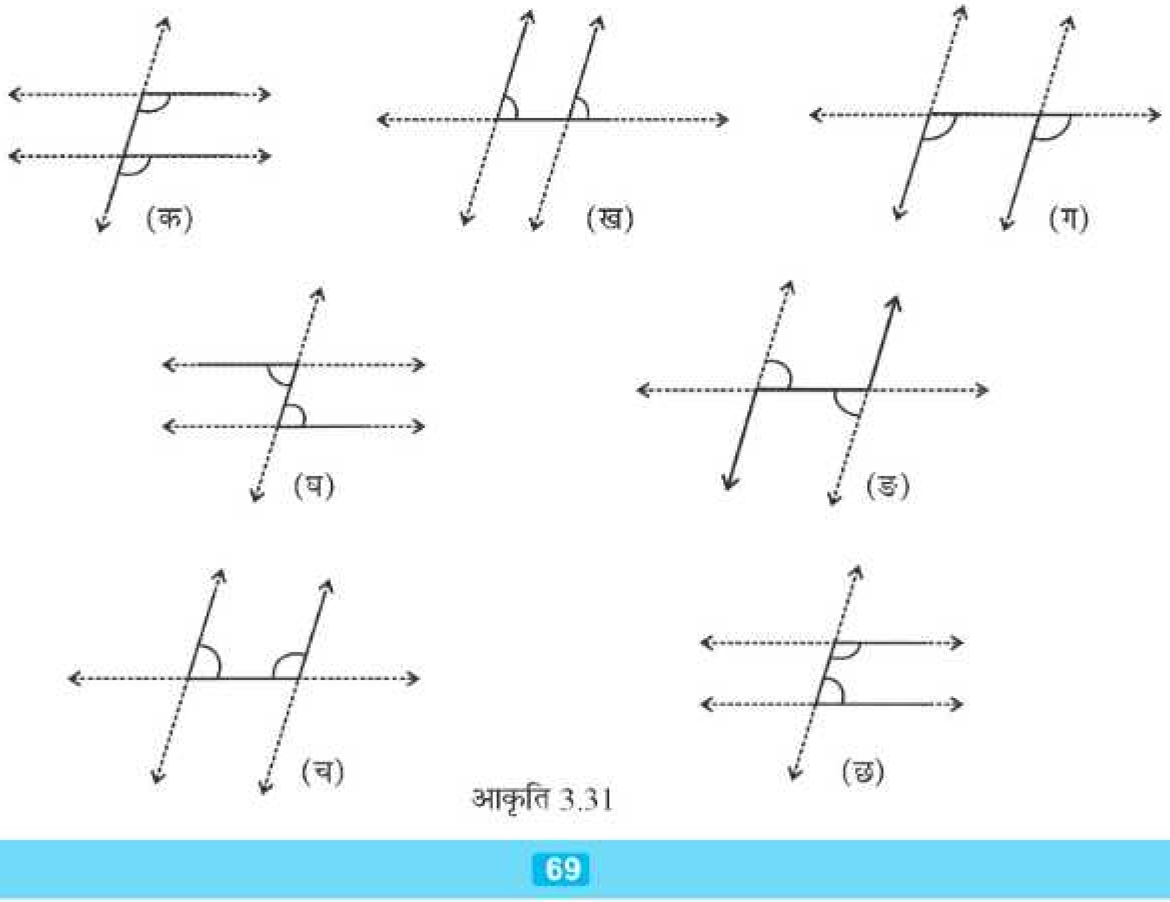
आकृति 3.30 में सरल युग्म होने के कारण $\angle 6$ और $\angle 7$ परस्पर संपूरक हैं। पर संगत कोण होने के नाते $m\angle 3 = m\angle 7$ है। अत: $\angle 6$ और $\angle 3$ परस्पर संपूरक हैं। उसी प्रकार सरल युग्म $\angle 1$ और $\angle 4$ परस्पर संपूरक हैं। $\angle 5$ और $\angle 4$ परस्परक संपूरक हैं $\angle 6$ और $\angle 3$ तथा $\angle 5$ और $\angle 4$ कोण युग्म किस प्रकार के कोण-युग्म हैं?

ये दोनों कोण-युग्म परस्पर प्रतिच्छेदी रेखा के एक पार्श्व के अंत:कोण हैं।

अतएव, हमारा यह निष्कर्ष निकला :

दो समानांतर सरल रेखाओं को एक प्रतिच्छेदी रेखा प्रतिच्छेद करने से उत्पन्न होनेवाली प्रतिच्छेदी रेखा के एक ही पार्श्वस्थ अंत:कोण युग्म परस्पर संपूरक होगें। अर्थात् उन दोनों कोणों का योगफल 180^0 होगा।

एकांतर कोण - युग्म, सगंत कोण-युग्म और प्रतिच्छेदी रेखा के एक पार्श्व के अंत कोण-युग्म को आसानी से पहचानने के लिए निम्न आकृतियों पर ध्यान दें।



आकृति 3.31

आकृति 3.31 (क), (ख), (ग) प्रत्येक में एक अंग्रेजी अक्षर F की विभिन्न स्थितियाँ देखने को मिलती हैं। इन सारी स्थितियाँ में एक संगत कोण युग्म को चिह्नित किया गया हैं। अतएव, संगत कोण F के रूप में रहते हैं।

(घ) और (ङ) प्रत्येक आकृति में एक अंग्रेजी अक्षर Z के विभिन्न रूप देखने को मिलते हैं।

इन सभी स्थितियाँ में एक एकांतर कोण युग्म को चिह्नित किया गया है।

अतएव Z के रूप में एकांतर कोणों को दर्शाया जाता है।

(च) और (छ) प्रत्येक आकृति में एक अंग्रेजी अक्षर U के विभिन्न रूप देखने को मिलते हैं।

इन सभी स्थितियाँ में एक प्रतिच्छेदी रेखा-युग्म के एक पार्श्व के अंत:कोण चिह्नित किया गया है।

अतएव, U रूप प्रतिच्छेदी रेखा के एक पार्श्व के अन्त:कोण युग्म को दर्शाता हैं।

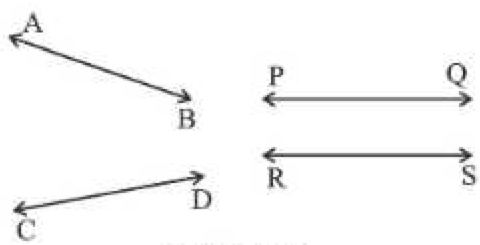
समानांतर सरल रेखाओं का एक युग्म खींचिए। उनका एक प्रतिच्छेदी रेखा खींचिए। प्रतिच्छेदी रेखा से उत्पन्न कोणों की माप करके निम्न उक्तियों को सत्यापित कीजिए।

(क) संगतकोणों की माप बराबर होती है।

(ख) एकांतर कोणों की माप बराबर होती है।

(ग) प्रतिच्छेदी रेखा के एक पार्श्व के अंत: कोण परस्पर संयुक्त होते हैं।

3.5. समानांतर रेखा की पहचान :

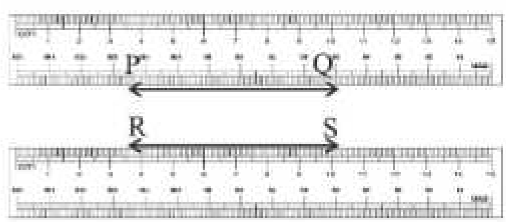


आकृति 3.32

(क) आकृति 3.32 में सरलरेखा

को $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{CD}$ के देखने से पता चलता है कि दाईं ओर के अंश परस्पर को प्रतिच्छेद करते हैं। अतएव, दोनों असमानांतर सरल रेखाएँ हैं।

पर (ख) आकृति में दोनों रेखाएँ $\overleftrightarrow{PQ}$,और $\overleftrightarrow{RS}$ सरलरेखाएँ किसी ओर बढ़ने पर क्या परस्पर को प्रतिच्छेद कर सकते हैं? नहीं, ऐसा नहीं लगता। अब उसे जानने के लिए दो स्केल लीजिए। एक स्केल को $\overleftrightarrow{PQ}$ के साथ, दूसरे स्केल को $\overleftrightarrow{RS}$ के साथ सटाकर रखिए। (बगल की आकृति की तरह)। स्केल के दोनों किनारे परस्पर को नहीं छूते हैं। अतएव, दोनों रेखाएँ बाईं ओर या दाईं ओर कॅापी के पृष्ठ के अक्षर परस्पर को प्रतिच्छेद नहीं करेंगी, ऐसा लगता हैं। केवल रेखाओं की आकृति को देखकर वे कहाँ परस्पर को प्रतिच्छेद करेंगे कि नहीं, यह जानना संभव नहीं है। इसलिए हमें एक पर्याय तय करना पडेगा, जो हमें रेखाएँ समानांतर हैं या नहीं, उसे जानने में मदद करेगी।

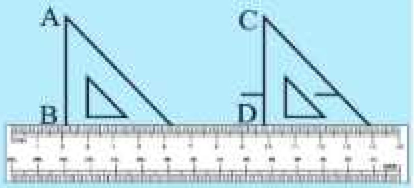


आकृति 3.33

अब देखेंगे दो रेखाओं की एक प्रतिच्छेदी रेखा उन दो रेखाओं से जो संगत कोणों, एकांतर कोणों या प्रतिच्छेदी रेखा के एक पार्श्व के अंत: कोण की मदद से वक्त दोनों रेखाएँ समानांतर हैं या नहीं, इसे जानने का क्या कोई उपाय हैं या नहीं ?

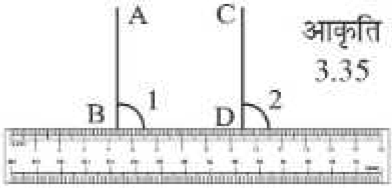
खुद करके देखिए :

- आपने अपने सेटस्कोयार का व्यवहार करके कैसे दो समानांतर रेखाएँ खींची थीं, उसे याद कीजिए। आकृति 3.34 में वह विधि दर्शाई गई हैं।
- आप सेट्स्कवेयर को स्केल के एक किनारे से सटाकर (आकृति (क) की तरह) रेखा और उसके समकोण संलग्न किनारे के सटाकर एक रेखाखंड खींचिए।
- फिर सेट्स्कवेयर को (आकृति (ख) की तरह अन्य एक स्थान की ओर सरकाकर पहले के किनारे से सटाकर और एक रेखाखण्ड का अंकन कीजिए। रेखाखण्डों के नाम AB और CD दीजिए। जो दो रेखाखण्डों AB और CD मिले वे परस्पर समानांतर हैं।



आकृति 3.33

आकृति 3.35 में AB और CD रेखाखण्डों के लिए स्केल का एक किनारा एक प्रतिच्छेदी की तरह रहा है।



आकृति 3.35

परिणाम स्वरूप $\angle 1$ और $\angle 2$ संगतकोण युग्म है $\angle 1$ और $\angle 2$ प्रत्येक सेट्स्कवेयर के समकोण के अनुरुप हैं। हमने ऊपर की अंकन पद्धति से एक एकांतर कोण युग्म को समान माप वाला कर दिया। इससे हम दो समानांतर रेखाखण्ड या समानांतर रेखाएँ मिलीं।

हमें ज्ञात हुआ :

दो सरल रेखाओं के एक प्रतिच्छेदी रेखा प्रतिच्छेदी करने से यदि उत्पन्न संगत कोण-युग्म समान माप वाले होते हैं, तब दोनों रेखाएँ समानांतर हैं।

दो रेखाओं को एक प्रतिच्छेदी रेखा प्रतिच्छेद करने से यदि एकांतर कोण-युग्म समान माप होते हैं , तब दोनों रेखाएँ समानांतर हैं।

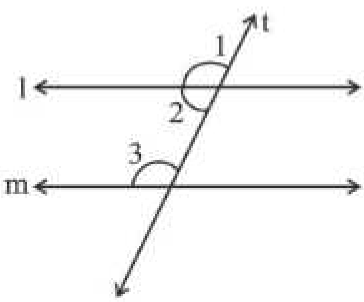
बगल की आकृति में रेखा l और m के लिए t रेखा एक प्रतिच्छेदी नाम लें। प्रतिच्छेदी रेखा के बाई ओर के अन्त : कोण $\angle 2$ और $\angle 3$ परस्पर संपूरक हैं।

सरल युग्म होने से $\angle 1$ और $\angle 2$ भी परस्पर संपूरक होंगे।

$\therefore m\angle 3 = m\angle 1$

ये दोनों कोण परस्पर संगत कोण हैं।

इसलिए $l \parallel m$ होगा।



आकृति 3.36

हमने देखा :

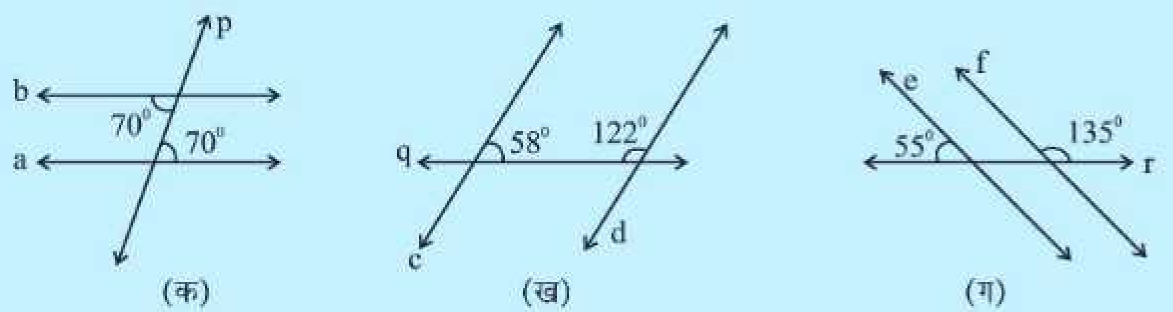
प्रतिच्छेदी रेखा के एक पार्श्व के दोनों अंत : कोण परस्पर परिपूरक हों तो संगत कोण-युग्म की सदैव समान माप के होंगे।

संगत कोण - युग्म समान माप के हों, तों दोनों रेखाएँ समानांतर होंगी।

अतएव, हमें ज्ञात हुआ :

दो सरल रेखाओं के एक रेखा प्रतिच्छेदन करने से यदि प्रतिच्छेदी रेखा के एक पार्श्व के अन्त : कोण युग्म परस्पर संपूरक होते हैं तब दोनों रेखाएँ समानांतर होती हैं।

✎ खुद उत्तर देने का प्रयास कीजिए :



आकृति 3.37

ऊपर के (क), (ख) और (ग) आकृतियों में जो रेखा-युग्म हैं, उनमें से कौन-सा युग्म समानांतर और कौन सा असमानांतर है, तय कीजिए। अपने उत्तर के लिए कारण दर्शाइए।

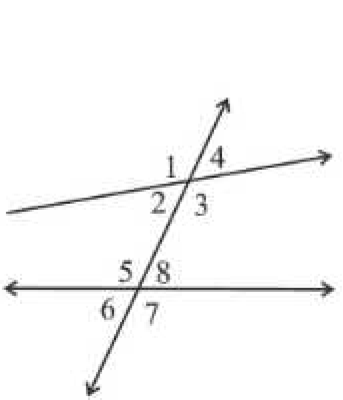
अभ्यास - 3.3

1. बगल की आकृतियाँ देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

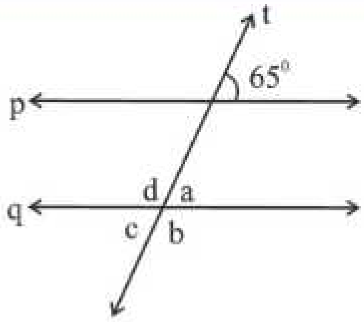
   (क) $\angle 1$ और $\angle 5$ किस प्रकार के कोण-युग्म है ?
   अन्य कोण उसी प्रकार के हों तो उनके नाम लिखिए।

   (ख) $\angle 3$ और $\angle 5$ किस प्रकार के कोण-युग्म हैं ?
   उसी प्रकार के अन्य कोण-युग्म के नाम लिखिए।

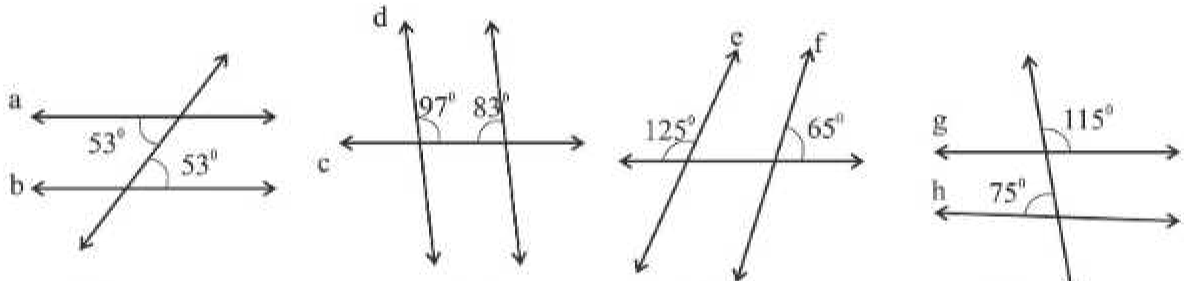
   (ग) $\angle 2$ और $\angle 5$ किस प्रकार के कोण-युग्म हैं ?
   उसी प्रकार के अन्य कोण-युग्म के नाम लिखिए।



2. बगल की आकृति में रेखाएँ p ॥ q और रेखा t एक प्रतिच्छेदी हैं । उत्पन्न कोणों में से एक कोण की माप 65^0 है (आकृति में दर्शाया गया है।) अन्य चार कोणों की मापों के a, b, c, d संकेत से दर्शाया गया है । a, b, c और d की माप ज्ञात कीजिए।

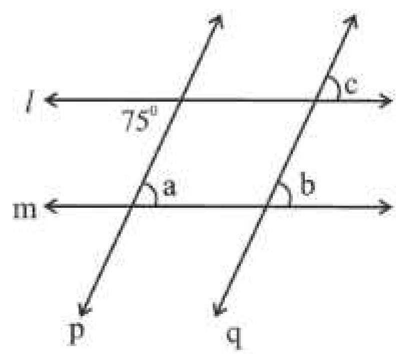


3. नीचे चार रेखा - युग्मों में से कौन सा युग्म समानांतर हैं ? कौन-सा युग्म असमांनर है? अपने उत्तर के पक्ष में कारण दर्शाइए।



(क) (ख) (ग) (घ)

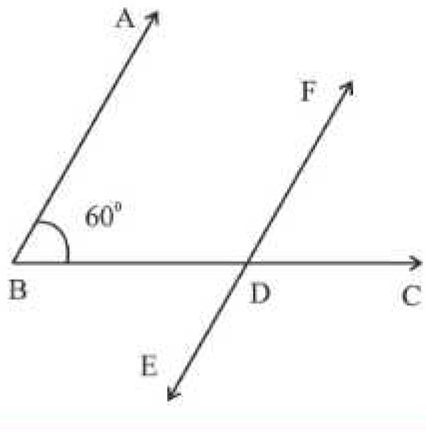
4. बगल की आकृति में रेखाएँ l ॥ m है । रेखाएँ p ॥ q । हैं। आकृति में एक कोण की माप 75^0 है जो आकृति में दर्शाया गया है। अन्य तीनों कोणों की माप को a, b, c संकेत से दर्शाया गया है । a, b और c की माप ज्ञात कीजिए।



5. बगल की आकृति की तरह 60^0 माप का $\angle ABC$ का अंकन कीजिए। $\overrightarrow{BC}$ पर एक बिंदु चिह्नित करके उसका नाम D दीजिए।

D बिंदु पर $\overleftrightarrow{DE}$ (आकृति में जैसे दर्शाया गया है) को अंकन कीजिए, जैसे कि $\overrightarrow{DE}$ ॥ $\overrightarrow{BA}$ होगी ।

इस गतिविधि के लिए $\angle BDE$ कोण की माप कितनी लेकर $\overrightarrow{DE}$ रेखा का अंकन करेंगे ? उसका कारण दर्शाइए।



चतुर्थ अध्याय

घातांक एवं घात

4.1. हमें जो ज्ञात है :

छठी कक्षा में हमने घात के संबंध मे बहुत कुछ सीखा है। किसी संख्या को आधार और घातांक के माध्याम से प्रकट करने से उसे घात कहा जाता है ।

जैसे : $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

यहाँ 32 को 2^5 के रूप में व्यक्त किया गया, यहाँ आधार 2 है और घातांक 5 है।

हम कहते हैं 32, '2' की पाँचवीं घात है।

संख्या 32
घातांकीय रूप 2^5
2^5 एक घात है।

उत्तर दीजिए :

- 16, 2 आधार की कौन सी घात है ?
- 3 आधार का चौथी घात कितनी है ?
- 125, किस आधार का तीसरी घात है ?
- 216 को किस क्षुद्रत्तम आधार वाली घात के रूप में व्यक्त किया जा सकेगा ?

4.2. घात

क्या पृथ्वी का द्रव्यमान आप बता सकेंगे ?

यह प्राय:5,970,000,000,000,000,000,000,000 कि.ग्रा है। इसे पढ़ने की कोशिश कीजिए।

उसी प्रकार यूरेन्स का द्रव्यमान है प्राय 86,800,000,000,000,000,000,000,000 कि.ग्रा.

अब बताइए पृथ्वी और युरेन्स में से किसका द्रव्यमान अधिक है ?

जौसी बहुत सी बड़ी बड़ी संख्याएँ हैं, जिन्हें पढ़ना, समझना तथा तुलना करना कठिन व्यापार है। इन संख्याओं को पढने, समझने और तुलना करने के लिए हम घात का व्यवहार करते हैं। बड़ी संख्या को हम आधार और घात के माध्याम से व्यक्त करते हैं।

उदाहरण के रूप में $100000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

यहाँ '10' आधार है । '5' इसकी घात है ।

100000 का घातांकीय रूप है 10^5 ।

उसी प्रकार 1000 का घातांकीय रूप है10^3 ।

क्योंकि $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$

जिस संख्या को समान समान गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता, उसी संख्या को घातांकीय रूप से व्यक्त किया जा सकेगा।

एक संख्या को विस्तारित प्रणाली से लिखने की प्रणाली से हम परिचित हैं ।

जैसे : $23574 = 2\times10000+3\times1000+5\times100+7\times10+4\times1$

अब हम विस्तारित रूप को निम्न रूप में लिख सकेंगे ।

$23574 = 2\times10^4+3\times10^3+5\times10^2+7\times10^1+4\times1$

यहाँ ध्यान दें 10000, 1000, 100, 10 को क्रमश $10^4, 10^3, 10^2, 10^1$ की तरह घातांकीय रूप में व्यक्त किया गया है।

✍ आप उसी प्रकार 135724 और 2164593 के विस्तारित रूप से लिखिए।

आपने जो विस्तारित रूप लिखा, उसे 10 आधार वाली घात में व्यक्त कीजिए।

जैसे कुछ संख्याओं के सिर्फ 10 आधार वाली घात में व्यक्त किया जा सकता है । (जैसे : $1000=10^3$),

उसी प्रकार कुछ संख्याओं को अन्य आधार वाली घात में व्यक्त किया जा सकता है।

जैसे : $81 = 3\times3\times3\times3 = 3^4$

$64 = 4\times4\times4 = 4^3$, अथवा $64 = 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^6$

खुद करके देखिए :

निम्न सारणी की खाली जगहों को भरने का प्रयास कीजिए:

संख्या	घातांकीय रूप	आधार	घात
125		5	
128			7
243			3
256		4	
216			3

उपर्युक्त अर्थों से हमने आधार और घात दोनों को गणन(प्रकाश) संख्या के रूप में लिया है ।

अब ऋणात्मक पूर्णांक को आधार और प्राकृत संख्या को घात के रूप में लेकर कुछ संख्याओं की घातांकीय रूप नय लिए गए हैं।

क्या आप जानते हैं ?
25 को 25^1 के रूप में लिखना या 25^1 को 25 का घातांकीय रूप कहना उचित नहीं है।

$-8 = (-2)\times4(-2\ \ )\times(-2)\times(-2) = (-2)^3$,

$81 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = (-3)^4$,

$25 = (-5)\times(-5) = (-5)^2$

बताइए : 81 को जैसे $(-3)^4$ और $(+3)^4$ के रूप में व्यक्त किया गया है, उसी प्रकार क्या (−8) को (−2) और +2 दोनों प्रकार की आधारवाली घात में व्यक्त किया जा सकेगा? कारण दर्शाइए।

उदाहरण - 1

2^3 और 3^2 घातों में से कौन सी बड़ी घात है?

हल :

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

8 से 9 बड़ी संख्या है। अतएव 2^3 से 3^2 बड़ी है।

उदाहरण - 2

निम्न संख्याओं को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए। किस क्षेत्र में आधार एक अभाज्य संख्या होगी?

(क) 10000 (ख) 625 (ख) 729

हल :

(क) $10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

(ख) $625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

(ग) $729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$

625 और 729 के क्षेत्र में आधार अभाज्य संख्याएँ हैं।

5	625
5	125
5	25
	5

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
	3

उदाहरण - 3

निम्न संख्याओं को ऋणात्मक आधारों के घातों के रूप के लिखिए :

(क) −27 (ख) −32

हल :

(क) $-27 = (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^3$

(ख) $-32 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^5$

उदाहरण - 4

निम्न घातांकीय रूपों को विस्तारित रूप से लिखिए :

(क) a^4 (ख) b^5 (ग) $(ab)^3$

हल :

(क) $a^4 = a \times a \times a \times a$

(ख) $b^5 = b \times b \times b \times b \times b$

(ग) $(ab)^3 = ab \times ab \times ab$

$= a \times b \times a \times b \times a \times b = a \times a \times a \times b \times b \times b$

उदाहरण - 5

निम्न घातों का नाम ज्ञात कीजिए:

$(1)^5$, $(-1)^3$, $(-1)^6$, $(-10)^3$, $(-2)^3$

हल :

$$(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1)$$
$$= 1 \times (-1) = -1$$

$$(-1)^6 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$$
$$= 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10)$$
$$= 100 \times (-10) = -1000$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$$
$$= (+4) \times (-2) = -8$$

बताइए:
$(1)^{10}$ और $(1)^9$ में से कौन सी बड़ी है ?
$(-1)^5$ और $(-1)^{11}$ में से कौन सी छोटी है ?

✎ ऋणात्मक आधारवाली एक घात का घातांक सम संख्या हो, तों घात धनात्मक होता है।
उसी प्रकार ऋणात्मक आधारवाली एक घात का घातांक विषम हो, तो घात किस प्रकार की संख्या होगी, जाँच कीजिए।

उदाहरण - 6

निम्न संख्याओं को अभाज्य संख्याओं की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

(क) 500 (ख) 392

हल :

$$500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 2^2 \times 5^3$$
$$392 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7$$
$$= 2^3 \times 7^2$$

2	500
2	250
5	125
5	25
	5

2	392
2	196
2	98
7	49
	7

क्या आप जानते हैं ?
(-1) की घात विषम संख्या हो, तो घात का नाम -1 होगा । (-1) की घात सम संख्या दो तो घात का मान 1 होगा ।

अभ्यास - 4.1

1. निम्न घातों का मान ज्ञात कीजिए :

(क) 2^6 (ख) 9^3 (ग) 10^4 (घ) 5^4

2. निम्न संख्याओं के घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए, प्रत्येक क्षेत्र में आधारों और घातांक को पहचानिए:

(क) 512 (ख) 343 (ग) 729 (घ) 625

3. घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(क) $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

(ख) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

(ग) $p \times p \times p$

(घ) $a \times a \times a \times a \times a$

(ङ) $r \times r \times r \times r \times r \times r$

4. निम्नलिखित घातों में से कौन बड़ी है ?

(क) 4^3 और 3^4

(ख) 5^3 और 3^5

(ग) 2^8 और 8^2

(घ) 2^{10} और 10^2

0^5 0^{11}

5. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य संख्याओं की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(क) 648 (ख) 432 (ग) 3600

6. सरल कीजिए:

(क) 2×10^3 (ख) $7^2 \times 2^2$

(ग) $2^3 \times 5^2$ (घ) $3^2 \times 4^3$

(ङ) $3^2 \times 2^3 \times 5^2$ (च) $5^2 \times 3^2 \times 2^2$

7. सरल कीजिए:

(क) $(-4)^3$ (ख) $(-2)^3 \times (-3)^2$

(ग) $(-3)^2 \times 2^4$ (घ) $(-2)^3 \times (-10)^3$

4.3. घातांकीय नियम :

4.3.1 एक ही आधारवाली घातों का गुणन

उदाहरण - 1

आइए $2^2 \times 2^3$ को एक घात को रूप में व्यक्त कीजिए:

$2^2 \times 2^3$

$= (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$

5 को (2+3) के रूप में लिखा जा सकता है ।

दो 2 और तीन 2 का गुणनफल पाँच 2 का गुणनफल है ।

2^2 और 2^3 एक ही आधारवाली होने के कारण $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3}$ भी होगी ।

उदाहरण - 2

उसी प्रकार $(3)^4 \times (3)^3 = \{(3) \times (3) \times (3) \times (3)\} \times \{(3) \times (3) \times (3)\}$

$= (3) \times (3) \times (3) \times (3) \times (3) \times (3) \times (3) = (3)^7 = (3)^{4+3}$

अतएव $(3)^4 \times (3)^3 = (3)^{4+3}$

उदाहरण - 3

$a^2 \times a^6 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a \times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^8$

अतएव $a^2 \times a^6 = a^{2+6}$

हमें जो गुणनफल मिले, उन्हें निम्न सारणी मे लिखेंगे।

उदाहरण	प्रथम घात	दूसरी घात	दोनों घातों का गुणनफल
1	2^2	2^3	2^5
2	3^4	3^3	3^7
3	a^2	a^6	a^8

ऊपर की सारणी में आप क्या देखते हैं ?

हम निम्म निष्कर्ष पर पहुँचेंगे :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

यहाँ a एक धनात्मक पुर्णांकि है । m और n प्रत्येक एक एक गणन संख्या हैं।

1. खुद जाँच करके सत्यापन कीजिए :

   (क) $3^2 \times 3^3 = 3^5$ (ख) $4^2 \times 4^2 = 4^4$

2. प्रत्येक को एख घात में व्यक्त करो ।

   (क) $2^3 \times 2^5$ (ख) $p^3 \times p^4$ $5^2 \times 5^3$

आइए एक ही आधारवाली तीन घातों का गुणन करेंगे ।

$5^2 \times 5^3 \times 5^4 = (5^2 \times 5^3) \times 5^4$ (गुणन साहचर्य गुण)

$= 5^{2+3} \times 5^4$ (घातों का गुणन नियम)

$= 5^{2+3+4}$ (घातों का गुणन नियम)

$= 5^9$

बताइए :

$2^3 \times 3^2$ का मान ज्ञात करते समय आप घातकों का योगफल ज्ञात कर सकेंगे ? कारण दर्शाइए।

$a^m \times a^n \times a^p = (a^m \times a^n) \times a^p$ (गुणन साहचर्य गुण)

$= a^{m+n} \times a^p$ (घातों का गुणन नियम)

$= a^{m+n+p}$ (घातों का गुणन नियम)

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$$
यहाँ एक धनात्मक पूर्णांक है और m,n और p प्रत्येक एक-एक गणनसंख्या (प्राकृत संख्या) है ।

4.3.2. एक ही आधारवाली दो घातों का भाग

अब एक आधारवाली दो घातों को भाग देंगे, जहाँ भाज्य का घातांक भाजक के घातांक से बड़ा है :

प्रथम उदाहरण : $3^5 \div 3^3$

$$3^5 \div 3^3 = \frac{3^5}{3^3} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3} = 3^2 = 3^{5-3} \quad (\qquad 2 = 5-3)$$

$$\therefore 3^5 \div 3^3 = 3^{5-3}$$

द्वितीय उदाहरण : $5^4 \div 5^2 = \frac{5^4}{5^2} = \frac{5\times5\times5\times5}{5\times5} = 5^2 = 5^{4-2}$

$$\therefore 5^4 \div 5^2 = 5^{4-2}$$

तृतीय उदाहरण : $a^7 \div a^4$

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a\times a\times a\times a\times a\times a\times a}{a\times a\times a\times a} = a^3 = a^{7-4}$$

$$\frac{a^7}{a^4} = a^{7-4}$$

अब ऊपर दिए गए तीनों उदाहरणों पर चर्चा करेंगे ।

प्रथम उदाहरण : $3^5 \div 3^3 = 3^{5-3}$

द्वितीय उदाहरण : $5^4 \div 5^2 = 5^{4-2}$

तृतीय उदाहरण : $a^7 \div a^4 = a^{7-4}$

इन उदाहरणों से आपने क्या देखा ?

ध्यान दें, प्रत्येक उदाहरण में :

- भाज्य और भाजक, दोनों का आधार समान है । भागफल का आधार भी भाज्य या भाजक के आधार के साथ समान है ।
- भागफल का घातांक प्राप्त करने के लिए भाज्य के घातांक से भाजक के घातांक को घटाया गया है । सामान्य रूप से हम निम्न रूप से कह सकते हैं:

a एक धनात्मक पूर्णांक और तथा गणन संख्याएँ हैं (जहाँ m >)n तब $a^m \div a^n = a^{m-n}$

प्रत्येक को एक आधारवाली घातों में व्यक्त कीजिए।

(क) $2^9 \div 2^3$

(ख) $10^5 \div 10^3$

(ग) $9^{11} \div 9^7$

(घ) $20^{15} \div 20^7$

बताइए:
इस नियम की सहायता से 4^5 को 2^5 से क्या भाग दिया जा सकता है ?
(सूचना : पहले 4^5 को 2 आधारवाली घात में बदलिए)

4.3.2. एक घात की घात ज्ञात करना :

(i) $\left(2^3\right)^2$ को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

$\left(2^3\right)^2 = 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3}$ (घात का गुणन नियम)

अतएव, $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\times 2}$

(ii) वैसे $\left(3^2\right)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$= (3^2 \times 3^2) \times (3^2 \times 3^2)$ (गुणन का साहचर्य गुण)

$= 3^{2+2} \times 3^{2+2}$ (घात का गुणन नियम)

$= 3^{2+2+2+2}$ (घात का गुणन नियम)

$= 3^{2\times 4}$

(iii) वैसे a एक धनात्मक पूर्णांक हो तो $\left(a^3\right)^4$ का मान ज्ञात करेंगे ।

$\left(a^3\right)^4 = a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = (a^3 \times a^3) \times (a^3 \times a^3)$ (किस नियम का प्रयोग हुआ है ?)

$= a^{3+3} \times a^{3+3}$ (किस नियम का प्रयोग हुआ है ?)

$= a^{3+3+3+3}$ (किस नियम का प्रयोग हुआ है ?)

$= a^{3\times 4}$

ऊपर के उदाहरणों से हम निम्न निष्कर्ष पर पहुँचे :

> a एक धनात्मक पूर्णांक है । m और n प्रत्येक प्राकृत संख्या है तब $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
> इसे घात की घात का नियम कहते है :

✍ निम्न घातों के घात को एक घात में व्यक्त कीजिए :

(क) $\left(7^3\right)^6$ (ख) $\left(5^2\right)^3$ (ग) $\left(4^3\right)^5$

4.3.4 समान घातांकोंवाली घातों का गुणन

(i) $2^3 \times 3^3$ को एक घात में व्यक्त करेंगे :

$2^3 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 3)^3$

$\therefore 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3$

(ii) $4^4 \times 3^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$

$= (4 \times 3)^4$

$\therefore 4^4 \times 3^4 = (4 \times 3)^4$

(iii) उसी प्रकार a और b दोनों प्रत्येक यदि धनात्मक पूर्णांक हों तो

$$a^5 \times b^5 = a \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times b \times b$$
$$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$$
$$= (a \times b)^5$$

$\therefore\ a^5 \times b^5 = (a \times b)^5$

उपर्युक्त उदाहरणों से इस निम्न निष्कर्ष पर पहुँचे :

> a और b प्रत्येक एक-एक धनात्मक पूर्णांक हो तो :
> $a^m \times b^m = (ab)^m$ (m एक प्राकृत संख्या है)

निम्न समान घातांकवाली दोनों घातों के गुणनफल को एक घात में व्यक्त कीजिए :

(क) $5^2 \times 3^2$ (ख) $3^3 \times a^3$ (ग) $a^4 \times b^4$

(a और b प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक है)

उदाहरण :

$3^2 \times 5^2$ और $\left(5^2\right)^3$ में से कौन बड़ा है ?

हल :

पहली प्रणाली

$$3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2$$
$$= (15)^2 = 225$$
$$\left(5^2\right)^3 = 5^{2\times3}$$
$$= 5^6 = 15625$$

विकल्प प्रणाली

$3^2 \times 5^2 = 9 \times 25$ 25 9

$\left(5^2\right)^3 = (25)^3$

$= 25 \times 25 \times 25$

$= 25 \times (25 \times 25)$

$= 25 \times 625$ ଵ। 25 625

$\therefore\ 3^2 \times 5^2$ $\left(5^2\right)^3$

उदाहरण :

$\left[\left(2^2\right)^3 \times 3^6\right] \times 5^6$ को एक घात में व्यक्त कीजिए

हल : $\left[\left(2^2\right)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = \left[2^{2\times3} \times 3^6\right] \times 5^6$ (घात नियम से)

$= \left[2^6 \times 3^6\right] \times 5^6$

$= (2 \times 3)^6 \times 5^6$ (समान घातांक वाली घात में गुणन नियम)

$= 6^6 \times 5^6$

$= (6 \times 5)^6$ (समान घातांकवाली घात में गुणन नियम)

$= 30^6$

अभ्यास - 4.2

1. घातांकीय नियम का व्यवहार करके एक घातंकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(क) $2^3 \times 2^4 \times 2^5$ (ख) $6^{15} \div 6^{12}$ (ग) $a^3 \times a^7$

(घ) 7×7^2 (ङ) $5^2 \div 5^3$ (च) $2^5 \times 3^5$

(छ) $a^4 \times b^5$ (ज) $\left(3^4\right)^3 \times \left(2^6\right)^2$ (झ) $(2^{10} \div 2^8) \times 2^3$

2. हल कर घातांकीय रूप में लिखिए :

(क) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 3^3}$ (ख) $\dfrac{3 \times 7 \times 11^8}{21 \times 11^3}$

(ग) $\left[\left(5^2\right)^3 \times 5^4\right] \div 5^7$ (घ) $25^4 \div 5^3$

(ङ) $\dfrac{3^7}{3^4 \times 3^3}$ (च) $\dfrac{2^4 \times a^5}{4^2 \times a}$

(छ) $\left(2^3 \times 2\right)^2 \div 2^5$ (ज) $\left(\dfrac{a^5}{a^3}\right) \times a^8$

3. निम्न संख्याओं को अभाज्य संख्या आधारवाली एकाधिक घातांकीय के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

(क) 270 (ख) 768 (ग) 108×192 (घ) 729×64

4. सरल कीजिए :

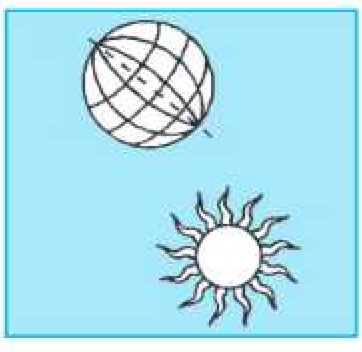
(क) $\left\{(4)^2\right\}^2$ (ख) $(6)^3 \div (6)$ (ग) $(2)^3 \times (3)^3 \div (6)^3$

(घ) $(5)^2 \times (5)^4 \div (5)^2$ (ङ) $\dfrac{(2^5) \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (च) $\dfrac{3^2 \times 10^5 \times 25}{5^3 \times 6^4}$

4.4. वैज्ञानिक पद्धति से संख्या लेखन :

विभिन्न क्षेत्रों में हम 65,000; 125,00,000; 35,00,000,00 आदि बड़ी-बड़ी संख्याओं को (अधिक अंकीय संख्या) का व्यवहार करते हैं। यहाँ तक कि हम कुछ तथ्यों को भी बड़ी-बड़ी संख्याओं से व्यक्त करते हैं।

जैसे :



- पृथ्वी से सूर्य की दूरी प्राय:149,600,000,000 कि.मीटर है ।
- प्रकाश की गति प्रति सेंकड़ प्राय: 300,000,000 मीटर है ।
- पृथ्वी का द्रव्यमान है प्राय: 5,976,000,000,000,000,000,000,000 कि.ग्रा.

ऐसी बड़ी-बड़ी संख्याओं को छोटे करके लिखने से हिसाब करना, याद रखना, विभिन्न क्षेत्रों में व्यवहार करना सुविधा होती है ।

आइए, देखें : वे कैसे संक्षिप्त रूप में लिखे जाते हैं :

अब बताइए, ऐसी बड़ी-बड़ी संख्याओं को पढ़ने में कोई सुविधा होती है क्या ? कारण बताइए:

निम्न अभिव्यक्तियों को ध्यान से देखिए:

$$48 = 4.8 \times 10 = 4.8 \times 10^1$$
$$480 = 4.8 \times 100 = 4.8 \times 10^2$$
$$4800 = 4.8 \times 1000 = 4.8 \times 10^3$$
$$48000 = 4.8 \times 10000 = 4.8 \times 10^4$$

बताइए:
48000000 को इस विधि से कैसे लिखा जाएगा ?

यहाँ संख्याओं को एक निश्चित प्रणाली से लिखा गया है । प्रत्येक संख्या को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया गया है ।

उन दोनों में से :

- पहली एक दशमलव संख्या है, जिसके दशमलव बिन्दु से पहले एक ही अंक है। अत: परिमाण-स्वरूप संख्या 1 या उससे बड़ी है, पर 10 से छोटी है ।
- दूसरी 10 आधारवाली एक घात है जिसका घातांक एक पूर्ण संख्या है ।

जैसे : $480 = 4.8 \times 10^2$

480 → संख्या; 4.8 → दशमलव संख्या; 10^2 → 10 आधार वाली घात

और एक उदाहरण लेंगे :

130,000,000 संख्या के निम्नलिखित प्रणाली से व्यक्त किया जा सकेगा

$$130,000,000 = 1.3 \times 100000000$$
$$= 1.3 \times 10^8$$

उपर्युक्त उदाहरणों से हमने देखा कि मूल संख्या को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया गया है । पहली संख्या है 1 या उससे बड़ी पर 10 से छोटी । एक दशमलव संख्या 1 । दुसरी संरख्या है 10 आधारवाली एक घात, जिसका घातांक एक पूर्ण संख्या है।

उपर्युक्त प्रणाली से व्यक्त संख्या रूप को **प्रामाणिक रूप यवा मानक रूप** और प्रणाली को **वैज्ञानिक प्रणाली** कहा जाता है।

हम एक संख्या का प्रामाणिक रूप कैसे प्राप्त करते हैं, उसे नीचे दर्शाया गया है ।

3768.2 को प्रामाणिक रूप से व्यक्त करेंगे ।

$$= \frac{3768.2}{1000} \times 1000$$
$$= 3.7682 \times 1000$$
$$= 3.7682 \times 10^3$$

(चूंकि संख्या का पहला भाग होना 3.7682 आवश्यक है; इसलिए 1000 से भाग दिया गया। चूंकि संख्या के मान में कोई परिवर्त्तन न हो; इसलिए उसे 1000 से भी गुणा कर दिया गया।)

हम 100,000 को कैसे प्रामाणिक रूप से व्यक्त करेंगे ?

$$1,00,000 = 1 \times 1,00,000$$
$$= 1.0 \times (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10) \; [\because 1 = 1.0]$$
$$= 1.0 \times 10^5$$

हम प्रामाणिक रूप से पहली संख्या को 1 या 1 और 10 के बीच की एक दशमलव संख्या के रूप में लिया जा सकता है ।

(द्रष्टव्य : 1 से बहुत छोटी एक धनात्मक दशमलव संख्या)

(जैसे : 0.0000345) को कैसे प्रामाणिक रूप से व्यक्त किया जा सकेगा, उसे बाद में जानेंगे।)

उदाहरण :

निम्न संख्याओं को प्रामाणिक रूप से दर्शाइए

(क) 65,950   5985.3

(ख) 34,30,000   783.14

हल :

(क) $65,950 = 6.595 \times 10000 = 6.5950 \times 10^4$

(ख) $34,30,000 = 3.43 \times 1000000$
$= 3.43 \times 10^6$

(ग) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(घ) $783.14 = 7.8314 \times 100$
$= 7.8314 \times 10^2$

अभ्यास 4.3

1. (क) प्रकाश की गति प्रति सेकंड 300,000,000 मी. है । इस गति को प्रामाणिक रूप से व्यक्त कीजिए।

   (ख) पृथ्वी से चन्द्रमा की औसतन दूरी प्राय: 384000,000 मीटर है । उस दुरी को प्रामाणिक रूप से व्यक्त कीजिए।

2. नीचे कुछ संख्याओं के प्रामाणिक रूप दिए गए हैं । संख्याओं को लिखिए :

   (क) 9.8×10^4 1.385×10^7

   (ख) 5.15×10^{10} 3.9×10^{11}

3. नीचे दी गई प्रत्येक उक्ति के लिए संख्या का प्रामाणिक रूप लिखिए :

   (क) पृथ्वी का व्यास प्राय: 1,27,56,000 मीटर है ।

   (ख) सूर्य का व्यास प्राय: 1,400, 000,000 मीटर है ।

   (ग) शनि ग्रह से सूर्य की दूरी प्राय: 1,433,500,000,000 मीटर है ।

   (घ) पृथ्वी में प्राय: 1,353,000,000 घन कि.मीटर समुद्र जल है ।

पंचम अध्याय

परिमेय संख्या

5.1. हमें जो ज्ञात है

हम पहले से प्राकृत संख्या (1, 2, 3, ...) और उनकी चारों गाणितिक संक्रियाओं (योग, घटाव, गुणा और भाग) से परिचित हुए हैं। `0' के साथ पूर्व संख्याओं (0, 1, 2, 3...) और उनकी चारों गाणितिक संक्रियाओं के बोर में भी परिचित हुए हैं । उसके साथ पूर्णांकों, ऋणात्मक पूर्णांकार, उनकी संक्रियोओं, उनके गुण धर्म के संबंध में जानते हैं। भिन्न संख्याओं से भी हम परिचित हुए हैं, जिनमें अंश और हर धनात्मक पूर्णांक है । इस अध्याय में हम संख्या-पद्धति पर विस्तार से अधिक चर्चा करेंगे ।

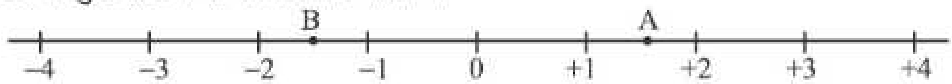
5.2. परिमेय संख्या की आवश्यकता :

मान लीजिए, आपकी गणित में 100 में से 45 अंक मिले हैं। इस 100 से 45 को संख्या का रूप में $\frac{45}{100}$ लिखा जाता है । $\frac{45}{100}$ आप जानते हैं कि यह एक भिन्न संख्या है । उसी प्रकार एक आदमी 100 रुपए की सब्जी खरीदकर उसे बेचा और उसे 38 रुपए हानि पहुँची । इसे हम कहते हैं 100 रुपए में 38 रुपए हानि है । इस क्षेत्र में हम कहते हैं हानि 38 रुपए या लाभ –38 रुपए हैं। 100 रुपए में –38 लाभ को हम लाभ $\frac{-38}{100}$ के रूप में लिखते हैं।

मान लीजिए, आपने पास की मिठाई के 8 भाग से 3 भाग हरि को दिया । तब हरि को कितने परिमाण की मिठाई मिली, उसे आप मिठाई का $\frac{3}{8}$ लिखते हो । 100 रुपए में खरीदकर बिना किसी लाभ या हानि से बेचने से हम कहते हैं 100 रुपए में लाभ या हानि 0 रुपया है । इस स्थिति को सूचित करने के लिए हम $\frac{0}{100}$ लिखते हैं ।

ध्यान दें : $\frac{45}{100}, \frac{38}{100}, \frac{3}{8}$ एक-एक भिन्न संख्या है ।

आइए, संख्या-रेखा पर कुछ संख्याओं को निरूपित करेंगे ।



संख्या-रेखा पर +1 और +2 के मध्यबिंदु को 'A' के रूप में सूचित किया गया है । 'A' बिंदु को सूचित करने वाली संख्या है $1\frac{1}{2}$ या $\frac{3}{2}$ ।

अब बताइए, '0' के बाईं ओर –1 और –2 के मध्यबिंदु को कौन-सी संख्या सूचित करेगी ? आप जरूर बताएँगे कि यह बिंदु $-1\frac{1}{2}$ को सूचित करता है ।

$-1\frac{1}{2}$ या $\frac{-3}{2}$ जैसी संख्याओं से हम पहले से परिचित नही हैं। यह परिमेय संख्या है ।

$\frac{45}{100}, \frac{3}{7}, \frac{0}{100}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}$ जैसी संख्याएँ एक-एक परिमेय संख्या है ।

अब नीचे दिए गए उदाहरण पर ध्यान दीजिए :

2 एक धनात्मक पूर्णांक है । इसका योज्य प्रतिलोम है ।

अब बताइए, 2 के साथ कितना जोड़ने से योगफल 0 होगा ?

उसी प्रकार +5 के साथ कितना जोड़ने से योगफल 0 होगा ?

+5 के साथ –5 को जोड़ने से योगफल 0 होगार ।

अब बताइए, $\frac{1}{2}$ के साथ कितना जोड़ने से योगफल 0 होगा ?

$\frac{2}{5}$ के साथ कितना जोड़नृे से योगफल 0 होगा ?

क्या आप जानते हैं?

किसी संख्या के साथ उसका योज्य प्रतिलोम जोड़ने से जोड़ '0' होता है।

आप जरूर कहेंगे कि किसी भिन्न संख्या के साथ उसके योज्य प्रतिलोम का योग करने से योगफल 0 होगा । अर्थात् प्रत्येक भिन्न का एक योज्य प्रतिलोम संख्या है ।

पूर्ण संख्या के साथ सभी ऋणात्मक पूर्णांक, भिन्न संख्या और उनके योज्य प्रतिलोम को लेकर बने समूह को परिमेय संख्या-परिवार कहते हैं।

जिस संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकेगा, उसे परिमेय संख्या कहते हैं। (जहाँ p और q दोनों **पूर्णांक हों और** q **का मान** 0 **न हो** ।)

$\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त परिमेय संख्या में p को अंश और q को हर कहा जाता है ।

उत्तर दीजिए :

(क) 3 परिमेय संख्याएँ लिखिए, जिनके अंश धनात्मक हों।

(ख) 3 परिमेय संख्याएँ लिखिए, जिनके अंश ऋणात्मक हों।

(ग) 3 परिमेय संख्याएँ लिखिए, जिनके अंश 0 हों।

(घ) 3 परिमेय संख्याएँ लिखिए, जिनके हर धनात्मक हों।

5.2.1 धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्या

$\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{9}{13}, \frac{3}{8}$ जैसी परिमेय संख्याओं के अंश और हर दोनों धनात्मक पूर्णांक है।

ऐसी संख्याओं को धनात्मक परिमेय संख्या कहा जाता है । जिस परिमेय संख्या के अंश और हर में से कोई एक ऋणात्मक हो, उसे ऋणात्मक परिमेय संख्या कहते हैं।

उदाहरण $\frac{-1}{3}, \frac{-4}{5}, \frac{3}{-7}, \frac{5}{-8}$ आदि

क्या आप जानते हैं ?

$\frac{0}{-3}$ एक परिमेय संख्या है । यह 0 के साथ समान है ।

$\frac{-3}{-5}$ भी एक परिमेय संख्या है ।

इसके अंश और हर दोनों ऋणात्मक पुर्णांक है ।

ध्यान दें : $\frac{-3}{-5} = \frac{(-3)\times(-1)}{(-5)\times(-1)} = \frac{3}{5}$

अर्थात् $\frac{-3}{-5}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है ।

अर्थात् जिस परिमेय संख्या के अंश और हर दोनों ऋणात्मक पूर्णांक हों, वह एक धनात्मक परिमेय संख्या होगी ।

0 एक परिमेय संख्या है, जो न धनात्मक है न ऋणात्मक ।

$$\frac{0}{7} = \frac{0}{-3} = \frac{0}{18} = 0$$

2,3,5 एक-एक पूर्णांक हैं । उन्हें हम $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}$ और $\frac{5}{1}$ के रूप में लिख सकेंगे ।

उन्हें ऐसे भी लिख सकेंगे ।

$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} =$ ....

$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} =$ ....

$-4 = \frac{-4}{1} = \frac{4}{-1} = \frac{-8}{2} = \frac{8}{-2} =$ ....

बताइए-
5 को उसी प्रकार हम कैसे लिख सकेंगे ?

हमने वहाँ देखा कि प्रत्येक पूर्णांक को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जिसमें p और q एक एक पूर्णांक है और $q \neq 0$ ।

अर्थात् प्रत्येक एक परिमेय संख्या है ।

क्या आप जानते हैं ?

$q \neq 0$ को q , 0 के साथ समान नही है, ऐसा पढ़ा जाता है ।

$\frac{1}{2}, \frac{1}{7}$ एक-एक भिन्न हैं । ये भिन्न क्यों परिमेय संख्या कहलाएँगे ?

किन्तु $3, \frac{-2}{3}, \frac{0}{2}, \frac{-5}{7}, \frac{3}{-8}$ लेकिन परिमेय संख्याएँ हैं, पर वे भिन्न नहीं हैं।

अर्थात् **प्रत्येक भिन्न एक परिमेय संख्या है, पर प्रत्येक परिमेय संख्या भिन्न नहीं हैं।**

✍ उत्तर दीजिए :

10 परिमेय संख्या लिखिए।

जैसे कि उनमें से 5 भिन्न और परिमेय संख्या होगी, अन्य पाँच सिर्फ परिमेय संख्याएँ होंगी, पर भिन्न संख्याएँ नहीं होंगी।

5.3 परिमेय संख्या का प्रामाणिक रूप (समतुल्य परिमेय संख्या)

परिमेय संख्याओं को ध्यान दीजिए।

$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{4}{7}, \frac{-9}{11}, \frac{-3}{13}$

ऊपर के प्रत्येक परिमेय संख्या के अंशों और हरों के उभयनिष्ठ गुणनखंड ज्ञात कीजिए। आपने क्या देखा ?

यहाँ परिमेय संख्याओं के अंश और हर के (उभयनिष्ठ) गुणनखंड । है, प्रत्येक का हर धनात्मक पुर्णांक है । सिर्फ अंशों में दोनों धनात्मक और ऋणात्मक पूर्णांक हैं । ये परिमेय संख्याएँ मानक रूप में व्यक्त की गई हैं।

कौन-कौन मानक रूप में हैं ?

$\frac{5}{12}, \frac{-5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{-45}{30}, \frac{12}{-19}, \frac{36}{-24}, \frac{28}{35}$

5.3.1 मानक रूप में न रहनेवाली परिमेय संख्याओं को मानक रूप में परिवर्त्तन

उदाहरण : $\frac{-45}{60}$ को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

हल :

प्रथम प्रणाली

$$\frac{-45}{60} = \frac{-45 \div 3}{60 \div 3} = \frac{-15}{20} = \frac{-15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{-3}{4}$$

अएतव

द्वितीय प्रणाली 45 और 60

कार महत्तम सार्व गुणनखंड - 15

$$\frac{-45}{60} = \frac{-45 \div 15}{60 \div 15} = \frac{-3}{4}$$

अब बताइए :

- दोनों प्रागालियों में क्या समान उत्तर आते हैं ?
- दोनों प्रणालियों में उत्तर ज्ञात करने में क्या-क्या भिन्नताएँ पाई जाती हैं ?

उदाहरण : निम्न परिमेय संख्याओं को मानक रूप में लिखिए :

(क) $\frac{48}{-36}$ (ख) $\frac{-21}{-35}$

हल :

(क) 48 और 36 का (महत्तम) सार्व गुणनखंड - 12

$\frac{48}{-36}$ का मानक रूप जानने के लिए हमें अंश और हर दोनों को (-12) से भाग देना होगा।

$$\therefore \frac{48}{-36} = \frac{48 \div (-12)}{-36 \div (-12)} = \frac{-4}{3}$$

(ग) 21 और 35 का (महत्तम) सार्व गुणनखंड - 7

$\frac{-21}{-35}$ को मानक रूप में व्यक्त करने के लिए इसके अंश और हर को (-7) से भाग देना होगा ।

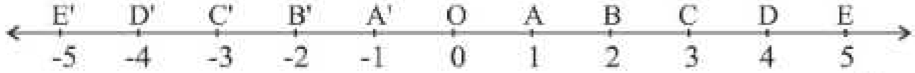
$$\frac{-21}{-35}=\frac{-21\div(-7)}{-35\div(-7)}=\frac{3}{5}$$

क्या आप जानते हैं ?

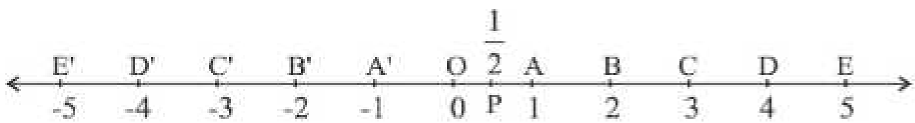
किसी परिमेय संख्या का मानक रूप जानने के लिए अंश और हर दोनों का उनके महत्तम सार्व गुणनखंड से भाग देना होगा । ऋणात्मक हर की स्थिति में अंश और हर दोनों को (महत्तम) सार्व गुणनखंड के ऋणात्मक रूप से भाग देना होगा ।

5.3.2. परिमेय संख्या को संख्या-रेखा पर व्यक्त करना

हम पहले से पूर्णांकों को संख्या-रेखा पर दर्शाना जानते हैं । अब परिमेय संख्या को कैसे स्थापित करेंगे, उस पर चर्चा करेंगे। संख्या-रेखा के 0 की ढाई ओर धनात्मक संख्या और बाईं ओर ऋणात्मक संख्या दर्शाई जाती है।



आइए, देखें, परिमेय संख्या को कैसे संख्या-रेखा पर स्थापित किया जाता है । मान लीजिए, हम $\frac{1}{2}$ को संख्या रेखा पर स्थापित करेंगे । इसके लिए पहले 0 और 1 के बीच की दूरी को दो बराबर भागों में बाँटेंगे । मान लें, उनका मध्यबिंदु है 'P' ।

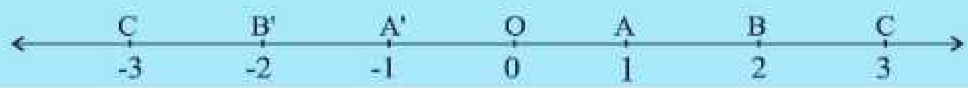


अतएव, $OP = PA = \frac{1}{2}$

अब हम $\frac{-1}{2}$ को संख्या-रेखा पर दर्शाएंगे । हम जानते हैं $\frac{1}{2}$ को $\frac{-1}{2}$ जोड़ने से योगफल 0 होता है ।

अर्थात् संख्या-रेखार पर 0 से $\frac{1}{2}$ की दूरी दाईं ओर जितनी है, 0 से $\frac{-1}{2}$ की दूरी बाईं ओर उतनी है ।

आप निम्न संख्या-रेखा पर $\frac{-1}{2}$ को दर्शाते भी कोशिश कीजिए :



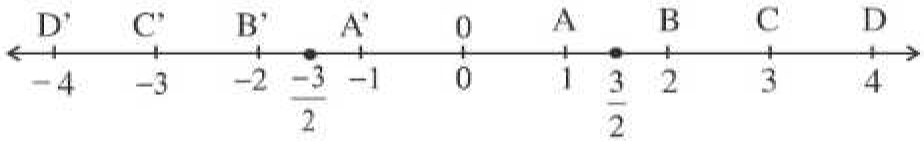
ध्यान दें : 0 से A' की दूरी । इकाई है 0 से बाई ओर रहने से A' की सूचक संरख्या -1 । 0 और A' का बीच का बिंदु है $\frac{-1}{2}$ ।

मान लें हम $\frac{3}{2}$ और $\frac{-3}{2}$ को संख्या रेखा पर दर्शाएँगे ।

पहले $\frac{3}{2}$ को मिश्र संख्या में परिणत कीजिए। $\frac{3}{2}$ को मिश्र संख्या में परिणत किये $1\frac{1}{2}$ होगा।

हमें अब पता चला कि यह संख्या 1 और 2 के बीच रहेगी । उसी प्रकार $\frac{-3}{2}$ संख्या -1 और -2 के बीच रहेगी। क्योंकि $\frac{3}{2}$ संख्या 0 के दाईं ओर गिननी दूरी पर है, $\frac{-3}{2}$ भी 0 के बाईं ओर उतनी दूरी पर है।

आकृति



उदाहरण :

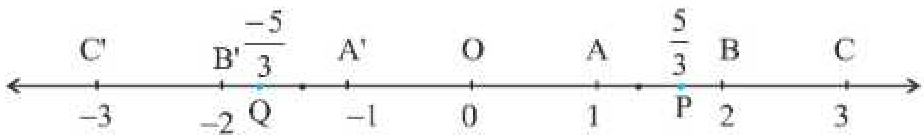
$\frac{5}{3}$ और $\frac{-5}{3}$ को संख्या-रेखा पर दर्शाइए।

हल :

सोपान - 1: $\frac{5}{3}$ एक विषमप भिन्न है $\frac{5}{3}$ । उसे मिश्र भिन्न में बदलने से $1\frac{2}{3}$ होगा ।

सोपान - 2: $1\frac{2}{3}$ का अर्थ है, 1 और 1 का दो तिहाई भाग यह 1 और 2 के बीच रहेगा ।

सोपान - 3: $\frac{5}{3}$ या $1\frac{2}{3}$ को संख्या-रेखा पर दर्शाने के लिए 1 और 2 के बीच की दूरी को 3 बराबर भाग करके उनमें से दो भाग लेना होगा ।



सोपान - 4: और के बीच की दूरी को 3 बराबर भाग किया गया । $-1\frac{2}{3}$ को P बिन्दु द्वारा सूचित किया गया ।

सोपान - 5: 0 से P की दूरी जितनी है, 0 ये बाईं ओर उनकी दूरी पर स्थित बिंदु है $-1\frac{2}{3}$ या $\frac{-5}{3}$। इसे Q बिन्दु द्वारा सूचित किया गया है ।

✍ आप संख्या रेखा खींचकर उसमें $\frac{7}{3}$ और $\frac{-7}{3}$ को दर्शाइए।

अभ्यास - 5.1

1. निम्न परिमेय संख्याओं में से धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याओं को छाँटिए।

$$\frac{5}{5},\quad \frac{2}{9},\quad \frac{3}{-5},\quad \frac{5}{12},\quad \frac{-3}{-17},\quad \frac{-25}{-6},\quad \frac{-13}{9},\quad \frac{-15}{28},\quad \frac{5}{-6}$$

2. निम्न परिमेय संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

(क) $\frac{-22}{55}$ (ख) $\frac{16}{-24}$ (ग) $\frac{77}{132}$ (घ) $\frac{64}{24}$ (ङ) $\frac{-27}{-15}$

3. $\frac{-55}{-27}$ को मानक रूप में व्यक्त करने के सोपानों को लिखिए ।

4. निम्न परिमेय संख्याओं को भिन्न-भिन्न संख्या रेखाओं पर दर्शाइए।

(क) $\frac{2}{3}$ (ख) $\frac{-4}{5}$ (ग) $\frac{-8}{3}$ (घ) $\frac{5}{2}$

5.4. परिमेय संख्याओं में चार मौलिक गाणितिक संक्रिया

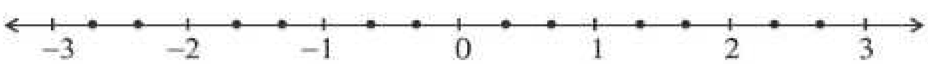
हम पहले से भिन्न संख्याओं के जोड़, घटाव, गुणा और भाग की संक्रिया से परिचित है । अब यहाँ परिमेय संख्याओं कार जोड़, घटाव, गुणा और भाग के पर चर्चा करेंगे :

5.4.1. परिमेय संख्याओं का जोड़ :

क्या आप जानते हैं ?

$1\frac{3}{3}$, $2\frac{6}{3}$ $3\frac{9}{3}$

- आइए, समान हरवाली दो परिमेय संख्याओं का जोड़ निकालेंगे ।
  बुइना $\frac{2}{3}$ और $\frac{-4}{3}$ को जोड़ना के लिए एक संख्या-रेखा खींची और उसपर संख्याओं को लिखा ।
- बुइना ने पहले जोड़ने को दी गई विषम भिन्नों के मिश्र भिन्न में बदल दिया । उसे मिली :
  $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ $\frac{-4}{3} = -1\frac{1}{3}$
- सने संख्या रेखा पर −2 से −1, −1 से 0, 0 से 1, 1 से 2, 2 से 3 को बीच के खानों को 3 बराबर भाग किए ।
  $-2\frac{2}{3} + \left(-1\frac{1}{3}\right) = \left(-1\frac{1}{3}\right) + 2\frac{2}{3}$



अब बताइए :

- −2 और −1 के बीच कितने छोटे हिस्से हैं, प्रत्येक छोटे भाग की लंबाई किस संख्या को सूचित करती है ?
- $-1\frac{1}{3}$ संख्या के किस ओर रहेगी ?
- $-1\frac{1}{3}$ किन दो पूर्णाकों के बीच है ?
- $-1\frac{1}{3}$ के साथ $2\frac{2}{3}$ को जोड़ने के लिए संख्या-रेखा की दाईं ओर बाईं में से किस दिशा में जाना होगा ?
- $-1\frac{1}{3}$ से $2\frac{2}{3}$ तक दाईं ओर आने पर हम कहाँ पहुँचेंगे ?
- अर्थात् दो संख्याओं का योगफल कितना मिला ?

✍ संख्या-रेखा खींचकर योगफल ज्ञात कीजिए :

(क) $\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}$ (ख) $\frac{3}{4}+\frac{-7}{4}$

समान हरवाली परिमेय संख्याओं का योगफल जानने का एक दूसरा उपाय भी है । उसे अब जानेंगे । आप निम्न उदाहरण को ध्यान से देखो :

उदाहरण : (क) $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{7}\right)$ (ख) $\frac{1}{-2}+\frac{3}{-2}$ (ग) $\frac{3}{-4}+\left(\frac{-1}{4}\right)$

हल : (क) $\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{7}\right)=\frac{3+(-6)}{7}=\frac{-3}{7}$

(ख) $\frac{1}{-2}+\frac{3}{-2}=\frac{1+3}{-2}=\frac{-4}{2}=-2$

(ग) $\frac{3}{4}+\left(\frac{-1}{4}\right)=\frac{3+(-1)}{4}=\frac{2}{4}$

क्या आप जानते हैं ?

दो समान हर वाली जोड़ने समय योगफल के हर को समान रेखा जाता है । दोनो अंशों के योगफल को अंश के रूप में लिया जाता है ।

✍ उत्तर ज्ञात कीजिए:

(क) $\frac{5}{7}+\left(\frac{-6}{7}\right)$ (ख) $-1\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$

अब असमान हर वाली परिमेय संख्याओं का जोड़ ज्ञात करेंगे :

दो परिमेय संख्याओं को जोड़ते समय पहले उन्हें समान हरवाली बनाई जाती है । उसके बाद नई परिमेय संख्या दोनों के अंश को जोड़ को अंश के रूप में और सामान्य हर को हर के रूप में लिया जाता है । जो नर्स परिमेय संख्या मिलेगी, वह उन दोनों का जोड़ है।

- दो धनात्मक परिमेय संख्याओं का जोड़

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{21}{35}+\frac{10}{35}=\frac{21+10}{35}=\frac{31}{35}$$

ध्यान दें, यहाँ $\frac{3}{5}$ का हर 5है $\frac{2}{7}$ का हर 7 है ।

5 और 7 का लघुतम समापवर्त्त 35 है। $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{7}$ अर्थात् और प्रत्येक को हरवाली भिन्न में बदल जाएगा ।

दूसरी प्रणाली : $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}$

सोपान -1 : 5 और 7 का लघुतम समापवर्त्त =35

सोपान -2 : 35 को योगपल की हर के रूप में लिखेंगे ।

सोपान -3 : हरों के लघुत्तम समापवर्त्य 35 को प्रथम परिमेय संख्या के हर से भाग देने से जो भागफल आता है । उसे उसी परिमेय संख्या में अंश के साथ गुणा करेंगे $(35\div 5)\times 3$ । यह योगफल के अंश का पहला भाग है ।

सोपान - 4 : हरो वे लघुत्तम समापवर्त्य (35) को दूसरी परिमेय संख्या के हर से भाग देने पर जो भागफल मिलता है उसे परिमेय संख्या के अंश के साथ गुणा करेंगे गुणनफल $(35 \div 7) \times 2$ होगा।

यह योगफल के अंश का दूसरा भाग है । हम दोनों अंशों का योगफल ज्ञात करेंगे । हम ऐसे लिख सकते हैं :

$$= \frac{3 \times 7 + 2 \times 5}{35}$$
$$= \frac{21+10}{35}$$
$$= \frac{31}{35}$$

यहाँ दो प्रणालियों से योगफल ज्ञात किया गया है, इन दोनों में क्या अंतर है ?

उदाहरण :

- एक धनात्मक परिमेय संख्या के साथ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या का जोड़ :

$$\frac{11}{2} + \left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{22}{4} + \left(\frac{-5}{4}\right) + \frac{22+(-5)}{4} = \frac{22-5}{4} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$$

उदाहरण :

- दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं का जोड़ :

$$\left(\frac{-8}{5}\right) + \left(\frac{-7}{11}\right) = \left(\frac{-88}{55}\right) + \left(\frac{-35}{55}\right) = \frac{(-88)+(-35)}{55} = \frac{-123}{55} = -2\frac{13}{55}$$

✍ योगफल ज्ञात कीजिए :

(क) $\frac{5}{3} + \frac{3}{5}$ (ख) $\left(\frac{-3}{7}\right) + \frac{2}{3}$ (ग) $\left(\frac{-5}{6}\right) + \left(\frac{-3}{11}\right)$

अभ्यास 5.2

1. निम्न परिमेय संख्याओं का जोड़ ज्ञात कीजिए :

(क) $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}$ (ख) $\frac{-3}{7}, \frac{5}{7}$ (ग) $\frac{5}{4}, \frac{-7}{4}$ (घ) $\frac{-17}{6}, \frac{-13}{6}$

2. मान ज्ञात कीजिए :

(क) $\frac{11}{2} + \frac{5}{4}$ (ख) $\frac{-3}{7} + \frac{7}{17}$ (ग) $\frac{5}{4} + \frac{-4}{3}$ (घ) $\frac{-1}{2} + \frac{-2}{7}$

3. x और y के निम्नलिखित मान के लिए सत्यापित कीजिए : $x+y=y+x$

(क) $x=\frac{5}{7}$, $y=\frac{-3}{2}$ (ख) $x=-8, y=\frac{9}{2}$

4. मान ज्ञात कीजिए:

(क) $\frac{-3}{10}+\frac{12}{-10}+\frac{14}{10}$ (ख) $\frac{-9}{11}+\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}$ (ग) $2+\frac{-1}{2}+\frac{-3}{4}$

5.4.2. परिमेय संख्याओं का घटाव :

रीता ने दो परिमेय संख्याएँ लीं । $\frac{5}{9}$ और $\frac{3}{11}$ ‘‘ $\frac{5}{9}$ से $\frac{3}{11}$ सोमेश ने पुछा से घयाने से वियोग-फल कितना होगा ?

रीता ने कैसे उत्तर ज्ञात किया, उसे ध्यान से देखिए :

$$\frac{5}{9}-\frac{3}{11}=\frac{55-27}{99}=\frac{28}{99}$$

सोमेश को मालूम था कि दो पूर्णांकों का घटाव करते समय घटाने की संक्रिया को नीचे जैसे लिखा गया है, वैसे लिखते हैं।

$$x-y=x+(-y)$$

उसने $\frac{5}{9}$ से $\frac{3}{11}$ को घटाने के लिए निम्न प्रणाली का सहारा लिया ।

$$\frac{5}{9}-\frac{3}{11}=\frac{5}{9}+\left(\frac{-3}{11}\right)=\frac{55+(-27)}{99}=\frac{28}{99}$$

दोनों संक्रियाओं से समान वियोग फल आया ।

✍ दोनों प्रणालियों से घटाओं क्या दोनो क्षेत्र में वियोग फल बराबर आता है ?

(क) $\frac{7}{8}-\frac{5}{11}$ (ख) $\frac{7}{11}-\frac{8}{5}$ (ग) $\frac{11}{2}-\frac{5}{4}$ $\frac{-3}{7}-\frac{7}{11}$

सीता ने एक धनात्मक परिमेय संख्या से ऋणात्मक संख्या को घटाया । उसने कैसे घटाया, ध्यान से देखिए:

$$\frac{5}{6}-(\frac{-2}{5})=\frac{5}{6}+\frac{2}{5}=\frac{25+12}{30}=\frac{37}{30}$$

रहीम ने एक ऋणात्मक परिमेय संख्या से दूसरी एक ऋणात्मक संख्या को घटाया ।

$$\left(-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{-3}{8}\right)=\left(\frac{-2}{5}\right)+\left(\frac{-3}{8}\right)$$
$$=\frac{-2}{5}+\frac{3}{8}$$
$$=\frac{-16}{40}+\frac{15}{40}$$
$$=\left(\frac{-1}{40}\right)$$

क्या आप जानते हैं ?

परिमेय संख्याओं को घटाव करते समय जिस संख्या को घटाया जाएगा, उसके योज्य प्रतिलोम को जोड़ने से आवश्यक उत्तर मिल जाता हैं।

अभ्यास - 5.3

1. पहली परिमेय संख्या से दूसरी परिमेय संख्या को घटाइए:

(क) $\frac{11}{2}, \frac{5}{4}$ (ख) $\frac{-3}{11}, \frac{7}{11}$ (ग) $\frac{5}{4}, \frac{-4}{3}$ (घ) $\frac{5}{42}, \left(\frac{-6}{21}\right)$

2. मान ज्ञात कीजिए:

(क) $\frac{6}{7}-\frac{-5}{7}$ (ख) $\frac{7}{24}-\frac{5}{36}$ (ग) $\frac{9}{10}-\frac{7}{-15}$ (घ) $\frac{8}{23}-\frac{5}{11}$

5.4.3. परिमेय संख्याओं का गुणा करना :

हमें भिन्न संख्याओं का गुणा करना ज्ञात है । आइए, उसे फिर से याद करेंगे :

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=$ कितना होगा ?

यह आप को कैसे पता चलेगा ?

हमने ध्यान से देखा :

दो भिन्नों का गुणनफल - $=\frac{\text{पहली भिन्न संख्या का अंश} \times \text{दूसरी भिन्न संख्या का अंश}}{\text{पहली भिन्न संख्या का हर} \times \text{दूसरी भिन्न संख्या का हर}}$

हम भिन्न के गुणा के इस नियम को परिमेय संख्या के गुणा में व्यवहार करेंगे ।

नीचे दिए गए प्रत्येक उदाहरण में दो परिमेय संख्याओं का गुणा किया गया है । उन्हें ध्यान से देखिए:

उदाहरण - 1

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{1\times3}{2\times4} = \frac{3}{8}$

उदाहरण - 2

$\frac{1}{4}\times\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1\times(-1)}{4\times3} = \frac{-1}{12}$

उदाहरण - 3

$\frac{-3}{5}\times\frac{2}{7} = \frac{(-3)\times2}{5\times7} = \frac{-6}{35}$

उदाहरण - 4

$\frac{-2}{5}\times\frac{-3}{11} = \frac{(-2)\times(-3)}{5\times11} = \frac{6}{55}$

अब ऊपर के उदाहरणों पर ध्यान देकर निम्न सारणी में खाली खाने भरो । एक उदाहरण का हल दिया गया है।

उदाहरण	प्रथम परिमेय संख्या	द्वितीय परिमेय संख्या	गुणनफल	प्रथम परिमेय संख्या किस प्रकार की है ?	द्वितीय परिमेय संख्या किस प्रकार की है ?	गुणनफल किस प्रकार की संख्या है ?
प्रथम	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	धनात्मक परिमेय संख्या	धनात्मक परिमेय संख्या	धनात्मक परिमेय संख्या
द्वितीय						
तृतीय						
चतुर्थ						

इस सारणी में आपने क्या देखा ?

प्रथम उदारण : दो धनात्मक परिमेय संख्याओं का गुणनफल एक धनात्मक परिमेय संख्या है ।

द्वितीय उदाहरण : एक धनात्मक और एक ऋणात्मक परिमेय संख्या का गुणनफल एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है ।

उसी प्रकार अन्य दो उदाहरणों में आपने क्या देखा ? लिखिए

गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(क) $\frac{-5}{8}\times\frac{-9}{7}$ (ख) $\frac{5}{7}\times\frac{-7}{5}$ (ग) $3\times\frac{-7}{8}$ (घ) $\left(\frac{-4}{7}\right)\times\left(\frac{-7}{4}\right)$

अभ्यास 5.4

1. निम्न परिमेय संख्याओं का गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(क) $\frac{7}{24}\times-16$ (ख) $\frac{-3}{5}\times2$ (ग) $\frac{-7}{6}\times(-24)$ (घ) $\frac{5}{7}\times(\frac{-2}{3})$

(ङ) $\frac{9}{8}\times\frac{32}{7}$ (च) $\frac{50}{7}\times\frac{14}{7}$ (छ) $\frac{4}{7}\times\frac{2}{7}$ (ज) $\frac{13}{15}\times\frac{25}{26}$

2. सरल कीजिए:

(क) $(\frac{-16}{15}\times\frac{20}{8})-(\frac{15}{5}\times\frac{35}{5})$ (ख) $(\frac{13}{8}\times\frac{12}{13})+(\frac{-4}{9}\times\frac{3}{2})$

3. सत्यापित कीजिए: $x\times y=y\times x$

(क) $x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{3}{5}$ $x=\frac{2}{7},\quad y=\frac{-11}{8}$ $x=\frac{3}{5},\quad y=\frac{2}{9}$

5.4.4. परिमेय संख्या का भाग

इसके पहले हम परिमेय संख्या के गुणा के संबंध पढ़ चुके हैं। आइए, फिर से उस पर चर्चा करेंगे ।

$\frac{3}{4}$ से किस संख्या के गुणा करने से गुणनफल 1 होगा ?

$\frac{3}{4}$ एक भिन्न संख्या है । इसका अंश 3 है हर 4 है ।

आप जरूर कहेंगे कि $\frac{3}{4}$ के अंश और हर को उलटा करके लिखने से (अंश को हर और हर को अंश के रूप में बदलकर) जो संख्या उपलब्ध होगी उसे $\frac{3}{4}$ के गुणा करने से गुणनफल 1 होगा ।

खाली जगहें भरिए :

$5\times\frac{1}{5}=$ ______	$\frac{-5}{8}\times$ ______ $=1$
$8\times$ ____ $=1$	$\frac{3}{-11}\times$ ______ $=1$
$\frac{4}{7}\times$ ____ $=1$	$\frac{7}{15}\times$ _____ $=1$

जानते हो ?

दो परिमेय संख्याओं का ऋृणा करने से यदि गुणनफल २ होता है । तब प्रत्येक को दुसरे का व्युतक्रम संख्या या गुणात्मक प्रतिलोम कहा जाता है ।

- नीचे दो भिन्न को भाग दिया गया है । ध्यान से देखिए

प्रथम सोपान - $=\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$ का व्युत्तक्रम

द्वितीय सोपान : $=\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}$

तृतीय सोपान : $=\frac{3\times2}{4\times1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

यहाँ ऊपर दी गई भाग संक्रिया को ध्यान में रखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

- किन किन भिन्नों को भाग दिया गया है ?
- भाग देने के प्रथम सोपान में क्या किया गया है ?
- भाग देने के द्वितीय सोपान में क्या किया गया है ?
- भाग देने के तृतीय सोपान में क्या किया गया है ?

इससे आपको ज्ञात हो गया होगा कि दो भिन्न को कैसे भाग दिया जाता है ।

एक भिन्न (भाज्य) को और एक भिन्न (भाजक) से भाग देने का अर्थ है भाज्य को भाजक के व्युतक्रम से गुणा करना। अब परिमेय संख्या को भाग देने की संक्रिया में इसका व्यवहार करेंगे ।

उदाहरण - 1

$$\frac{5}{8}\div\frac{7}{3}=\frac{5}{8}\times\left(\frac{7}{3}\text{ (का व्युतक्रम)}\right)$$
$$=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{5\times3}{8\times7}=\frac{15}{56}$$

उदाहरण - 2

$$\frac{1}{4}\div\left(\frac{-2}{5}\right)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{-2}{5}\text{(का व्युतक्रम)}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{5}{-2}=\frac{1\times5}{4\times(-2)}=\frac{5}{-8}=\frac{-5}{8}$$

जानते हो :

$\frac{-2}{5}$ और $\frac{2}{-5}$ दोनों बराबर है ।

उदाहरण - 3
$\left(\frac{-2}{3}\right) \div \left(\frac{4}{11}\right) = \frac{-2}{3} \times \left(\frac{4}{11} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$
$= \frac{-2}{3} \times \frac{11}{4} = \frac{-2 \times 11}{3 \times 4} = \frac{-22}{12} = \frac{-11}{6}$

उदाहरण - 4
$\left(\frac{-8}{5}\right) \div \left(\frac{-6}{7}\right) = \frac{-8}{5} \times \left(\frac{-6}{7} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$
$= \frac{-8}{5} \times \frac{-7}{6} = \frac{(-8) \times (-7)}{5 \times 6} = \frac{56}{30} = \frac{28}{15}$

दिए गए चार उदाहरणों को देखकर नीचे की सारणी भरिए :

	प्रथम उदाहरण	द्वितीय उदाहरण	तृतीय उदाहरण	चौथा उदाहरण
प्रथम परिमेय संख्या (भाज्य)	$\frac{5}{8}$			
द्वितीय परिमेय संख्या (भाजक)	$\frac{7}{3}$			
तृतीय परिमेय संख्या का व्युतक्रम	$\frac{3}{7}$			
प्रथम परिमेय संख्या के साथ द्वितीय परिमेय संख्या को व्युतक्रम का गुणनफल	$\frac{15}{56}$			
प्रथम परिमेय संख्या धनात्मक या ऋणात्मक ?	धनात्मक			
द्वितीय परिमेय संख्या धनात्मक या ऋणात्मक ?	धनात्मक			
भागफल परिमेय संख्या धनात्मक या ऋणात्मक ?	धनात्मक			

तथ्य भरी गई सारणी में आप क्या देखा ?

- किसी धनात्मक परिमेय संख्या को धनात्मक परिमेय संख्या से भाग देने से भागफल एक धनात्मक परिमेय संख्या होगी ।
- एक धनात्मक परिमेय संख्या को एक ऋणात्मक परिमेय संख्या से भाग देने से भागफल एक ऋणात्मक परिमेय संख्या होगी ।

✍ उसी प्रकार तृतीय और चतुर्थ उदाहरणों में आप क्या देख रहे हैं?

अभ्यास 5.5

1. निम्नलिखित संख्याओं के व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

(क) $\frac{5}{9}$ (ख) $\frac{-4}{3}$ (ग) -2 (घ) 8

(ङ) $1\frac{1}{2}$ (च) $\frac{11}{-12}$ (छ) $\frac{-2}{-19}$ (ज) $-2\frac{1}{7}$

2. भागफल ज्ञात कीजिए :

(क) $3 \div \frac{4}{5}$ (ख) $\frac{-3}{5} \div 2$ (ग) $\frac{-4}{7} \div 3$ (घ) $\frac{1}{5} \div \frac{6}{7}$

(ङ) $\frac{-1}{8} \div \frac{3}{4}$ (च) $\frac{-7}{6} \div \left(\frac{-2}{3}\right)$ (छ) $\frac{-5}{6} \div \left(\frac{-1}{4}\right)$ (ज) $\frac{-3}{13} \div \left(\frac{-4}{65}\right)$

5.5. धनात्मक परिमेय संख्या का दशमलव संख्या रूप

भिन्न को कैसे दशमलव संख्या में व्यक्त किया जाता है । उसके संबंध में हम पहले से परिचित हैं।

नीचे कुछ भिन्नों को दशमलव संख्याओं में व्यक्त किया गया है ।

$\frac{7}{10} = 0.7$ $\frac{17}{100} = 0.17$ $\frac{11}{10} = 1.1$

$\frac{123}{10} = 12.3$ $\frac{9}{1000} = 0.009$ $\frac{231}{1000} = 0.231$

क्या आप जानते हैं ?

किसी भी भिन्न का हर 10,100,1000 जैसी संख्याएँ हों तो उन्हें आसानी से दशमलव संख्या में व्यक्त किया जा सकता है ।

निम्न उदाहरणों को ध्यान से देखिए :

उदाहरण :

(क) $\frac{1}{2} = \frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10} = 0.5$

(ख) $\frac{3}{4} = \frac{3\times25}{4\times25} = \frac{75}{100} = 0.75$

(ग) $\frac{3}{25} = \frac{3\times4}{25\times4} = \frac{12}{100} = 0.12$

(घ) $\frac{3}{125} = \frac{3\times8}{125\times8} = \frac{24}{1000} = 0.024$

बताइए:

इन उदाहरणों में भिन्नों को दशमलव संख्या में परिवर्त्तन करने के लिए कौन-सा उपाय प्रयुक्त हुआ है ? ऐसा करने का क्या कारण हो सकता है ?

प्रत्येक उदाहरण में भिन्न के हर को 10,100,1000 जैसी (10 आधारवाली पात) संख्या में परिवर्त्तन करके दशमलव संख्या में व्यक्त किया गया है । याद कीजिए, एक परिमेय संख्या के हर के गुणनखंडों में 2 और 5 के अलावा दूसरा कोई गुणनखंड न होने पर भी परिमेय संख्या को दशमलव संख्या में व्यक्त किया जा सकता है ।

निम्नलिखित धनात्मक परिमेय संख्याओं को दशमलव संख्याओं व्यक्त कीजिए :

(क) $\frac{7}{8}$ (ख) $\frac{23}{125}$ (ग) $\frac{3}{16}$ (घ) $\frac{59}{200}$ (ङ) $\frac{24}{25}$

5.5.1. भाग की संक्रिया से परिमेय संख्या को दशमलव संख्या में व्यक्त करना :

प्रत्येक परिमेय संख्या को भाग की संक्रिया से दशमलव संख्या में व्यक्त किया जा सकेगा ।

उदाहरण :

$\frac{3}{4}$ को दशमलव संख्या में व्यक्त कीजिए :

हल : प्रथम प्रणाली (भिन्न के हर को पात में बदलकर)

$$\frac{3}{8}=\frac{3\times125}{8\times125}=\frac{375}{1000}=0.375$$

द्वितीय प्रणाली (भाग की संक्रिया द्वारा)

$$\begin{array}{r|l} & .375 \\ \hline 8 & 30 \\ & 24 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\therefore\ \frac{3}{8}=0.375$$

उदाहरण :

भाग-संक्रिया द्वारा $\frac{16}{5}$ को दशमलव संख्या में व्यक्त कीजिए :

हल :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3.2 \\
\hline
5 & 16 \\
 & 15 \\
\hline
 & 10 \\
 & 10 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore \frac{16}{5} = 3.2$

ऊपर जिन उदाहरणों की चर्चा की गई, उनमें भागफल ससीम दशमलव संख्या प्राप्त हुई । इन्हें ससीम दशमलव संख्या कहा जाता है क्योंकि भाग-संक्रिया में भागफल कुछ अंकों में सीमित रहता है । अंत में शेषफल 0 रहता है।

अब आप नीचे के उदाहरण पर ध्यान दीजिए :

उदाहरण :

(क) $\frac{1}{3}$ को दशमलव संख्या में व्यक्त कीजिए :

हल :

$$
\begin{array}{r|l}
 & .3333 \\
\hline
3 & 10 \\
 & 9 \\
\hline
 & 10 \\
 & 9 \\
\hline
 & 10 \\
 & 9 \\
\hline
 & 10 \\
 & 9 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

यहाँ आप क्या देख रहे हैं ?

इस भाग-संक्रिया में भागफल में 3 बारबार आता है। शेषफल कभी भी 0 नहीं होता । इसलिए इस भाग-संक्रिया का कोई अंत नहीं है ।

$\frac{1}{3} = 0.333...$ (यहाँ 3 का कोई अंत नहीं है ।

इस दशमलव संख्या को संक्षेप में $0.\overline{3}$ के रूप में लिखा जाता है । (इसे पौन:पुनिक दशमलव तीन के रूप में पढ़ा जाता है ।)

$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ ।

(ख) $\frac{6}{11}$ को दशमलव संख्या में व्यक्त कीजिए ।

```
        .545454...
   11 ) 60
        55
        ---
         50
         44
         ---
          60
          55
          ---
           50
           44
           ---
            60
            55
            ---
             50
             44
             ---
              6
```

> **जानते हो :**
> यहाँ भागफल में 5 और 4 की पुनरावृत्ति हो रही है । इसलिए यहाँ भागफल को $.\overline{54}$ के रुप में लिखा जाएगा ।

यहाँ भाग की संक्रिया में हर बार, शेषफल क्रम से 5 और 6 आता है । हम कितनी भी बार भाग क्यों न दे, भागफल में 5 और 4 क्रम से आएँगे।

$\therefore \frac{6}{11} = 0.545454... = 0.\overline{54}$ (यहाँ 5 और 4 की पुनरावृत्ति हो रही है ।)

(ग) $\frac{25}{12}$ के दशमलव संख्या में व्यक्त कीजिए।

```
        2.08333...
   12 ) 25
        24
        ---
        100
         96
         ---
          40
          36
          ---
           40
           36
           ---
            4
```

> **बताइए**
> यहाँ $\frac{25}{12}$ को दशमलव संख्या में कैसे लिखा जाएगा ? ऐसे लिखने का कारण क्या है ?

ऊपर के उदाहरणो में जिन दशमलव संख्याओं की चर्चा की गई उन्हें असीम पौन:पुनिक दशमलव संख्या कहते हैं।

क्या आप जानते हैं?

- किसी परिमेय संख्या के हर के अभाज्य गुणनखंड में 2 या 5 के अलावा कोई दूसरा गुणनखंड न होने की स्थिति में वह परिमेय संख्या ससीम दशमलव संख्या में व्यक्त हो सकता है ।
  जैसे : $\frac{4}{5}, \frac{3}{8}, \frac{7}{25}$ आदि।
- यदि किसी परिमेय संख्या का हर 2 और 5 के अलावा दूसरी कोई अभाज्य संख्या या उनका अपवर्त्य होता है तब उसे दशमलव संख्या में व्यक्त करते समय यह असीम पौन:पुनिक दशमलव संख्या होगी।
  जैसे: $\frac{1}{3}, \frac{6}{11}, \frac{73}{7}, \frac{2}{15}$ आदि ।

5.5.2 ऋणात्मक परिमेय संख्या का दशमलव संख्या रूप :

नीचे दिए गए उदाहरणों पर ध्यान दें:

उदाहरण - 1 $\frac{-4}{5}=\frac{-4\times2}{5\times2}=\frac{-8}{10}=-\left(\frac{8}{10}\right)=-0.8$

उदाहरण - 2 $\frac{-19}{4}=\frac{-19\times25}{4\times25}=\frac{-475}{100}=-\left(\frac{475}{100}\right)=-4.75$

उदाहरण - 3 $\frac{-1}{3}=-\left(\frac{1}{3}\right)=-(0.333....)=-0.\bar{3}$

याद रखिए: $-\frac{p}{q}$ का दशमलव रूप $= -($ $\frac{p}{q}$ का दशमलव रूप$)$

अभ्यास 5.6

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के हर को 10 की घात में बदलकर दशमलव संख्या में व्यक्त कीजिए।

(क) $\frac{2}{5}$ (ख) $\frac{21}{20}$ (ग) $\frac{-5}{4}$ (घ) $\frac{-16}{25}$

2. निम्न परिमेय संख्याओं को भाग की संक्रिया द्वारा दशमलव संख्या में व्यक्त कीजिए :

(क) $\frac{3}{5}$ (ख) $\frac{7}{8}$ (ग) $\frac{9}{16}$ (घ) $\frac{10}{3}$

(ङ) $\frac{-11}{5}$ (च) $\frac{5}{11}$ (छ) $\frac{2}{15}$ (छ) $\frac{-2}{15}$

3. भाग की संक्रिया न करके निम्न परिमेय संख्याओं में से कौन-कौन से ससीम दशमलव संख्याएँ और कौन-कौन से असीम दशमलव संख्याएँ हैं, लिखिए । अपने उत्तर के पक्ष में करण दर्शाइए ।

(क) $\frac{9}{4}$ (ख) $\frac{17}{40}$ (ग) $\frac{15}{11}$ (घ) $\frac{22}{7}$

(ङ) $\frac{29}{250}$ (च) $\frac{37}{21}$ (छ) $\frac{49}{14}$ (छ) $\frac{126}{45}$

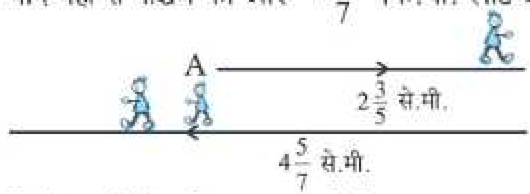
4. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ को दशमलव संख्या में व्यक्त करके बताइए कि यह ससीम है या असीम ?

5. $\frac{11}{135}$ परिमेय संख्या का दशमलव रूप ससीम होगा या असीम ? भाग-संक्रिया के बिना कैसे पता चलेगा, लिखिए।

5.6 परिमेय संख्याओं में गाणितिक संक्रिया का प्रयोग :

उदाहरण - 1

प्रकाश A से $2\frac{3}{5}$ कि.मी. पूर्व की ओर पैदल जाने के बाद वहाँ से पश्चिम की ओर $4\frac{5}{7}$ कि.मी. लौट आया। तब वह A से कितनी दूरी पर और किस दिशा में है ?



हल :

मान लीजिए कि पूर्व दिशा में दूरी धनात्मक है। तब पश्चिम की ओर जाने से दूरी ऋणात्मक होगी।

तब प्रकाश के जाने की दूरी $= 2\frac{3}{5} + \left(-4\frac{5}{7}\right) = \frac{13}{5} + \left(\frac{-33}{7}\right) = \frac{13\times7+(-33)\times5}{5\times7}$

$= \frac{91+(-165)}{35} = \frac{-74}{35} = -2\frac{4}{35}$

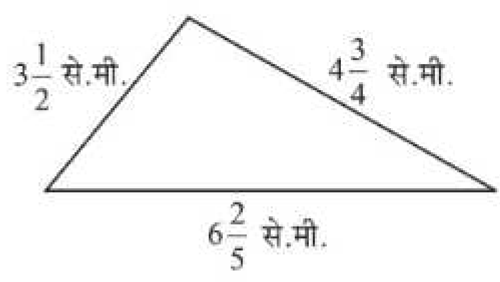
दूरी ऋणात्मक संख्या हुई। इसलिए प्रकाश A से पश्चिम दिशा में $2\frac{4}{35}$ कि.मी. दूरी पर है।

उदाहरण - 2

एक त्रिभुज की तीन भुजाओं की लंबाई क्रमशः $4\frac{3}{4}$ से.मी., $3\frac{1}{2}$ से.मी. और $6\frac{2}{5}$ से.मी. है। इसका परिमाप कितना होगा ?

हल :

त्रिभुज का परिमाप $= 4\frac{3}{4}$ से.मी. + $3\frac{1}{2}$ से.मी. + $6\frac{2}{5}$ से.मी.



$= \left(\frac{19}{4} + \frac{7}{2} + \frac{32}{5}\right)$ से.मी.

$= \left(\frac{19\times5 + 7\times10 + 32\times4}{20}\right)$ से.मी.

$= \left(\frac{95+70+128}{20}\right) = \frac{293}{20}$ से.मी.

$= 14\frac{13}{20}$ से.मी.

> **क्या आप जानते हैं ?**
> त्रिभुज का परिमाप इसको तीनों भुजाओं का योगफल है।

$\therefore$ त्रिभुज का परिमाप $14\frac{13}{20}$ से.मी.।

उदाहरण - 3

एक आयत की लंबाई और चौड़ाई क्रमश: $41\frac{2}{3}$ मी. और $18\frac{3}{5}$ मीटर । इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

आयत की लंबाई $= 41\frac{2}{3}$ मी. $= \frac{125}{3}$ मी.

आयत की लंबाई $= 18\frac{3}{5}$ मी. $= \frac{93}{5}$ मी.

$\therefore$ आयत का क्षेत्रफल - लंबाई × चौड़ाई

$$= \left(\frac{125}{3} \times \frac{93}{5}\right) \text{ वर्ग मीटर}$$

$$= \left(\frac{25}{1} \times \frac{31}{1}\right) \text{ वर्ग मीटर}$$

$$= 775 \text{ वर्ग मीटर}$$

बताइए

इस आयत की लम्बाई; को आधा और चौड़ाई की दुगुना करने से वह जो नया आयत होगा उसके क्षेत्रफल और मूल आयत के क्षेत्रफल का अनुपात क्या होगा ?

$\therefore$ आयत का क्षेत्रश्रफल 775 वर्ग मीटर होगा ।

उदाहरण - 4

दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल $\frac{-8}{65}$ है । एक संख्या $\frac{5}{26}$ हो तो दूसरी संख्या कितनी है ?

हल :

परिमेय संख्या दोनों का गुणनफल $= \frac{-8}{65}$

एक संख्या $= \frac{5}{26}$

$\therefore$ दूसरी संख्या $= \frac{-8}{65} \div \frac{5}{26}$

$$= \frac{-8}{\cancel{65}_{5}} \times \frac{\cancel{26}^{2}}{5}$$

$$= \frac{-16}{25}$$

क्या आप जानते हैं ?

अगर a और b दो संख्याएँ हैं तब

$a \times b = ab$

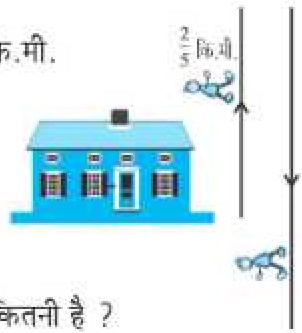
$ab \div a = b$

$ab \div b = a$

अभ्यास 5.7

1. एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमश: $2\frac{1}{3}$ से.मी., $3\frac{1}{2}$ से.मी., और $4\frac{2}{5}$ से.मी. है । त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।

2. कमल बाबू अपने घर से $\frac{2}{5}$ किमी. उत्तर दिशा को ओरजाने के बाद $1\frac{3}{4}$ कि.मी. दक्षिण दिशा को ओर गए । तब व अपने घर में किस दिशा में कितनी दूरी पर हैं ?



3. दो परिमेय संख्याओं का जोड़ -9 है । उनमें से एक $\frac{15}{8}$ होने पर दूसरी संख्या कितनी है ?

4. मेरी रोज $5\frac{2}{3}$ घंटे पढ़ती है । यदि वह $2\frac{4}{5}$ घंटे गणित और विज्ञान पढ़ती है । तब वह दूसरे विषय कितने समय तक पढ़ती है ?

5. $9\frac{4}{3}$ और $5\frac{5}{6}$ के जोड़ तथा $11\frac{2}{5}$ और $7\frac{1}{3}$ के जोड़ में अंतर कितना है ?

6. एक वर्गाकार मैदान की एक भुजा की लम्बाई $5\frac{3}{4}$ मी. तो मैदान का क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात कीजिए। इस मैदान के चारों ओर बाड़ लगाने के लिए प्रति मीटर 8 रुपए के हिसाब से कितना खर्च होगा ?

7. किस संख्या को $\frac{-8}{5}$ से गुणा करने से गुणनफल 36 होगा ?

8. दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल $\frac{-16}{9}$ है । उनमें से एक $\frac{-4}{3}$ हो तो दूसरी संख्या कितनी है ?

5.7. परिमाप संख्या का परम मान

हमें पहले से पूर्णांक का परम मान ज्ञात करने के संबंध में ज्ञात है ।

3 का परममान $= |3| = 3$

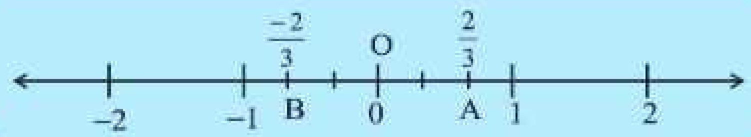
7 का परममान $= |7| = 7$

-6 का परममान $= |-6| = 6$

-15 का परममान $= |-15| = 15$

> **क्या आप जानते हैं ?**
> यदि एक पूर्णांक तब इसके परम मान को के रूप में लिखा जाता है और इस का परममान पढ़ा जाता है ।

उसी प्रकार परिमेय संख्या का भी परममान है । संख्या रेखा पर ० से $\frac{+2}{3}$ सूचक बिन्दु की दूरी $\frac{2}{3}$ और ० से $\frac{-2}{3}$ सूचक बिन्दु की दूरी भी $\frac{2}{3}$ है । अतएव, $\frac{+2}{3}$ और $\frac{-2}{3}$ दोनों के साथ $\frac{2}{3}$ संबंधित है ।



$\therefore$ O मूल बिन्दु को संख्या-रेखा पर 0 शून्य के रूप में लिया जाता है ।

अब ऊपर की संख्या रेखा में O और A के बीच दूरी $\frac{2}{3}$ इकाई है तथा O, B के बीच $\frac{-2}{3}$ दूरी की

$\therefore$ $\frac{-2}{3}$ का परममान $=\left|\frac{-2}{3}\right|=-\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ का परममान $=\left|\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$

आप परिमेय संख्या का परममान का अर्थ क्या समझते हैं?

- अगर x एक धनात्मक परिमेय संख्या होती है, तब $|x|=x$ होगा ।
- अगर x एक ऋणात्मक संज्ञा होगी तब $|x|=x$ होगा ।

क्या आप जानते हैं?

x धनात्मक हो तो, $|x|$ धनात्मक है

x ऋणात्मक हो तो $|x|$ धनात्मक है

$x=0$ हो तो $|x|=0$

उदाहरण :

प्रमाण कीजिए

(क) अगर $x=\frac{3}{5}$ $y=\frac{-4}{3}$, तब $|x+y|<(|x|+|y|)$

(ख) अगर $x=\frac{4}{7}$ $y=\frac{5}{3}$, तब $|x+y|=|x|+|y|$

(ग) अगर $x=\frac{-2}{5}$, $y=\frac{-3}{2}$, तब $|x+y|=|x|+|y|$

हल

(क) $x=\frac{3}{5}$ $y=\frac{-4}{3}$

बायाँ पक्ष $|x+y|=\left|\frac{3}{5}+\left(\frac{-4}{3}\right)\right|$

$=\left|\frac{9+(-20)}{15}\right|$

$=\left|\frac{(-11)}{15}\right|$

$=\frac{11}{15}$

दायाँ पक्ष $=|x|+|y|$

$=\left|\frac{3}{5}\right|+\left|\frac{-4}{3}\right|$

$=\frac{3}{5}+\frac{4}{3}$

$=\frac{9+20}{15}$

$=\frac{29}{15}$

$\therefore$ बायाँ पक्ष < दायाँ पक्ष

अर्थात् $|x+y| < (|x|+|y|)$ (प्रमाणित)

(ख) $x = \frac{4}{7}$ $y = \frac{5}{3}$

बायाँ पक्ष $= |x+y| = \left|\frac{4}{7}+\frac{5}{3}\right| = \left|\frac{12+35}{21}\right| = \left|\frac{47}{21}\right| = \frac{47}{21}$

दायाँ पक्ष $= |x|+|y| = \left|\frac{4}{7}\right|+\left|\frac{5}{3}\right| = \frac{4}{7}+\frac{5}{3} = \frac{12+35}{21} = \frac{47}{21}$

बताइए,

क्या $|x-y| = |x| - |y|$ होगा ?

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अर्थात् $|x+y| = (|x|+|y|)$ (प्रमाणित)

(ग) $x = \frac{-2}{5}$ $y = \frac{-3}{2}$

बायाँ पक्ष $= |x+y| = \left|\frac{-2}{5}+\left(\frac{-3}{2}\right)\right|$

$= \left|\frac{(-4)+(-15)}{10}\right|$

$= \left|\frac{-19}{10}\right|$

$= \frac{19}{10}$

दायाँ पक्ष $= |x|+|y| = \left|\frac{-2}{5}\right|+\left|\frac{-3}{2}\right|$

$= \frac{2}{5}+\frac{3}{2}$

$= \frac{4+15}{10}$

$= \frac{19}{10}$

अर्थात् $|x+y| = |x|+|y|$ (प्रमाणित)

उदाहरण

अगर $x = \frac{-3}{5}$ $y = \frac{-2}{7}$

सत्यापित कीजिए $|x \times y| = |x| \times |y|$

हल :

बायाँ पक्ष $= |x \times y| = \left|\frac{-3}{5} \times \frac{-2}{7}\right|$

$= \left|\frac{(-3)\times(-2)}{5\times 7}\right|$

$= \left|\frac{6}{35}\right| = \frac{6}{35}$

क्या आप जानते हैं ?

x धनात्मक या ऋणात्मक हो

तथा y धनात्मक या ऋणात्मक हो

$|x \times y| = |x| \times |y|$

दायाँ पक्ष $= |x| \times |y| = \left|\frac{-3}{5}\right| \times \left|\frac{-2}{7}\right|$

$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7}$

$= \frac{6}{35}$

यहाँ बायाँ पक्ष - दायाँ पक्ष

अर्थात् $|x \times y| = |x| \times |y|$ (सत्यापित)

अभ्यास 5.8

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं का परममान ज्ञात कीजिए।

   $\frac{1}{-5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{-3}{-2}$ $\frac{-26}{21}$

2. x के निम्न मानों को लेकर सत्यापित कीजिए कि $|x| = |-x|$

   4   -9 $\frac{-3}{7}$ $\frac{3}{-8}$

3. x और y के निम्न मानों को लेकर सत्यापित कीजिए कि $|x + y| = |x| + |y|$

   $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{5}$ $x = \frac{-3}{4}, y = \frac{-3}{2}$

4. x और y के निम्न मानों को लेकर सत्यापित कीजिए कि $|x + y| < (|x| + |y|)$

   $x = -8,\ y = 5$ $x = \frac{4}{3}, y \frac{-7}{9}$

5. x और y के निम्न मानों को लेकर सत्यापित कीजिए कि $|x \times y| = |x| \times |y|$

   $x = \frac{-4}{5}$, $y = \frac{2}{3}$ $x = \frac{-5}{11}$, $y = \frac{-3}{7}$

5.8 दो परिमेय संख्याओं के मध्य एक परिमय संख्या ज्ञात करना

ज्ञात है कि

सलीम को 2 और 7 के बीच 7 प्राकृत संख्याएँ हैं । वे हैं –3, 4, 5, 6, 7, 8 और 9 । उसी प्रकार अबदुल भी जानता है कि -4 और 4 के बीच 7 पूर्णांक है । वे हैं -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3। दो पूर्णांकों के बीच एक निश्चिति संख्यक पूर्णांक है ।

अब देखेंगे, दो परिमेय संख्याओं के मध्य कितनी परिमेय संख्या होती हैं?

लीना ने दो परिमेय संख्याएँ $\frac{-2}{3}$ और $\frac{-3}{7}$ लेकर उन दोनों को समान हरवाली परिमेय संख्याओं में बदलकर ऐसे लिखा :

$$\frac{-2}{3}=\frac{-2\times7}{3\times7}=\frac{-14}{21} \quad व \quad \frac{-3}{7}=\frac{-3\times3}{7\times3}=\frac{-9}{21}$$

हमे ज्ञात है

$$\frac{-14}{21}<\frac{-13}{21}<\frac{-12}{21}<\frac{-11}{21}<\frac{-10}{21}<\frac{-9}{21}$$

अथवा $$\frac{-2}{3}<\frac{-13}{21}<\frac{-12}{21}<\frac{-11}{21}<\frac{-10}{21}<\frac{-3}{7}$$

बताइए
-1 और 1 के बीच कितने पूर्णांक हैं ? -2 और -3 के बीच कितने पूर्णांक है ?

अर्थात् $\frac{-2}{3}$ $\frac{-3}{7}$ परिमेय संख्याएँ हैं।

फिर अबदुल ने $\frac{-2}{3}$ और $\frac{-3}{7}$ संख्याओं को समान हरवाली करने के लिए ऐसा किया । उसने दोनों परिमेय संख्याओं को 42 हरवाली संख्याओं में बदल दिया ।

$$\frac{-2}{3}=\frac{-2\times14}{3\times14}=\frac{-28}{42} \quad \text{और} \quad \frac{-3}{7}=\frac{-3\times6}{7\times6}=\frac{-18}{42}$$

उसने $\frac{-28}{42}$ और $\frac{-18}{42}$ के बीच की परिमेय संख्याओं को जानने के लिए ऐसा लिखा ।

$$\frac{-28}{42}<\frac{-27}{42}<\frac{-26}{42}<\frac{-25}{42}<\frac{-24}{42}<\frac{-23}{42}<\frac{-22}{42}<\frac{-21}{42}<\frac{-20}{42}<\frac{-19}{42}<\frac{-18}{42}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}<\frac{-9}{14}<\frac{-13}{21}<\frac{-25}{42}<\frac{-4}{7}<\frac{-23}{42}<\frac{-11}{21}<\frac{-1}{2}<\frac{-10}{21}<\frac{-19}{42}<\frac{-3}{7}$$

लीना ने $\frac{-2}{3}$ और $\frac{-3}{7}$ के बीच 4 परिमेय संख्याएँ ज्ञात करते समय अबदुल ने 9 परिमेय संख्याओं को ज्ञात किया । अतएव, हम दो परिमेय संख्याओं के मध्य अनिश्चित संरख्यक परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकेंगे।

उत्तर लिखिए :

(क) $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{5}$ के मध्य 5 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

(ख) $\frac{2}{7}$ और $\frac{-1}{7}$ के मध्य उपरिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

उदाहरण :

2 और 3 के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल :

पहले 2 और 3 को समान हरवाली संख्याओं में बदल देंगे । हम 2 और 3 को 4 हरवाली संख्याओं में बदल देंगे ।

$$2 = \frac{8}{4}$$

$$3 = \frac{12}{4}$$

$$\frac{8}{4} < \frac{9}{4} < \frac{10}{4} < \frac{11}{4} < \frac{12}{4}$$

$$\Rightarrow 2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < \frac{11}{4} < 3$$

> **क्या आप जानते हैं?**
> $\Rightarrow$ निशान का अर्थ है।
> यह सूचित करता है।

अर्थात् 2 और 3 के मध्य तीन परिमेय संख्याएँ हैं। $\frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}$

इस प्रकार हम 2 और 3 के मध्य असंख्य परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं ।

अभ्यास 5.9

1. 3 और 4 के मध्य 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

2. -1 और 1 के मध्य 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

3. $\frac{-2}{5}$ और $\frac{2}{5}$ के मध्य 4 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

4. $\frac{-1}{2}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य 3 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

षष्ठ अध्याय

बीजगणीत

6.1. हमें जो ज्ञात है :

छठी कक्षा में हम चर, बीजीय व्यंजक, बीजीय व्यंजक के पद, बीजीय व्यंजक के अचर (संख्यात्मक गुणांक) आदि अवधारणाओं से परिचित हुए हैं । आइए, उन्हें फिर से याद करें ।

चर गुणांक :

हमने पहले बीजगणित में चरों 'क' गुणांक की आवश्यकता के संबंध में चर्चा की थी। चर गुणांक को x, y, l, m.... आदि नाम दिए जाते हैं । उन्हें 'क' आक्षरिक बीज या बीज कहते है । ये बीज किसी भी संख्या को सूचित करते हैं । अर्थात् एक बीज का कोई निश्चित मान न होने की स्थिति में अचरों का मान निश्चित हैं ।

पद और बीजीय व्यंजक

चर और अचर संख्याओं को लेकर पद बनता है । कुछ पदों को लेकर एक बीजीय व्यंजक बनता है । निम्न उदाहरणों के देखिए :

$4x+5$ यह एक बीजीय व्यंजक है ।

$4x$ और 5 उसके एक-एक पद हैं ।

उसी प्रकार $3-4xy+5x^2, 10y-x$ आदि एक-एक बीजीय व्यंजक हैं। उनमें x और y चर हैं ।

$3-4xy+5x^2$ एक त्रिपद बीजीय व्यंजक है । $10y-x$ एक द्विपद बीजीय व्यंजक है । दो से अधिक पदवाले बीजीय को **बहुपद** वाले बीजीय व्यंजक कहा जाता है ।

अचर (संख्यात्मक) गुणांक :

हमें ज्ञात है कि एक पद में स्थित दो गुणनखंडों में से एक को दूसरे का गुणांक कहा जाता है ।

उदाहरण के रूप में

$2ab$ पद में 2 एक संख्या गुणांक है ।

$2a, b$ का गुणांक है और

$2b, a$ का गुणांक

सामान्यत: 2 को ab का गुणांक कहा जाता है।

समान और असमान पद :

पदों के चर गुणनखंड समान हों और उनके घातांक समान हो तो वे समान पद कहे जाते हैं। चर गुणनखंड समान न होने से पद असमान पद कहे जाते हैं।

उदाहरण के रूप में

$12x, -2x, 7x, x$ समान पद हैं।

$7xy, 3x^2y, -2x$ आदि असमान पद हैं।

अभ्यास 6.1

1. निम्न बीजीय व्यंजकों के पदों की संख्या ज्ञात कीजिए और पदों को अलग-अलग लिखिए:

(क) $-4x+5$ (ख) $-4x+5y$ (ग) $3y+2y^2$

(घ) $1+x+x^2$ (ङ) $5xy^2+5x^2y-3xy$ (च) $Pq+q$

(छ) $4p^2-3q^2$ (ज) $2x+\frac{1}{4}$

2. निम्न बीजीय व्यंजकों के अचर संख्याओं से भिन्न अन्य प्रत्येक पद के संख्यात्मक (अचर) गुणांकों को अलग से लिखिए।

(क) $5-3t^2$ (ख) $7xy-5x^2-2$ (ग) $-P^2q^2+7pq$

(घ) $x+2xy+3y$ (ङ) $m+3n$

3. x चर वाले पदों को छाँटिए और उन पदों से x के गुणांकों को ज्ञात कीजिए।

(क) xy^2+x (ख) $13y^2-8xy$ (ग) $2-x$

(घ) $x+y+2$ (ङ) $12xy^2+25$ (च) $7xy+xy^2$

4. निम्न पदों में से समान पदों को छाँटिए ।

(क) $4-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yz, 20x^2y, 5x, -3$

(ख) $10pq, 7p, 8q, p^2q^2, 7qp, -100p, -23, 12q^2p^2, -3p, 7, 20q^2p^2, 78pq, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

6.2 बीजीय व्यंजको का जोड़ और घटाव :

निम्न परिस्थिति पर विचार कीजिए।

प्रथम स्थिति-

एक फल की दुकान से नवीन ने जितने संतरे खरीदे, सिमुन ने उसके दो गुणों से तीन कम संतरे खरीदे । यदि हम नवीन द्वारा खरीदे गए संतरों की संख्या को ज्ञात कर सकेंगे, तब सिमुन द्वारा खरीदे गए संतरों की संख्या भी ज्ञात कर सकेंगे।

आइए, नवीन द्वारा खरीदे गए संतरों की संख्या को एक चर x द्वारा सूचित करें।

अर्थात् हमने मान लिया कि नवीन द्वारा खरीदे गए संतरो की संख्या $= x$

अब नवीन और सिमुन द्वारा खरीदे गए संतरों की संख्या जानने की कोशिश करेंगे ।

नवीन और सिमुन द्वारा खरीदे गए कुल संतरों की संख्या जानने के लिए हमें x और $2x-3$ को जोड़ना चाहिए ।

x और $2x-3$ प्रत्येक एक-एक बीजीय व्यंजक हैं । उन दो पदों को जोड़ने से दोनों के खरीदे गए संतरों की संख्या ज्ञात होगी ।

दूसरी स्थिति :

एक आयत की लंबाई x मी. और चौड़ाई y मी. है । उसके क्षेत्रफल से एक वर्ग का क्षेत्रफल 15 वर्गमीटर अधिक है । दूसरे वर्ग का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल से 7 वर्ग मीटर कम है । तब प्रथम वर्ग क्षेत्र का क्षेत्रफल द्वितीय वर्ग के क्षेत्रफल से कितने वर्ग मीटर अधिक है ?

यहाँ आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई $= x \times y = xy$ वर्ग मीटर

प्रथम वर्ग का क्षेत्रफल $= (xy + 15)$ वर्ग मीटर

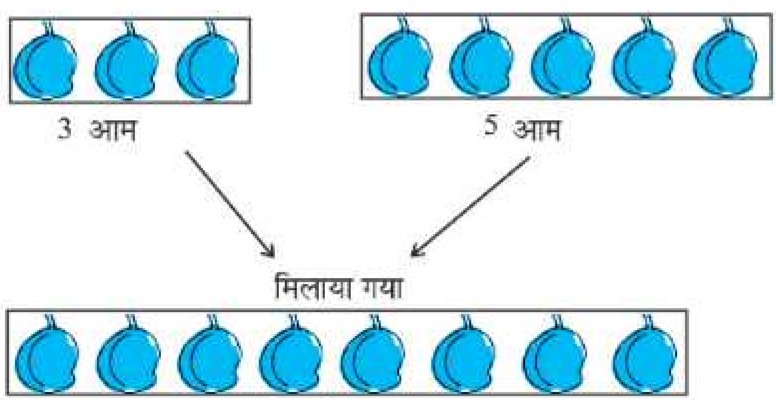
द्वितीय वर्ग का क्षेत्रफल $= xy - 7$ वर्ग मीटर

उत्तर पाने के लिए $(xy + 15)$ और $(xy - 7)$ बीजीय व्यंजक दोनां का अंतरफल तय करेंगे ।

ऊपर की दोनों स्थितियां के उत्तर पाने के लिए हमें बीजीय व्यंजकों के जोड़ और घटाव के बारे में जानना होगा ।

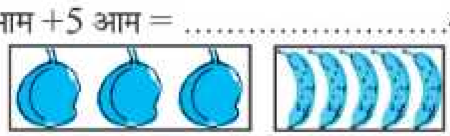
छठी कक्षा में हमें ज्ञात हुआ है कि कैसे समान पदों का जोड़ और घटाव संक्रिया की जाती है । आइए, उन्हें फिर से याद करें :

नीचे पूछे गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :



कुल कितने आम हुए ?

हमने देखा 3 आम +5 आम = ...आम



3 आम और 5 केलों को इकट्ठे करने पर भी क्या हम कह सकते हैं कि वे कुल 8 आम हुए या 8 केले हुए ?

अब हमने देखा दो डलियों में रखे गए एक ही प्रकार के फलों को इकट्ठे करने से फलों की संख्या जुड़ गई है । यह समान पद का नमूना है ।

पर भिन्न प्रकार के फलों के दो समूहों को इकट्ठे करने से उनकी संख्या जुड़ नहीं सकेती ।

यह असमान पद का नमूना है ।

क्या आप जानते हैं?
दो या दो से अधिक समान पदों का जोड़ ज्ञात करने के लिए समान पदों के संख्यात्मक गुणाकों का जोड़ ज्ञात करना चाहिए।

उदाहरण - 1

$3x$ और $4x$ का जोड़ ज्ञात कीजिए।

हल :

$3x+4x = 3\times x+4\times x$

$=(3+4)\times x$

$=7\times x = 7x$ (संख्याओं के क्षेत्र में वितरण नियम का प्रयोग किया गया ।)

$\therefore 3x+4x = 7x$

उदाहरण - 2

$2xy$, $3xy$ और $5xy$ का जोड़ ज्ञात कीजिए :

हल :

$2xy+3xy+5xy = 2\times xy+3\times xy+5\times xy$

$=(2+3+5)\times xy$

$=10\times xy = 10xy$

$\therefore 2xy+3xy+5xy = 10xy$

क्या आप जानते हैं?
सदृश पदों का वियोग फल तय करने के लिए हमें पदों का सांख्यिक गुणाकों का वियोग फल तय करना होगा।

उदाहरण - 3

$5ab$ से $3ab$ घटाइए

हल :

$5ab-3ab = 5\times ab-3\times ab$

$=(5-3)\times ab$

$=2\times ab = 2ab$ (वितरण नियम का प्रयोग किया गया है ।)

याद रखिए :
असमान पदों के जोड़ या घटाव से कोई नया पद नहीं मिलता । जैसे $2x^2$ और $3xy$ का जोड़ = $2x^2+3xy$ होगा।

6.2.1 बीजीय व्यंजकों का जोड़

उदाहरण - 4

सरल कीजिए: $7x - 3y - 2x + 7y - 4x$

हल : $7x - 3y - 2x + 7y - 4x$

$= 7x - 2x - 4x - 3y + 7y$

$= (7 - 2 - 4)x + \{(-3) + 7\}y$

$= (7 - 6)x + (7 - 3)y$

$= 1 \times x + 4 \times y = x + 4y$

ऊपर दिए गए उदाहरणों को ध्यान में रखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- किन बीजीय व्यंजकों को सरल करने को कहा गया है ?
- इन बीजीय व्यंजकों में कुल कितने पद हैं ? वे कौन - कौन हैं ?
- x बीजीय पदों और y बीजीयों पदों को पहचानिए ।
- इसमें समान पदों को इकट्ठे करके व्यवस्थित करके लिखने से क्या मिलेगा ?
- अब x बीजीय पदों का जोड़ कितना है ?
- y बीजीय पदों का जोड़ कितना है ?
- उत्तर क्या ज्ञात हुआ ?

उदाहरण - 5

$2x + 5y - 8$ और $4x - 3y$ बीजीय व्यंजकों का जोड़ ज्ञात कीजिए ।

हल :

$2x + 5y - 8$ और $4x - 3y$ जोड़ $= 2x + 5y - 8 + 4x - 3y$

$= (2x + 4x) + \{5y + (-3y)\} - 8$ (समान पदों को व्यवस्थित किया गया)

$= (2 + 4)x + \{5 + (-3)\}y - 8$

$= 6x + 2y - 8$

$\therefore$ $2x + 5y - 8$ और $4x - 3y$ जोड़ $6x + 2y - 8$

उदाहरण - 6

जोड़ : $3x^2 - 6x - 2, 8x + 5 - x^2, -4 + x + 2x^2$

हल :

प्रथम प्रणाली

जोड़ : $= 3x^2 - 6x - 2 + 8x + 5 - x^2 - 4 + x + 2x^2$

$= 3x^2 - x^2 + 2x^2 - 6x + 8x + x - 2 + 5 - 4$ (ऐसा क्यों लिखा गया ?)

$= (3 - 1 + 2)x^2 + \{(-6 + 8 + 1)\}x - 2 + 5 - 4$ (इस सोपान पर क्या किया गया ?)

$= (3 + 2 - 1)x^2 + (8 + 1 - 6)x + 5 - 2 - 4$ (इस सोपान पर क्या किया गया ?)

$= 4x^2 + 3x - 1$

द्वितीय प्रणाली :

$$3x^2-6x-2, \qquad 8x+5-x^2, \qquad -4+x+2x^2$$

इन तीनों बीजीय व्यंजकां को निम्न रूप से लिख सकेंगे :

$$3x^2-6x-2, \qquad -x^2+8x+5, \qquad 2x^2+x-4$$

इन्हें स्तंभ में लिखेंगे :

$$\begin{array}{r} 3x^2-6x-2 \\ -x^2+8x+5 \\ 2x^2+x-4 \\ \hline 4x^2+3x-1 \end{array}$$

ऊपर द्वितीय प्रणाली में दिए गए हल को ध्यान से देखिए :

- पहले बीजीय व्यंजकों के पदों को पहले बड़े घातांक से छोड़े घातांकों की ओर क्रम से व्यवस्थित करेंगे । अर्थात् x^2 वाले पद को पहले वाले x पद को उसके और x बिना वाले पद को अंत में रखेंगे ।
- बीजीय व्यंजकों को स्तंभ में लिखेंगे ।
- इन्हें जोड़कर योगफल ज्ञात करेंगे ।

अभ्यास - 6.2

1. समान पदों को इकट्ठा करके सरल कीजिए।

(क) $21b-7a+3b-2a$

(ख) $-z^2+13z^2-5z+7z^3-15z$

(ग) $3a-2b-c-5b+6c+2a$

(घ) $6ab+2a-3ab-ab+5a$

(ङ) $5x^2y-5x^2+3yx^2-3y^2+x^2+y^2+4xy^2-2y^2$

2. जोड़ ज्ञात कीजिए :

(क) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$ (ख) $5a, 8a, -9a, -2a$

(ग) $a+b-3, b-2a+3$ (घ) $-7mn+5, 2mn+2$

(ङ) $x^2-2y+3, 3y^2+5y-7$ (च) $14x+10y-12xy-13, 18-7x-10y+8xy$

(छ) $5m-n+5, 3m+4n-1$ (ज) $x^2-y^2-1, y^2-1-x^2, 1-x^2y^2$

6.2.2. बीजीय व्यंजकों का घटाव

छठी कक्षा में हम पूर्णांकों के घटाव से परिचित हुए हैं । वह है- एक संख्या को घटाने का अर्थ है इसके योज्य प्रतिलोम या विपरीत संख्या से जोड़ना ।

उदाहरण के रूप में

$5-(-3)=5+3=8$

अर्थात् **a** और **b** दोनों पूर्णांक हों तो, $\mathbf{a-b=a+(-b)}$

उदाहरण - 7

$8xyz$ से $-5xyz$ घटाइए

हल :

$8xyz-(-5xyz)$

$=8xyz+5xyz$ [$-5xyz$ के प्रतिलोम जोड़ा गया]

$=(8+5)xyz=13xyz$ (वितरण-नियम का प्रयोग किया गया)

उदाहरण - 8

$2a+5b-3c$ से $a+3b-2c$

हल :

प्रथम प्रणाली

$(2a+5b-3c)-(a+3b-2c)$

$=2a+5b-3c-a-3b+2c$ (घटाव जानेवाले बीजीय व्यंजक के प्रत्येक पद के प्रतिलोम को जोड़ा गया)

$=2a-a+5b-3b-3c+2c$ (समान पदों को इकट्ठा किया गया)

$=(2-1)a+(5-3)b+\{(-3)+2\}c$ (समान पदों को जोड़ा गया ।)

$=a+2b-c$

द्वितीय (विकल्प) प्रणाली :

$$\begin{array}{r} 2a+5b-3c \\ -a-3b+2c \\ \hline a+2b-c \end{array}$$

(समान पदों को स्तंभ में व्यवस्थित करके लिखा गया । घटाएजाने वाले बीजीय व्यंजकों के सभी पदों के प्रतिलोम लेने के लिए प्रत्येक पद के चिह्न बदल दिए गए । उसके बाद स्तंभ प्रणाली से घटाया गया ।)

उदाहरण - 9

$3a-2b+c$, $3b-5c+2a$ और $c-a+2b$ के योगफल से $4c-2a+2b$ घटाइए।

हल :

$3a-2b+c$, $3b-5c+2a$ ૭ $c-a+2b$

$=3a-2b+c+3b-5c+2a+c-a+2b$

$=3a+2a-a-2b+3b+2b+c+c-5c$

$=(3+2-1)a+\{(-2)+3+2\}b+(1+1-5)c$

$=4a+3b-3c$

अब $4a+3b-3c$ ७ $4c-2a+2b$ घटाएँगे ।

$=(4a+3b-3c)-(4c-2a+2b)$ (घटाए जाने वाले बीजीय व्यंजकाले के प्रत्येक पद के प्रतिलोम को जोड़ा गया है ।)

$=4a+3b-3c-4c+2a-2b$ (समान पदों को इकट्ठा किया गया)

$=4a+2a+3b-2b-3c-4c$ (समान पदों को जोड़ा गया है ।)

$=(4+2)a+(3-2)b+\{(-3)+(-4)\}c$

$=6a+b-7c$

अभीष्ट उत्तर $=6a+b-7c$

अभ्यास 6.3

1. घटाइए

(क) $-5y^2$ से y^2 (ख) $-12xy$ से $6xy$ (ग) $5mn$ से $3nm$

(घ) $3a^2b$ से $-2a^2b$ (ङ) $-8xyz$ से $7xyz$ (च) $-7xy$ से $-8xy$

2. घटाइए

(क) $5a+b$ से $3a-2b$ (ख) $5xy-4xyz-2xy$ से $3xyz+5xy-2xy$

(ग) $5p-q-2r$ से $3p-2q+r$ (घ) $-m^2+5mn+2n^2$ से $4m^2-3mn+5n^2$

3. (क) $2x$ के साथ क्या जोड़ने से योगफल $5x$ होगा ?

(ख) $7xy$ के साथ कितना जोड़ने से $3xy$ होगा ?

(ग) x^2+xy+y^2 के साथ कितना जोड़ने से योगफल $2x^2+3xy$ होगा ?

(घ) $8x^2y$ के साथ कितना घटाने से $3x^2y$ होगा ?

(ङ) $2a+8b+10$ कितना घटाने से अंतर $-3a+7b+16$ होगा ?

(च) $x^2-2xy+3y^2$ से $-x^2+5xy-2y^2$ कितना अधिक है ?

4. (क) $2xy-zy-zx$ और $2yz-zx+xy$ के जोड़ से $xy-yz-zx$ घटाने से अंतर कितना होगा ?

(ख) $3x-y+11$ और $-y-11$ के जोड़ से $4x-3y+5$ कितना कम है ?

(ग) $2x+y-3z$ और $x-y+z$ के जोड़ने से $5x-7y+z$ कितना अधिक है ?

6.3. समीकरण और उसका हल

पिछले अध्याय में हमने सिखा कि एक या एकाधिक चरों को लेकर कैसे भिन्न-भिन्न बीजीय व्यंजक गठित होते हैं। हमें ज्ञात है कि एक चर विभिन्न सांख्यिक मान को सूचित कर सकता है । और भिन्न-भिन्न अंक्षरों द्वारा चिह्नित होता है । सामान्यत: x, y, z, l, m, n आदि से चरों को चिह्नित किया जाता है ।

पिछली कक्षा में हमें निम्न प्रकार के प्रश्न पूछे जाते थे । अब हम एक प्रश्न को भिन्न भिन्न रूप में कैसे व्यक्त किया जाता है, देखेंगे :

पहला प्रश्न : किस संख्या के साथ 7 जोड़ने से 11 होगा ?

दूसरा प्रश्न : खाली जगह में .... संख्या के साथ 7 जोड़ने से योगफल 11 होगा ?

तीसरा प्रश्न : $* + 7 = 11$

(तारा (*) चिह्न किस संख्या को सूचित करता है ?)

पहले प्रश्न का 'किस संख्या' दूसर प्रश्न का खाली जगह सूचक (चिह्न.......) और तीसरे प्रश्न का तारा (*) चिह्न-सभी एक-एक अज्ञात संख्या को सूचित करते हैं। अब इस अज्ञात संख्या के लिए हम x संकेत का व्यवहार करके तीसरे प्रश्न को फिर से लिखेंगे । तब तीसरे प्रश्न का दूसरा रूप होगा :$x+7=11$

अतएव, तीसरे प्रश्न को हम निम्न प्रकार से लिख सकेंगे :

चौथा प्रश्न : "$x+7=11$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

यहाँ हम देखते हैं कि बीजीय व्यंजक $x + 7$ को अन्य एक संख्या 11 के साथ समान कहा जाता है । यह एक उक्ति है । जहाँ दो प्रतिबंधों को बराबर दर्शाया गया है । इस उक्ति को एक समीकरण कहा जाता है । समीकरण के x को समीकरण का अज्ञात पद कहा जाता है । पहले प्रश्न का हल हमने पिछली कक्षा में निम्न प्रकार से किया था ।

उद्दीष्ट संख्या - $=11-7=4$

प्रश्न : 4 में समीकरण का अज्ञात पद x के लिए 4 लें. तो उक्ति को सत्यापित किया जा सकेगा ।

$x+7=11$, x के स्थान पर 4 लें. $4+7=11$ या $11 = 11$ मिलेगा अथवा यह सही उक्ति है ।

यदि उक्त समीकरण के अज्ञात पद x के लिए 5 लिया जाए, तब क्या उत्तर मिलेगा, देखेंगे ।

$x+7=11$

$5+7=11$ (x के लिए 5 लिया गया)

$\Rightarrow 12=11$

(यह उक्ति सही नहीं है)

इस प्रकार की जाँच करके हम देख सकते हैं कि x के स्थान पर 4 से अलग और कोई संख्या लेने पर समीकरण एक सत्य उक्ति बन नहीं सकता ।

हम कहते हैं कि x का मान 4 होने पर समीकरण सत्यपित होता है । हम कहते है

$x+7=11$ (समीकरण का हल है : $x=4$)

निम्न सारणी की खाली जगहें भरिए (उत्तर हाँ या नहीं में होगा)

क्रमांक	समीकरण	मान	मान के लिए समीकरण सिद्ध होता है या नहीं
1	$x+3=0$	$x=3$	
2	$x+3=5$	$x=2$	
3	$3x=1$	$x=1$	
4	$\frac{3}{x}=5$	$x=15$	
5	$5x=16-1$	$x=3$	
6	$\frac{m}{3}=2$	$m=6$	
7	$a-7=1$	$a=6$	
8	$a+3=2a$	$a=3$	

नीचे उक्तियाँ सारणी के बाएँ स्तंभ में दी गई है । प्रत्येक उक्ति को बीजीय व्यंजकों का व्यवहार करके दाएँ स्तंभ में लिखा गया है ।

उक्ति	बीजीय व्यंजकों का प्रयोग
(A) 4 के साथ x जोड़ने से 9 होता है	(1) $4+x=9$
(B) x से 7 घट जाने से 6 होता है	(2) $x-7=6$
(C) x का 9 गुणा 12 है	(3) $9x=12$
(D) y के दो गुने से 6 अधिक 18 के बराबर है ।	(4) $2y+6=18$
(E) x और b के दो गुने का जोड़ 15 होता है ।	(5) $x+2b=15$

आप ध्यान दें, सारणी के दाएँ स्तंभ में प्रत्येक गणितीय उक्ति में दो राशियों की समानता दर्शाई गई है । इसलिए प्रत्येक उक्ति को एक-एक समीकरण कहा जाएगा । पहले के चार समीकरणों में एक-एक अज्ञात पद x या y है । प्रत्येक समीकरण को एक अज्ञात राशि वाला समीकरण कहा जाता है । क्रमांक 5 में जो समीकरण है उसे दो अज्ञात पद वाला समीकरण कहा जाता है । जिस समीकरण में अज्ञात का सर्वाधिक घात होता है, उसे सरल या एक घाती समीकरण कहते हैं। यहाँ 1 से 5 क्रमाकं घाती समीकरण कहते है । यहाँ 2 से 5 क्रमाकं तक के प्रत्येक समीकरण सरल समीकरण है ।

इस अध्याय मे हम सिर्फ एक अज्ञात राशिवाला या एक घाती या सरल समीकरण की चर्चा करेंगे।

समीकरण के संबंध में कुछ जानने के बातें :

- दो बीजीय व्यंजकों की समानता को समीकरण कहते हैं ।
- समीकरण के दो पक्ष होते हैं । जैसे बायाँ पद और दायाँ पक्ष समीकरण के दोनों पक्षों में से कम-से-कम एक पक्ष में अज्ञातपद होना आवश्यक है ।

- समीकरण में प्रयुक्त अज्ञात राशि (बीजीय व्यंजको) की संख्या के अनुसार समीकरण का नामकरण किया जाता है । जैसे एक अज्ञात व्यंजक पदवाला, दो अज्ञात व्यंजक पद वाला ।
- जिस अज्ञात राशि के मान के लिए समीकरण सिद्ध है, उसे समीकरण का हल कहा जाता है ।
- (एक अज्ञात राशि वाले एक घाती समीकरण का एक ही हल संभव है)

अभ्यास 6.4

1. एक अज्ञात राशि (पद) वाले सरल या एकघाती समीकरणों को छाँटिए।

(क) $2x+3=7$ (ख) $y+5=x+2$ (ग) $z+2=7z-4$

(घ) $2x+7=5+x$ (ङ) $y-7=5y-8$ (च) $xy-5=x+3$

(छ) $x^2-3x=2$ (ज) $2x-7=8$

2. x को अज्ञात पद के रूप में लेकर निम्न सामान्य उक्तियों को (गणितिय उक्ति) (समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए।)

(क) एक संख्या से 3 घटाने से अंतर 7 होता है ।

(ख) 10 एक संख्या के दुगुने से 4 कम है ।

(ग) एक संख्या के 3 भागों से 1 भाग 6 है ।

(घ) एक संख्या 5 से जितना अधिक है, 15 से उतना कम है ।

(ङ) एक संख्या 6 गुने से 7 घटाने से अंतर 3 होता है ।

(च) रमा की उम्र को मान कर (i) 5 साल के बाद उसकी उम्र कितनी होगी ? (ii) 3 साल पहले उसकी उम्र कितनी रही होगी ?

3. निम्नलिखित समीकरणों को सामान्य उक्ति में व्यक्त कीजिए :

(क) $x-5=9$ (ख) $5p=20$

(ग) $3n+7=1$ (घ) $x=-2$

4. निम्न प्रश्नों में अज्ञात संख्या को मानकर प्रश्नों को समीकरण के रूप में लिखिए।

(क) किस संख्या का दो गुना 16 बराबर है ?

(ख) किस संख्या से 7 घटाने पर 12 होगा ?

(ग) किस संख्या की एक तिहाई 5 है ।

(घ) किस संख्या की एक चौथाई 9 होगा ?

(ङ) किस संख्या से 8 अधिक होने से 15 होगा ?

5. निम्न सूचनाओं को पढ़कर समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए :

(क) रोजी के पिताजी की उम्र 49 वर्ष है । पिताजी की उम्र रोजी की उम्र के तीन गुनो से 4 वर्ष अधिक है । रोजी की उम्र के y मान लीजिए।

(ख) इरफान के पास 37 मार्बल हैं। उसने कहा, 'परमित के पास जितने मार्बल हैं, उससे पाँच गुनों से 7 अधिक मार्बल मेरे पास है । मान लें, परमित के पास मार्बल x है ।

6.4. समीकरण का हाल

पिछले अनुच्छेद में चर्चा की गई है कि समीकरण और उसका हल क्या है । उसे याद कीजिए।

$4x+5=17$ एक समीकरण है । इसके अज्ञात पद x के मान को समीकरण का हल कहा जाता है ।

किस संख्या के चार गुने से 5 अधिक होने पर 17 के साथ समान होगा ?

इस संख्या का मान जान के लिए उसकी प्रणाली पर चर्चा करेंगे ।

x के लिए भिन्न भिन्न संख्याएँ लेंगे और उसकी जाँच करेंगे ।

x को 0 माना जाए, तो

$4x+5=4\times0+5=0+5=5$

x को 1 माना जाए, तो $4x+5=4\times1+5=4+5=9$

x को 2 माना जाए, तो $4x+5=4\times 2+5=13$

x को 3 माना जाए, तो $4x+5=4\times3+5=12+5=17$

अब हमने देखा कि x का मान 3 लिया जाए तो समीकरण सिद्ध होता है ।

$\therefore$ $4x+5=17$ समीकरण का हल है।

उदाहरण - १०

$x-7=-3$ समीकरण का हल कीजिए।

हल :

यहाँ $x-7=-3$ एक समीकरण है । इसका बायाँ पक्ष $x-7$ है और दायाँ पक्ष $-$ 3 है । अब समीकरण में x के लिए क्रमश: 1, 2, 3 .... आदि मान लेकर बाएँ पक्ष को सरल करेंगे । किस मान के लिए बायाँ पक्ष दाएँ पक्ष के साथ मान होता है देखेंगे ।

समीकरण	चर पद का मान	बायाँ पक्ष	दायाँ पक्ष
$x-7=-3$	0	-7	-3
	1	-6	-3
	2	-5	-3
	3	-4	-3
	4	-3	-3

ध्यान दें, x का मान 4 होने पर समीकरण का बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष दोनों बराबर हुए । हम कहते हैं, समीकरण $x=4$ के लिए सत्यापित हुआ। अतएव, समीकरण का हल या मूल है 4।

क्या आप जानते हैं?
समीकरण को सिद्ध करने वाले अज्ञात पद के मान को समीकरण का हल मूल कहा जाता है ।

दुसरा उदाहरण लेकर इस प्रणाली से हल करेंगे :

उदाहरण - 11

$2y+7=1-y$ हल कीजिए।

हल :

$2y+7=1-y$ समीकरण के दोनो पक्षों में अज्ञात पद y है । हम y के भिन्न-भिन्न लिए बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष को सरल करके y के किस मान के लिए दिया गया समीकरण सत्यपित होगा, देखेंगे।

समीकरण	चर पद y का मान	बायाँ पक्ष	दायाँ पक्ष
$2y+7=1-y$	0	7	1
	1	9	0
	-1	5	2
	-2	3	3

सारणी y में के लिए ली गई संख्याओं के देखकर रोशन ने पूछा, ''हम तो पहले उदाहरण में x के लिए क्रमशः 0, 1, 2 आदि मान लेते थे, यहाँ y के लिए 1 बाद -1 क्यों लेते हैं ?''

उसके पास उसकी बड़ी बहन सीमा थी । उसने कहा, ''जब y के लिए 0 लिया गया उस समय बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष के लिए मिले मानों में क्या अंतर था ?

रोशन ने हिसाब करके बताया 7–1=6 ।

फिर y के लिए 1 लेने से बाएँ और दाएँ पक्ष के लिए मिले मान दोनों में कितना अंतर है ?

रोशन ने हिसाब किया 9–0=9।

अब सीमा ने बताया - ''दोनों पक्षों के लिए मिला अंतर अधिक हुआ । यदि y का मान 2 लिया जाए, तो यह अंतर और भी बढ़ जाएगा । इसे जाँच करके देख सकते हैं। अतएव, y के लिए और धनात्मक संख्या न लेकर ऋणात्मक संख्या ली गई।

अब रोशन समझ गया कि सारणी में क्यों 1 के बाद -1 लिया गया ।

यहाँ हमने देखा कि y का मान -2 के लिए समीकरण का बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष बराबर हुए, अर्थात् y का मान -2 के लिए समीकरण सत्यसिद्ध हो रहा है।

$\therefore$ समीकरण का हल है $y = -2$

पहले की हल-प्रणाली में अधिक समय लगता है ।

समीकरण का हल या मूल बड़ी संख्या होगी । तो इस प्रणाली से हल करने में अधिक समय लगेगा । हल करने के लिए कैसे एक आसान तरीका निकाला जा सकेगा, उस पर यहाँ चर्चा करेंगे ।

समीकरण को हम सामान्य तराजू के साथ तुलना कर सकते हैं। इसके दो पक्ष तराजू के दो पलड़ों की तरह हैं । समान (=) (चिह्न) के बायाँ पक्ष बाएँ पलड़े का बटखरों और दायाँ पक्ष दाएँ पलड़े के समान के साथ तुलनीय है । समान (=) चिह्न दोनों की समानता को सूचित करता है ।

बाएँ पलड़े के बटखरों और दाएँ पलड़े का सामान दोनों का वजन बराबर होने पर तराजू का दंड भूमि से समानांतर होकर रहता है। हम कहते हैं कि तराजू संतुलित स्थिति में है । बाएँ पलड़ों में अधिक बटखरे डाले तो दाएँ पलडे में भी अधिक सामान डालना होगा । तब तराजू संतुलित स्थिति में रह सकेगा। उसी प्रकार सामान वजन कार बटखरा निकाल लेंगे तो समान वजन का सामान भी निकाल देना होगा । तब तराजू की स्थिति में कोई बदलाव नहीं होगा ।

एक समीकरण भी एक तराजू की संतुलित स्थिति के साथ तुलनीय है । अतएव एक समीकरण के लिए निम्न नियम प्रयुक्त हैं-

(a) एक समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने से समानता में कोई बदलाव नहीं आता । (योग-नियम)

जैसे $x+3=7$ हो तो $x+3+5=7+5$ अर्थात् $x+8=12$ होगा ।

(b) एक समीकरण के दोनों पक्षों से समान संख्या घटाने से संतुलन बना रहता है। (घटाव-नियम)

जैसे: $3x+7=10$ हो तो $3x+7-7=10-7$ अर्थात् $3x=3$ होगा ।

(c) एक समीकरण के दोनों पक्षों को समान संख्या से गुणा करने से समानता में कोई बदलाव नहीं आएगा । (गुणन-नियम)

जैसे : $\frac{x}{2}=5$ हो तो $\frac{x}{2}\times 4=5\times 4$ होगा।

अर्थात् $2x=20$ होगा।

(d) एक समीकरण के दोनों पक्षों को एक शून्येतर संख्या से भाग देने पर भी समानता में कोई बदलाव नहीं आता । (भाग-नियम)

जैसे:यदि $3x=21$ तो $3x\div 3=21\div 3$ अर्थात् $x=7$ होगा।

उपर्युक्त नियमों की सहायता से समीकरण का हल करना आसान हो जाता है ।

निम्न उदाहरण पर ध्यान दें।

उदाहरण - 12

हल कीजिए : $x+3=9$

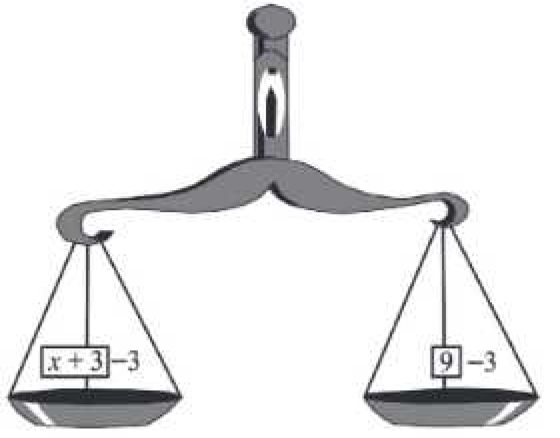
हल :

$x+3=9$

या, $x+3-3=9-3$ (दोनों पक्षों से 3 घटाय गया)

या, $x=6$

$\therefore$ हल है $x=6$



बताइए :

इस समीकरण में बाएँ पक्ष से ही 3 घटाया जाता तो क्या समीकरण संतुलित रह सकता ? क्यों, कारण बताइए ।

यह हल करने की संक्रिया देखकर रेखा अपनी सहेली मिलु से पूछा, समीकरण में दोनों पक्षों से 3 घटाने की जरूरत है, यह कैसे पता चला ?

मिलु ऊपर की कक्षा में पढ़ती है । उसने कहा -

समीकरण के बाएँ पक्ष में एक अज्ञात व्यंजक पद x के साथ $+3$ है । चूँकि हमें x का मान ज्ञात करना है। इसलिए हम बाएँ पक्ष में x के साथ जोड़े गए 3 को निकाल लेना जरूरी है । जोड़े गए 3 को निकाल लेने के लिए 3 को घटाना जरूरी है ।

यह सुनकर रेखा बोली - तब बाएँ पक्ष में $x-3$ होता तो क्या हम दोनों पक्षों में 3 जोड़ना/पड़ता ?

मिलु ने कहा, 'तुम सही बोलती हो ।'

सत्यापन निरूपण :

अब x के मान 6 के लिए समीकरण $x+3=9$ सत्यापित हो रहा है या नहीं, देखेंगे ।

बायाँपक्ष $=6+3=9=$ दायाँ पक्ष

बताइए :

(समीकरण के बाएँ पक्ष में यदि $2x$ (या $x\times2$) रहता तो हल के लिए क्या किया जाता ?

उदाहरण- 13

हल कीजिए : $x-3=7$

हल : $x-3=7$

या, $x-3+3=7+3$

या, $x=10$

सत्यापित निरूपण

($x = 10$ हो तो समीकरण का बायाँ पक्ष= $x-3 = 10-3 = 7$ = दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

उदाहरण - 14

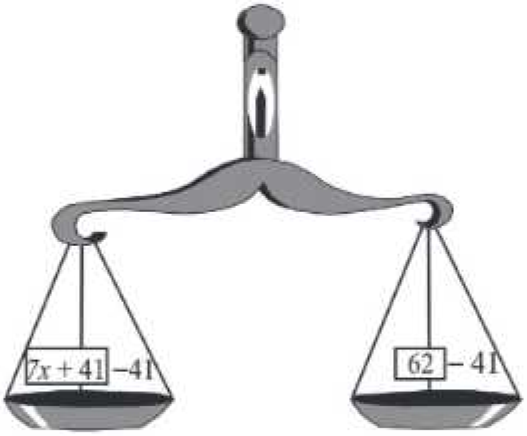
हल कीजिए : $7x+41=62$

हल :

$7x+41=62$

या $7x+41-41=62-41$

(दोनों ओर से 41 घटाने से अज्ञात पद का मान प्राप्त हुआ)



या $7x+0=21$

या $7x=21$

या $\frac{7x}{7}=\frac{21}{7}$ (दोनों पक्षों को 7 से भाग दिया गया)

या $x=3$

सत्यापित निरूपण : x का मान बाएँ पक्ष में 3 लेकर

बायाँ पक्ष $= 7x+41=62$

या $7 \times 3 + 41 = 21 + 41 = 62$ = दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

उदाहरण - 15

हल कीजिए : $2x-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

हल : $2x-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

या $2x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$

या $2x=\frac{2+1}{3}=\frac{3}{3}$

या $2x=1$

या $x=\frac{1}{2}$

सत्यापित निरूपण

बायाँ पक्ष $= 2x-\frac{1}{3}$

$$= 2\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$= 1-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}$$

= दायाँ पक्ष

याद रखिए :

समीकरण के बाएँ पक्ष में अज्ञात पद (x, y कुछ भी हो) के साथ दूसरे पद को पहले निकालना होता है । दूसरा पद जोड़ा गया हो, तो उसे घटाने के नियम के अनुसार निकाला जाता है । वह घटाया गया होगा तो योग-नियम का व्यवहार किया जाता है ।

बाएँ पक्ष में सिर्फ अज्ञात व्यंजक x पद हो और उसके x साथ गुणांक हो तो उसे निकालना चाहिए । वह संख्या के साथ गुणा के रूप में हो तो भाग-नियम का व्यवहार किया जाता है । संख्या x के भाग दिया गया हो तो वहाँ गुणन-नियम का व्यवहार किया जाता है ।

(क) $3p-10=5$

या $3p-10+10=5+10$

(यहाँ बाएँ पक्ष को -10 को हटाने के लिए दोनों पक्षों में 10 जोड़ा गया है ।)

परिमाणस्वरूप हमें मिलेगा -

$3p=5+10$

(यहाँ ध्यान दें कि समीकरण के बाएँ पक्ष में स्थित -10 को हटाने के समय दाएँ पक्ष में $+10$ जोड़ा गया । हम कह सकते हैं कि बाएँ पक्ष का -10 व्यंजक के पक्ष का परिवर्त्तन किया गया ।

और एक उदाहरण देखिए :

(ख) $5x+12=27$

या $5x+12-12=27-12$

या $5x=27-12$

(हमें बाए पक्ष के $+12$ का पक्ष परिवर्त्तन करने के लिए दाएँ पक्ष से 12 घटाना पड़ता है।)

(ग) $3x = 12$ (यहाँ बाएँ पक्ष से 3 को हटाने के लिए दोनों ओर के पदों को 3 से भाग देंगे ।)

हमें प्राप्त होगा : $3x=12$

या $\frac{3x}{3}=\frac{12}{3}$

या $x=\frac{12}{3}$

(हमने देखा, बाएँ पक्ष में x से गुणा किए गए 3 को दाएँ पक्ष में भाग दिया गया है।)

(ग) $\frac{x}{5}=2$ के क्षेत्र में बाएँ पक्ष में 5 हटाने के लिए हम दोनों पक्षों को 5 से गुणा करते हैं।

हमें मिला : $\frac{x}{5}=2$

या $\frac{x}{5}\times 5=2\times 5$

या $x=2\times 5=10$

यहाँ हमने बाएँ पक्ष x के भाजक को हटाने के लिए हमने दोनों पक्षों को 5 से गुणा किया है।

हमें मिला : $\frac{x}{5}=2$

$\frac{x}{5}\times 5=2\times 5$

$x=2\times 5=10$

बाएँ पक्ष से हटाई गई संख्या दाएँ पक्ष में जाती है । इसे हम पक्षांतरण संक्रिया कहते हैं । हम समीकरण का हल करते समय योग नियम, घटाव-नियम आदि नियमों का प्रयोग न करके पक्षांतरण द्वारा कैसे समीकरण का हल करेंगे उसे निम्न उदाहरण में देखेंगे।

उदाहरण - 16

हल कीजिए : $4m+12=20$

हल :

$4m+12=20$

या $4m=20-12$ (12

या $4m=8$ (4

या $m=\frac{8}{4}$ $m=2$

$\therefore$ $m=2$

> **क्या आप जानता हैं ?**
> किसी व्यंजक का पक्षांतरण करते समय उसके चिह्न में परिवर्त्तन होगा।

उदाहरण - 17

हल कीजिए : $2p-1=p+5$

हल:

$2p-1=p+5$

या $2p-p=1+5$ (यहाँ -1 को पक्षांतरित किया गया और दाएँ पक्ष में जोड़ा गया । दाएँ पक्ष के p को पक्षांतरित करके बाएँ पक्ष से इसे घटाया गया । परिणाम स्वरूप अज्ञात p पद सिर्फ बाएँ पक्ष में रहा ।)

या $p=6$

हमने अब तक किसी समीकरण का हल किया । अब उसकी विपरीत स्थिति के संबंध में चर्चा करेंगे। अब किसी भी हल से हम उसका समीकरण व्यक्त करेंगे ।

धवल ने श्यामपट पर $x=4$ लिखा

इसे देखकर कमल ने $x+5=9$ लिखा

सुब्रत खड़े होकर बोला, $3x+2=14$ ।

कमल और सुब्रत ने जो समीकरण लिखे, उनका हल कीजिए। धवल ने श्यामपट पर जो हल लिखा था, क्या उसका हल मिल गया ? ध्यान दें, धवल ने जो हल लिखा था, उसके लिए एक से अधिक समीकरण बन सके । आप $x=5$ के लिए और दो समीकरण बताइए।

खुद करके देखिए :

- $a=6$ लें
- इसे लेकर भिन्न-भिन्न चार समीकरण बनाइए :
- इन समीकरणों का हल के लिए कक्षा के चार विद्यार्थियों को काम दीजिए।
- उन्होंने हल करके a मान कितना प्राप्त किया ?
- उनको $a=6$ क्या उत्तर मिला ?

अभ्यास 6.5

1. प्रत्येक समीकरण के दाई ओर कोष्ठक में दी गई संख्याओं में से कौन-सी समीकरण का हल है, छाँटकर लिखिए।

(क) $3x-7=2$ $[0, 1, 2, 3]$

(ख) $2y+3=y+2$ $[0, 1, -1, 2]$

(ग) $\frac{z}{5}=3$ $[12, 15, 18, 9]$

(घ) $\frac{y}{5}-2=1$ $[4, 8, 12, 15]$

(ङ) $30-5x=x-6$ $[2, 5, 6, -6]$

2. अज्ञात व्यंजक पद के लिए विभिन्न मानों की जाँच करके हल कीजिए।

(क) $2x+3=13$ (ख) $3-x=x-5$

(ग) $4x=20$ (घ) $3y-2=7$

3. समीकरण के योग, घटाव, गुणा और भाग नियमों में से उपयुक्त नियम का प्रयोग करके हल कीजिए:

(क) $x+5=2$ (ख) $z-4=0$

(ग) $y-3=2-y$ (घ) $5x-3=2$

4. पक्षांतरिण प्रक्रिया का उपयोग करके हल कीजिए :

(क) $3x-2=46$ (ख) $5m+7=17$ (ग) $2q+6=12$

(घ) $\frac{2a}{3}=6$ (ङ) $\frac{3p}{3}=6$ (च) $2q+7=q+9$

खुद करके देखिए:

आइए, खेलेंगे

आपकी उम्र कितनी है ?

- अपनी उम्र कितनी है, सोचिए । उसमे 5 जोड़िए
- योगफल से 2 गुणा कीजिए।
- गुणनफल से 10 घटाइए।
- अब जो संख्या मिली उसमें अपनी उम्र घटाइए ।
- आपको जो उत्तर मिला क्या वह आपकी सोची हुई संख्या है ।
  यह कैसे मालूम हुआ ? इसे निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकेंगे ।
  अपनी उम्र x है ।
  उसमें 5 जोड़ेगे । $=x+5$
  उससे 2 गुणा करेंगे । $=2(x+5)=2x+10$
  10 घटाएँगे । $=2x+10-10=2x$
  आपने जो उम्र सोची थी, उसे घटाएँगे $=2x-x=x$

  अब आपको सोची गई उम्र मिल गई ।

  उसी प्रकार हम बहुत से समीकरण बना सकेंगे ।

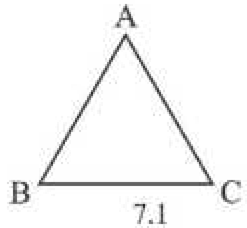
  जैसे - किसी संख्या को 2 से गुणा करके 3 जोड़ेंगे 5 होगा तो समीकरण है - $2x+3=5$
  आप ऐसे कुछ समीकरण बना सकेंगे।

सप्तम अध्याय

त्रिभुज के धर्म

7.1. हमें जो ज्ञात है :

A, B, C और तीन अरैखिक बिन्दु हैं। $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{CA}$ रेखाखंडों से बनी एक बंद सरल आकृति काले त्रिभुज कहा जाता है ΔABC। यह (आकृति) है।



7.1

A, B, और C का ΔABC के शीर्ष बिन्दु कहते हैं।

$\overline{AB}, \overline{BC}$ और $\overline{CA}$ को ΔABC तीन भुजाएँ हैं।

$\angle A, \angle B$ और $\angle C$ के ΔABC तीन कोण हैं।

$\angle A$ की सम्मुख भुजा $\overline{BC}$ है। भुजा $\overline{BC}$ का सम्मुख कोण है। $\angle A$।

(क) उसी प्रकार $\angle B$ और $\angle C$ की सम्मुख भुजाओं के नाम बताइए।

(ख) XYZ एक त्रिभुज का अंकन कीजिए। इसके $\overline{XY}, \overline{YZ}$ और $\overline{ZX}$ के सम्मुख कोणों के नाम लिखिए।

भुजाओं का वर्गीकरण किया गया है।

(क) समबाहु त्रिभुज (ख) समद्विबाहु त्रिभुज (ग) विषमबाहु त्रिभुज

कोणों की माप के आधार पर त्रिभुज का भी वर्गीकरण किया जाता है।

(क) न्यून कोण त्रिभुज (ख) अधिककोण त्रिभुज (ग) समकोण त्रिभुज

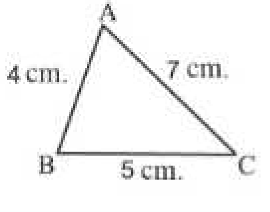
अभ्यास 7.1

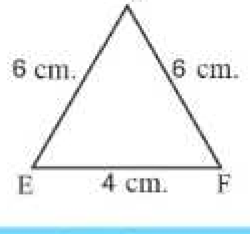
1. (क) ΔPQR में $\overline{QR}$ को सम्मुख कोण का नाम लिखिए।

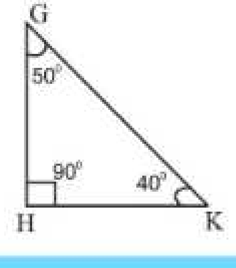
   (ख) ΔDEF में $\angle E$ के सम्मुख भुजा का नाम लिखिए।

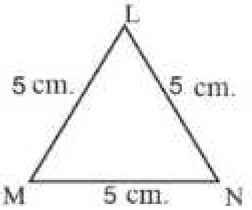
   (ग) ΔKLM में M शीर्ष के सम्मुख भुजा का नाम लिखिए।

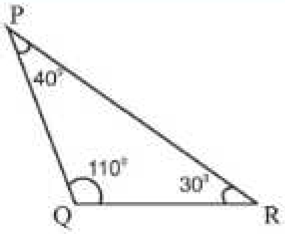
2. निम्न आकृतियों में विभिन्न त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई और कोणों के मान दिए गए हैं। उन्हें देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

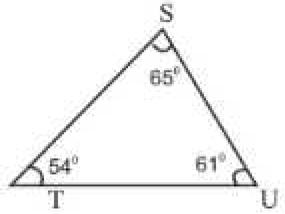












उपयुक्त त्रिभुजों के नामकरण कीजिए।

(क) विषमबाहु त्रिभुज (ख) समद्विबाहु त्रिभुज (ग) समबाहु त्रिभुज

(घ) समकोण त्रिभुज (ङ) अधिककोण त्रिभुज (च) न्यूनकोण त्रिभुज

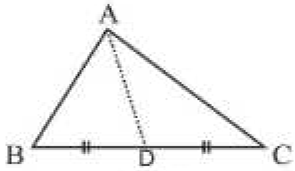
7.2. त्रिभुज से जुड़े कई स्वतंत्र रेखाखंड

(क) त्रिभुज की माध्यिकाएँ

आकृति 7.2 में Δ ABC की $\overline{BC}$ भुजा का मध्योबिंदु D है ।

$\overline{BC}$ भुजा का सम्मुख शीर्ष A है $\overline{AD}$ को Δ ABC की एक माध्यिका कहा जाता है ।

अतएव, हमें ज्ञात हुआ :



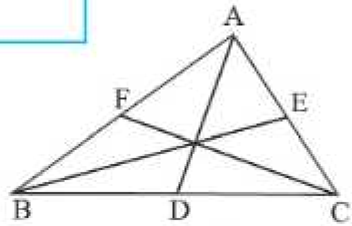
आकृति 7.2

> **किसी त्रिभुज की भुजा का मध्यबिंदु सम्मुख शीर्ष से मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की माध्यिका होती है ।**

आकृति 7.2 को खींची गई माध्यिका को $\overline{BC}$ के प्रति माध्यिका कहते हैं।

$\overline{CA}$ और $\overline{AB}$ के मध्यबिंदु को लेकर और दो माध्यिकाएँ खींची जा सकती हैं।

उन्हें पहचानिए।



आकृति 7.3

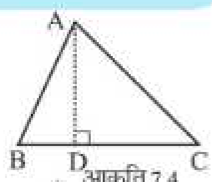
खुद करके देखिए :

- एक त्रिभुज खींचिए। इसका DEF नाम दीजिए।
- Δ DEF की भुजाओं $\overline{DE}, \overline{EF}$ और $\overline{FD}$ के मध्यबिंदु चिह्नित कीजिए। उन मध्यबिन्दु ओर K, L, M के नाम दें।
- $\overline{KF}, \overline{LD}$ और $\overline{MI}$ तीनों माध्यिकाएँ खीँचिए । $\overline{KF}$ और $\overline{LD}$ का प्रतिच्छेद बिंदु माध्यिका के पर रहा या बाहर ? इससे हमें क्या ज्ञात हुआ ?
  आपने ध्यान दिया होगा कि $\overline{KF}$ और $\overline{LD}$ के प्रतिच्छेद बिन्दु $\overline{ME}$ माध्यिका पर रहेगा । अर्थात् तीनों माध्यिकाएँ एक बिंदुगामी हैं।

(ख) त्रिभुज का शीर्ष लम्ब :

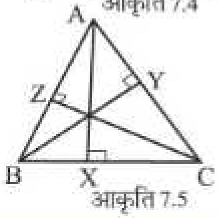
आकृति 7.4 में Δ ABC का शीर्ष बिन्दु A से $\overline{BC}$ पर $\overline{AD}$ शीर्ष लम्ब डाला गया है ।

$\overline{AD}$ को Δ ABC का $\overline{BC}$ सम्मुख भुजा पर डाला गया शीर्ष लम्ब कहते हैं। $\overline{AD}$ को Δ ABC का $\overline{BC}$ पर ऊँचाई कहा जाता है ।



आकृति 7.4

शीर्ष बिन्दु B से $\overline{AC}$ भुजा पर और शीर्ष बिन्दु C से $\overline{AB}$ भुजा पर भी एक-एक 2 शीर्ष लम्ब डाले जा सकते हैं। वे दोनों भी Δ ABC के दो शीर्ष लम्ब हैं।



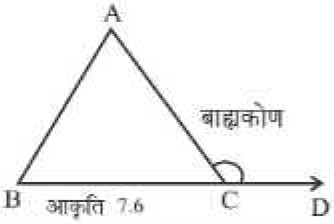
आकृति 7.5

खुद करके देखिए:

- Δ DEF खींचिए।
- सेटस्कोयर की सहायता से D बिन्दु से $\overline{EF}$ शीर्ष लंब डालिए । शीर्ष लंब के आधार बिन्दु का नाम दीजिए X।
- उसी प्रकार E बिन्दु से $\overline{DF}$ पर शीर्ष लम्ब का नाम दीजिए Y।
- फिर पहले की तरह F बिन्दु से $\overline{DE}$ पर शीर्ष लंब डालो । इसके आधार बिन्दु का नाम दें Z। अब Δ DEF का $\overline{EF}$ पर लंब, $\overline{DX}$, $\overline{FD}$ पर लम्ब $\overline{EY}$ और $\overline{DE}$ पर लम्ब $\overline{FZ}$ मिले ।
- बताइए, $\overline{DX}$, $\overline{EY}$ और $\overline{FZ}$ तीनों शीर्ष लम्ब परस्पर को केवल एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते है या भिन्न-भिन्न बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं ?

  आप देखा होगा कि तीनों शीर्षबिन्दु परस्पर को एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं। अर्थात् **त्रिभुज के तीनों लंब एक बिन्दुगामी** होते हैं।

7.3. त्रिभुज के बाह्य कोण और उनके गुण-धर्म ।



आकृति 7.6

एक त्रिभुज के तीन कोण होते हैं। इसके प्रत्येक कोण को त्रिभुज का **अन्त:कोण** कहा जाता है ।

Δ ABC आकृति को देखिए। $\overrightarrow{BD}$ खीचिए, जैसे कि $\overline{BC}$ भुजा $\overrightarrow{BD}$ का एक अंश हो ।

अब बताइए, $\overrightarrow{CD}$ और $\overline{CA}$ से कौन-सा कोण बनता है ?

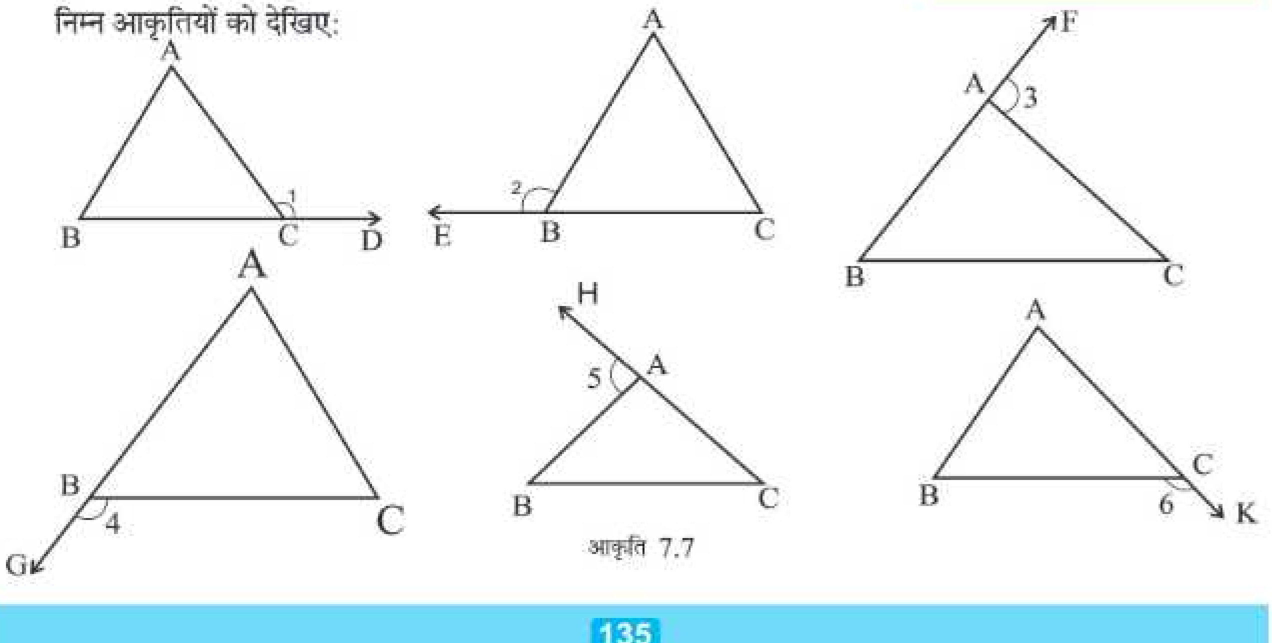
इस कोण का नाम है $\angle$ACD ।

$\angle$ACD को Δ ABC का एक बाह्य कोण कहा जाता है ।

इस प्रकार Δ ABC के कितने बाह्यकोण खींचना संभव है ?

> **क्या आप जानते हैं ?**
> $\overrightarrow{CD}$ को हम $\overline{BC}$ का बढ़ा हुआ अंश भी कहते हैं। $\overline{BC}$ के बढ़े हुए अंश $\overrightarrow{CD}$ के साथ $\overline{AC}$ भुजा बाह्य $\angle$ACD कोण बनता है ।

निम्न आकृतियों को देखिए:



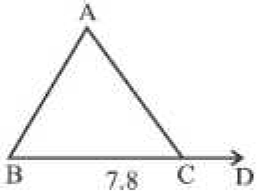
आकृति 7.7

Δ ABC के प्रत्येक शीर्ष बिन्दु पर दो-दो बाह्य कोण बनते है।

आकृति 7.8 में Δ ABC का एक बाह्य कोण है $\angle$ACD ।

Δ ABC के तीनों अन्त: कोणों में से $\angle$ACB, बाह्य $\angle$ACD का संलग्न कोण है ।

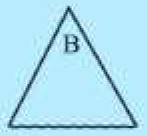
अन्य दो अन्त: $\angle$BAC कोण और $\angle$ABC बाह्य कोण $\angle$ACD के अभिमुख अन्त: कोण है ।



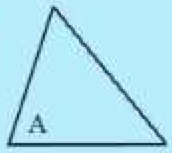
7.8

खुद करके देखिए:

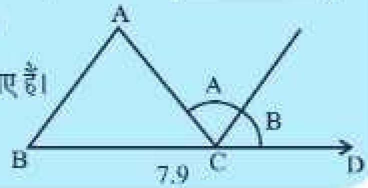
- एक पारदर्शी कागज लेकर Δ ABC पर रखिए।$\angle$ABC और $\angle$BAC के प्रतिलिपि बनाइए। (पारदर्शी कागज नहो तो सादे कागज पर तेल घिसकर वह कागज प्रयुक्त किया जा सकेगा ।)



- $\angle$ABC और $\angle$BAC की प्रतिलिपियों को किनारे से काट कर दोनों कोण अलग-अलग कर दीजिए। तुम्हें बगल में दर्शाए गए कोणों के आकार के दो टुकड़े मिलेंगे ।



- Δ ABC के C बिन्दु $\overline{CA}$ पर के साथ कोट गए $\angle$A आकृति के एक किनारे को सटाकर रखिए और $\overline{CD}$ के साथ काटे गए $\angle$B आकृति के एक किनारे को सटाकर रखिए ।(आकृति 7.9 जैसे)
- अब देखेंगे कि $\angle$A की आकृति और $\angle$B की आकृति के अन्य दोनों किनारे परस्पर मिल गए हैं।
- इस गतिविधि से आपने क्या सीखा, उसपर दोस्तों के साथ चर्चा कीजिए।



7.9

खुद करके देखिए :

- अपनी कॉपी में Δ ABC खींचिए।
- $\overrightarrow{BD}$ खींचिए जिसका $\overline{BC}$ भुजा एक भाग दें। आप को बाह्यकोण $\angle$ACD मिला ।
- $\angle$A, $\angle$B और बाह्यकोण $\angle$ACD को कोण मापक चाँद की सहायता से मापिए।
- $m\angle A + m\angle B$ का मान ज्ञात कीजिए।
- जो योगफल मिला उससे $m\angle$ACD का क्या संबंध है ?
- उपर्युक्त कार्य से हमें क्या पता चला ?

हमें पता चला :

एक त्रिभुज के एक बाह्य कोण की माप, इसके दोनों अभिमुख अन्त-केणों की माप के योगफल के बराबर होता है ।

उत्तर दीजिए :

१. Δ ABC के प्रत्येक शीर्ष बिन्दु पर कितने बाह्य कोण खींचे जा सकते हैं ?

२. Δ ABC के A शीर्ष बिन्दु पर दो बाह्य कोण खींचने से उन दोनों को माप से क्या संबंध है ? अपने उत्तर का कारण क्या है ?

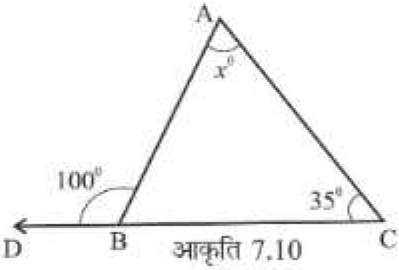
३. किसी त्रिभुज के एक बाह्यकोण की माप और उसके संलगन अन्त: कोण की माप में क्या संबंध है ? अपने ऊपर का कारण क्या है ?

उदाहरण - 1

बगल में दिए गए Δ ABC का एक बाह्य कोण $\angle ABD$ खींचा गया है ।

$m\angle ABD = 100^0$, $m\angle A = x^0$ और $m\angle C = 35^0$ है तब का मान ज्ञात कीजिए।

हल :



आकृति 7.10

$\angle ABD$ एक बाह्य कोण है ।

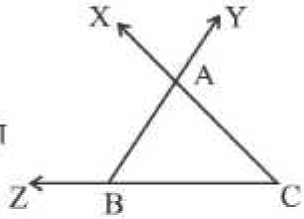
अतएव, $m\angle ABD = m\angle A + m\angle C$

अथवा $100^0 = x^0 + 35^0$

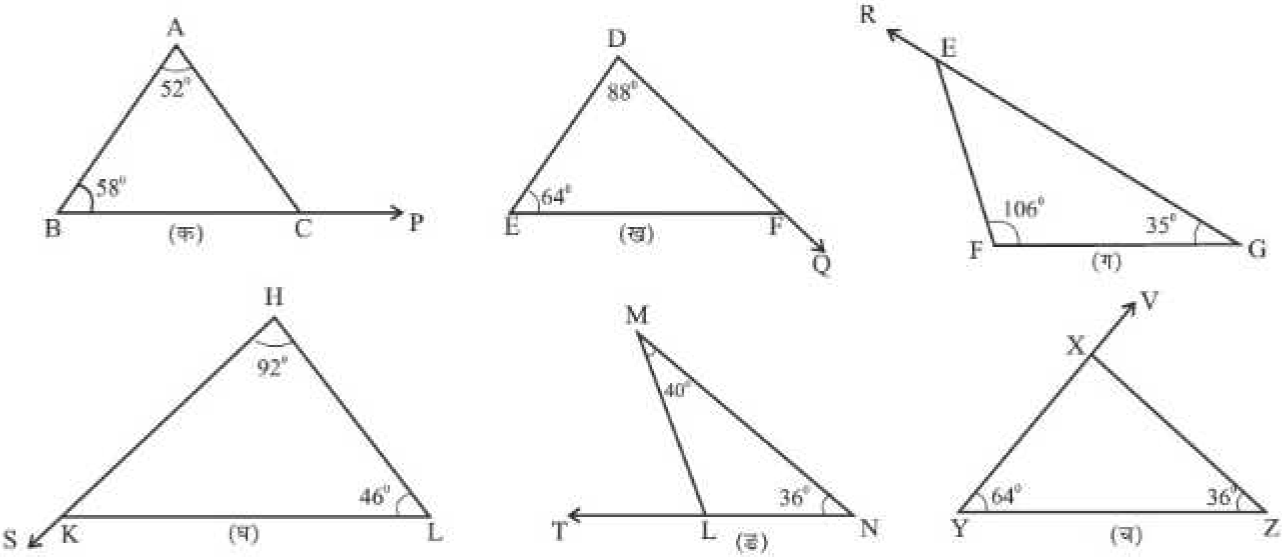
अथवा $100^0 - 35^0 = x^0$

अथवा $x = 65$

अभ्यास 7.2

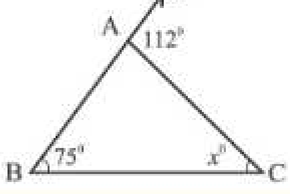


1. बगल में दी गई आकृति में बाह्य कोणों के नाम लिखिए ।
2. एक त्रिभुज के कुल कितने बाह्य कोण खींचना संभव है ?
3. नीचे दिए गए प्रत्येक त्रिभुज में दो कोणों की माप दी गई है । एक बाह्यकोण भी दर्शाया गया है । उस बाह्य कोण की माप ज्ञात कीजिए।



4. बगल में दिए गए Δ ABC को $\angle B$ और बाह्य $\angle PAC$ क्रमश: 75^0 और 112^0 हैं ।

   $\angle C$ की माप x^0 है । x का मान ज्ञात कीजिए।



5. Δ ABC में $\angle B$ की माप की $\angle C$ माप से दुगुनी है । इस त्रिभुज के A पर खींचें गए एक बाह्य कोण का $114°$ माप हो तो त्रिभुज के प्रत्येक कोण की माप ज्ञात कीजिए।

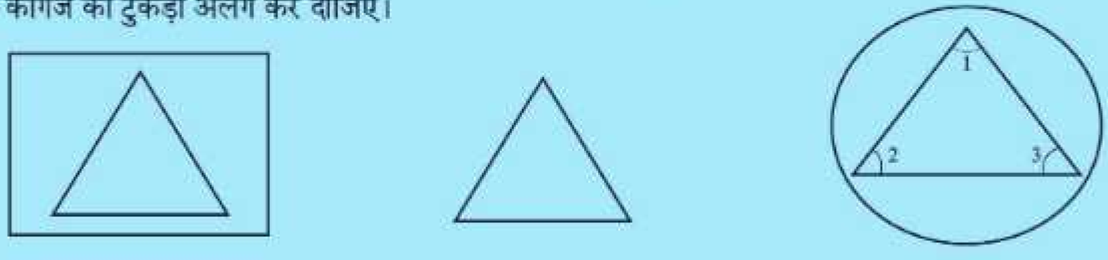
6. Δ ABC की भुजा AC=BC है । बाह्यकोण $\angle ACP$ की माप $160°$ है, $\angle B$ और $\angle A$ मी माप ज्ञात कीजिए।

7.4. त्रिभुज के को :णों की माप और उनमें संबंध

त्रिभुज के तीनों कोणों की माप में क्या संबंध है, उसे जानने के लिए निम्न गति-विधि पर ध्यान दो।

खुद करके देखिए :

- एक कागज लीजिए। उस पर एक त्रिभुज खींचिए। इस त्रिभुज की भुजाओं को किनारे से काटकर त्रिभुज की आकृति के कागज का टुकड़ा अलग कर दीजिए।

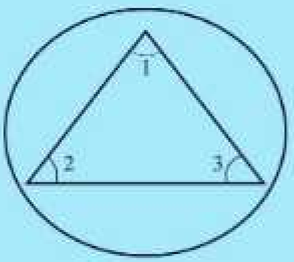


$\angle 1, \angle 2$ $\angle 3$

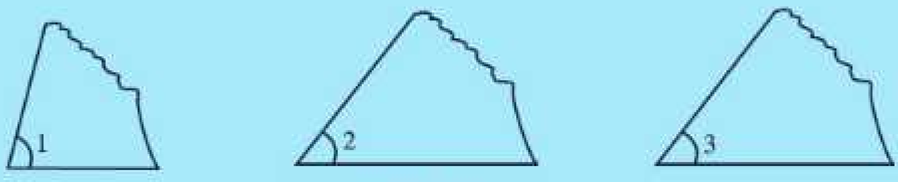
आकृति-(क) आकृति-(ख) आकृति-(ग)

आकृति 7.11

- त्रिभुजाकार कागज के तीनों कोणों के नाम $\angle 1, \angle 2$ और $\angle 3$ दो आकृति-(ग)

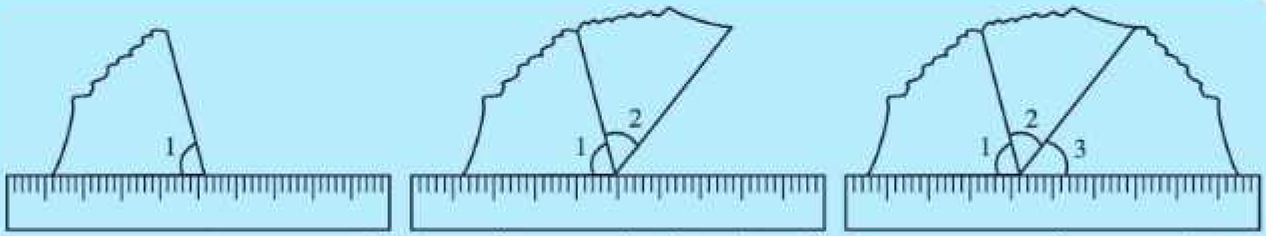


- त्रिभुजाकार काज से तीनों कोण काटकर अलग कीजिए।



आकृति 7.12

- अपनी कॉपी पर एक स्केल रखिए। स्केल के एक किनारे के साथ काटे गए तीनो कोणों के शीर्ष बिंन्दुओं (आकृति ७-१३ में जैसे दर्शाया गया है ।) सटाकर रखो । यहाँ $\angle 1$ के एक किनारे के साथ $\angle 2$ का एक किनारा सटा हुआ है और $\angle 2$ का दुसरा किनारा $\angle 3$ के एक किनारे से मिल गया है ।



∠1 नाम का कोण रखा गया है । ∠1 और ∠2 नाम के कोण रखे गए है । ∠1, ∠2 और ∠3 नाम के तीनो कोण रखे गए है ।

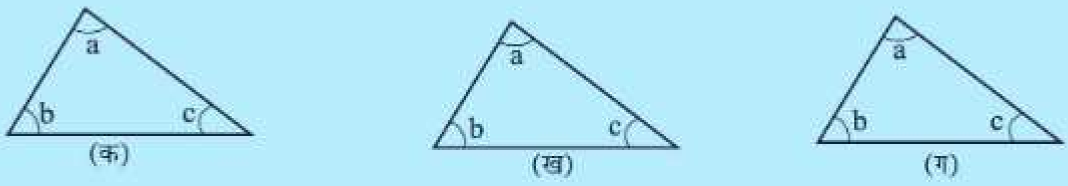
चित्र 7.13

∠1 का एक किनारा और कोण ∠3 का एक किनारा स्केल के किनारे से मिल गए हैं। अर्थात् वे दोनों किनारे एक रेखाएँ स्थित हैं ।

एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल कितना हुआ क्या यह पता चला गया है ?

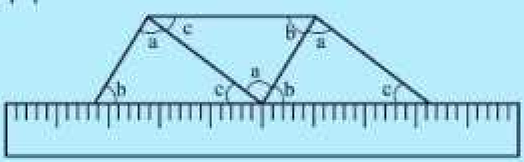
खुद करके देखिए :

- अपनी कॉपी में एक त्रिभुज खींचिए। कोणों के नाम ∠a, ∠b, और ∠c दीजिए ।
- एक पारदर्शी कागज लीजिए। उस पर अपनी कॉपी में खींचे गए त्रिभुज की तीन प्रति लिपियों तैयार करें। मूल त्रिभुज के कोणों के नामों के अनुसार उन कोणों के नाम रखिए ।
- पारदर्शी कागज से प्रतिलिपि तीनों त्रिभुज काटकर अलग कर दीजिए।(वैसे आकृति क, ख, और ग में दर्शाया गया है।)



चित्र 7.14

- अपनी कॉपी की एक पृष्ठ पर एक स्केल रखिए। तीनों त्रिभुजों को स्केल के किनारे पर सजाकर रखिए। (निम्न चित्र की तरह) यहाँ एक टुकडे कागज पर चिह्नित ∠a नामक कोण, दुसरे के नाम ∠b का कोण और तीसरे का ∠c नाम का कोण तीनों एक साथ रहेंगे ।

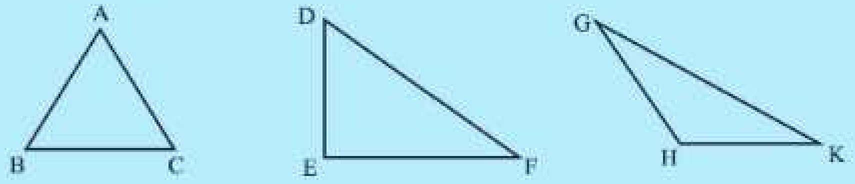


7.15

- इस स्थिति में पहले त्रिभुज के ∠c की एक भुजा और तीसरे त्रिभुज के ∠c की एक भुजा स्केल के किनारे से मिलकर रहेंगी । इसके त्रिभुज के ∠a, ∠b और ∠c की माप का योगफल कितना होगा ?

खुद करके देखिए :

- अपनी कॉपी में विभिन्न आकृतियों के तीन त्रिभुज खीचिए।



- चाँद का व्यवहार करके त्रिभुज के तीनों कोणों की माप ज्ञात कीजिए। उन्हें निम्न सारणी सें उपयुक्त स्थान में भरिए।

त्रिभुज के नाम	तीनों कोणों की माप	तीनों कोणों की माप का योगफल
Δ ABC	$m\angle A =$ $m\angle B =$ $m\angle C =$	..........+..........+..........=
Δ DEF	$m\angle D =$ $m\angle E =$ $m\angle F =$	..........+..........+..........=
Δ GHK	$m\angle G =$ $m\angle H =$ $m\angle K =$	..........+..........+..........=

- प्रत्येक क्षेत्र में तीनों कोणों की माप का योगफल कितना हुआ ?

अतएव, हमें ज्ञात हुआ

किसी त्रिभुज के तीनों कोणों की माप का योगफल $180°$ होता है ।

आप उत्तर ज्ञात करने की कोशिश कीजिए :

1. Δ ABC का $m\angle A=70^0$ की $m\angle B=45^0$ माप ज्ञात $m\angle C$ कीजिए:
2. Δ PQR में $m\angle R$ से $m\angle Q$ 10^0 अधिक है । $m\angle Q$ से $m\angle P$ 10^0 अधिक है । तीनों कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

उदाहरण-2 :

Δ ABC में $\angle A$ की माप की $\angle B$ माप से दुगुनी है । $\angle C$ की माप $\angle A$ की तीन गुनी है । तीनों कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

हल : दत्त -

$m\angle A$ = $\angle B$ की माप की दुगुनी है ।

$m\angle C$ = $\angle A$ की माप के तीन गुनी है ।

= $3\times\angle A$ की माप

= $3\times2\times\angle B$ की माप

= $6\times\angle B$ की माप या $\angle B$ की माप की 6 गुनी

पर $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$

अतएव $2m\angle B + m\angle B + 6m\angle B = 180^0$

अथवा $9m\angle B = 180^0$

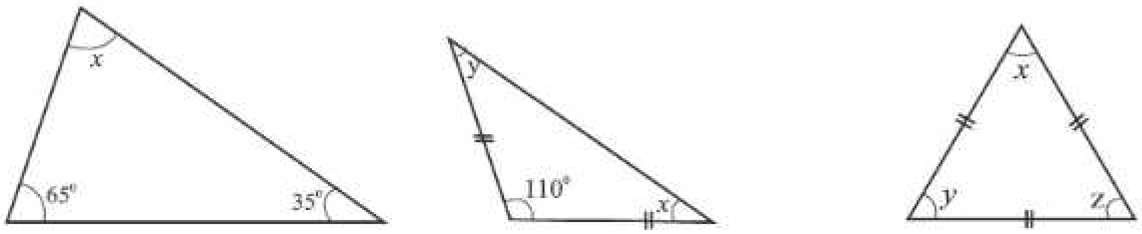
अथवा $m\angle B = \frac{180^0}{9} = 20^0$

$\because m\angle A = 2m\angle B = 2\times 20^0 = 40^0$

$m\angle C = 6m\angle B = 6\times 20^0 = 120^0$

अभ्यास कार्य 7.3

१. निम्न तीन आकृतियों में से x , y और z का मान ज्ञात कीजिए ।

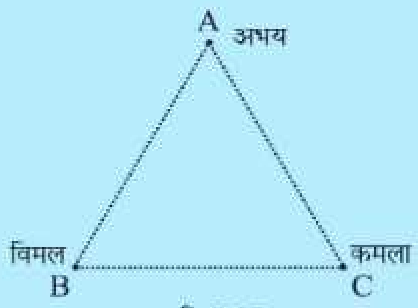


२. Δ ABC में $m\angle A = m\angle B + m\angle C$ है तब की माप $m\angle A$ ज्ञात कीजिए।

7.5. त्रिभुज की भुजाओं की माप का गुण-धर्म

खुद करके देखिए :

- स्कूल के खेल के मैदान में जाइए। अपने तीन दोस्तों को तीन जगह पर खड़ा कराइए। (जैसे आकृति में दर्शाया गया है।) आकृति 7.17 में अभय, विमल और कमला ऐसे तीन जगहों पर खड़े हैं ।



आकृति 7.17

- अब रस्सी की दो टुकड़ियाँ लीजिए। प्रत्येक् रस्सी के एक सिरे को अभय पकड़े ।
- एक रस्सी अभय के पास से कमला की ओर लीजिए और कमला से कहो, वह रस्सी की दूसरा सिरा खींचकर पकड़े रहें।
- कमला ने जहाँ रस्सी को पकड़ा है, वही से रस्सी को काट। उस रस्सी का एक सिरा अभय के हाथ में है और दूसरा सिरा कमला के हाथ में है । अतएव, उस रस्सी की लम्बाई और अभय से कमला की दूरी के बराबर है।
- दूसरी रस्सी का एक सिरा अभय के हाथ में है । रस्सी को विमला की ओर ले लीजिए और उससे रस्सी खींचकर पकड़ने को कहो । कमला के पकड़े जाने के बाद रस्सी को वहीं से काट दीजिए।

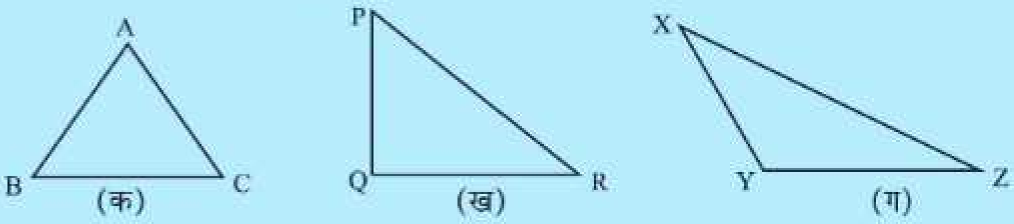
- अब दूसरी रस्सी का एक हिस्सा अभय से विमल तक की दूरी के बराबर है । दूसरा हिस्सा विमल से कमला तक की दूरी को बराबर है । अतएव, पहली रस्सी की लम्बाई $=AC$ दूसरी रस्सी की लम्बाई $=AB+BC$
- अब दोनों रस्सियों को लेकर उनकी लम्बाई की तुलना कीजिए। क्या मिला ?

  पहली रस्सी की लम्बाई की अपेक्षा दुसरी रस्सी की लम्बाई अधिक है ।

  इससे पता चला, ΔABC में $AB+BC>AC$

खुद करके देखिए :

- अपनी कॉपी में तीन भिन्न-भिन्न त्रिभुज खींचिए । उन त्रिभुज के नाम दीजिए ABC, PQR, और XYZ ।



- प्रत्येक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई मापिए और निम्न सारणी भरिए : (अंतिम स्तंभ में स्तंभ ३ और स्तंभ ४ की माप में से कौन-सी बड़ी है, लिखो :)

त्रिभुज का नाम (1)	तीनों भुजाओं की माप (2)	दो भुजाओं का योगफल (3)	तीसरी भुजा की लम्बाई (4)	स्तभ (3) स्तंभ (4) की माप की तुलना (5)
ΔABC	$AB=$	$AB+BC=$	$AC=$	
	$BC=$	$AB+AC=$	$BC=$	
	$CA=$	$BC+AC=$	$AB=$	
ΔPQR	$PQ=$	$PQ+QR=$	$RP=$	
	$QR=$	$QR+RP=$	$PQ=$	
	$RP=$	$PQ+RP=$	$QR=$	
ΔXYZ	$XY=$	$XY+YZ=$	$ZX=$	
	$YZ=$	$YZ+ZX=$	$XY=$	
	$ZX=$	$XY+ZX=$	$YZ=$	

- ऊपर की सारणी के स्तंभ (5) से हमें क्या ज्ञात हुआ ?

किसी त्रिभुज की किह्नी दो भुजाओं की लम्बाई का योगफल इसकी तीसरी भुजा की लम्बाई से बड़ी है ।

बताइए

किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लम्बाई का योगफल अंतर तीसरी भुजा की लंबाई से कम होगा या अधिक ?

✍ Δ PQR की PQ = 8 से.मी. है और PR=11 से.मी. है । निम्न उक्तियों में से कौन सी सही है छाँटकर लिखिए:

(क) QR, 2 से.मी. से अधिक है और 19 से.मी. काम है ।

(ख) QR, 3 से.मी.से अधिक है और 20से.मी. के कम है ।

(ग) QR, 3 से.मी. से अधिक है और 19 से.मी. से कम है ।

(घ) QR, 2 से.मी. से अधिक है और 20 से.मी. से कम है ।

अपने उत्तर के पक्ष में कारण दर्शाइए।

अभ्यास 7.4

1. निम्नलिखित कौन-कौनसी माप त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप से बराबर हो सकती है ?

   (क) 4 से.मी., 5 से.मी. और 9 से.मी.

   (ख) 5 से.मी., 6.5 से.मी. और 12 से.मी.

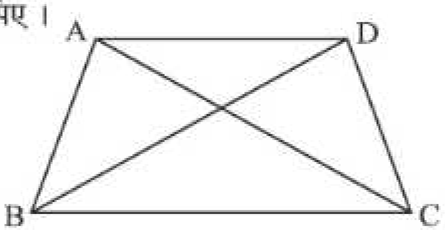
   (ग) 12 से.मी., 7 से.मी. और 4 से.मी.

   (घ) 8 से.मी., 9 से.मी. और 11 से.मी.

क्या आप जानते हैं ?

- सबसे बड़ी माप के साथ अन्य दो मापों की तदुलना करें, तो सबसे बड़ी माप अन्य दोनों के योगफल से छोटी होती है ।
- सबसे छोटी माप को अन्य दो भुजाआं के अंतर से तुलना करें तो सबसे छोटी माप अन्य दोनों के अंतर से बड़ी होनी चाहिए ।

2. बगल में दी गई आकृति में $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{AC}$ और $\overline{BD}$ की लम्बाई मापिए ।



नीचे दी गई खाली स्थान भरिए।

AB + BC + CD + DA = ________

AC + BD = ________

AB + BC + CD + DA [ ] AC + BD [> या <]

इससे क्या ज्ञात हुआ लिखिए।

3. खुद सोचिए, दोस्तों के साथ चर्चा कीजिए। उसके बाद उत्तर लिखिए। प्रत्येक उत्तर के पक्ष में कारण लिखिए।

   (क) किसी त्रिभुज के दोनों कोण प्रत्येक क्या समकोण हो सकते हैं ?

   (ख) किसी त्रिभुज के दोनों कोण प्रत्येक अधिक कोण हो सकते हैं ?

(ग) किसी त्रिभुज में क्या केवल एक न्यूनकोण हो सकता है ?

(घ) किसी त्रिभुज में क्या केवल दो न्यून कोण हो सकता है ?

(ङ) किसी त्रिभुज में प्रत्येक कोण की माप क्या 60° हो सकेगी ?

(च) क्या किसी त्रिभुज के प्रत्येक कोण की माप 60° से अधिक हो सकती है ?

(छ) क्या किसी त्रिभुज के प्रत्येक कोण की माप 60° से कम हो सकती है ?

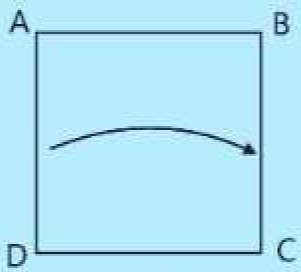
(ज) क्या किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई 8 से.मी, 7 से.मी, और 15 से.मी. हो सकती है ?

(झ) क्या किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई 8 से.मी., 5 से.मी. और 3 से.मी. हो सकती है ?

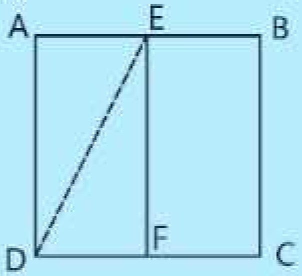
(ञ) क्या किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई 4 से.मी., 5 से.मी. और 8 से.मी. हो सकती है ?

खुद करके देखिए:

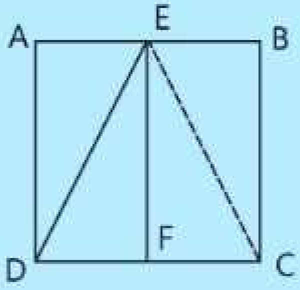
कागज मोड़कर समद्विबाहु और समकोण त्रिभुज बनाइए।



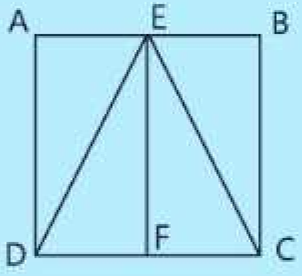
- एक वर्गाकार कागज लेकर बाएँ और दाएँ किनारों को मोड़कर आधा कीजिए। मोड़ को अच्छी तरह दबाकर खोल दीजिए । उस मोड़ का नाम 'EF' दीजिए।



- 'E और F' बिन्दुओं दोनों को जोड़कर मोड़ दो । कागज को खोले । हमें मोड़ 'EF' मिलेगा ।



- उसी प्रकार 'E और C' दोनों बिन्दुओं को जोड़कर मोड़ दीजिए। और कागज को खोलिए।



- अब 'DEC' एक समद्विवाहु त्रिभुज मिला । 'EF' इसकी माध्यिका है । अतएव 'DFE' और 'CFE' दोनों समकोण त्रिभुज है ।

अष्टम अध्याय

व्यावहारिक गणित

8.1. हमें जो ज्ञात हैं :

दो चीजों की तुलना करने के लिए हम भिन्न, अनुपात या प्रतिशत की सहायता लेते हैं। भिन्न और अनुपात को कैसे प्रतिशतता में व्यक्त किया जाता है ? आप पिछली कक्षा में पढ़ा है । अब देखें, विभिन्न स्थितियों में कैसे प्रतिशतता का व्यवहार किया जाता है ।

मान लें राजु को गणित में 50 से 45 अंक, विज्ञानमें 80 से 76 अंक मिले हैं। अब बताओ उसने किसमें अच्छ किया है ? यदि दोनों विषयों में बराबर अंक मिलते, तो हम आसानी से कह सकते कि उसने किस विषय में अधिक अच्छा किया है ? पर यहां दानों के कुल अंक भी बराबर नहीं हैं।

अतएव, हमें पहले दोनों विषयों के कुल अंकों को बराबर मानना होगा । मान लीजिए हर विषय में कुल अंक 100 हैं।

गणित में उसे मिले 50 से 45 अंक

∴ 1 अंक से मिला $\frac{45}{50}=\frac{9}{10}$

100 अंकों से मिले $\frac{9}{10}\times100=90$

विज्ञान में उसे 80 से मिले 76 अंक

∴ 1 अंक से मिला $\frac{76}{80}=\frac{19}{20}$

100 अंकों से मिले $\frac{19}{20}\times100=95$

दूसरे शब्दों में

गणित में उसे 90 प्रतिशत 90 अंक मिले ।

विज्ञान में उसे 95 प्रतिशत 95 अंक मिले ।

उसे गणित की तुलना में विज्ञान में अच्छे अंक मिले हैं।

क्या आप जानते हैं ?
प्रतिशतता में व्यक्त करने के लिए हर को सदैव 100 में बदलना पड़ता है ।

अब नीचे का उदाहरण देखिए। मीरा अपने वेतन ससे 5% बचत करती है । हमें पता चला कि यदि मीरा का वेतन 100 रुपए हो, तो उसकी वचत 5 रुपए हैं। अर्थात् यह वेतन के 100 भागों में से 5 भाग हैं।

∴ उसकी बचत - बेतन का 5%

$=\frac{5}{100}\times$ वेतन

$=\frac{5}{100}\times5000$ रुपए

क्या आप जानते हैं ?
किसी संख्या के प्रतिशत का अर्थ है, उसी संख्या के 100 भागों में से 5 भाग । अर्थात् 5 का अर्थ है 100 भागों में से 5 भाग ।

खुद करके देखिए:

- अपनी कक्षा में एक दिन गैरहाजिर छात्रों की संख्या कुल छात्र-संख्या का कितना प्रतिशत है ?
- अपनी कक्षा में गणित में 30 से कम अंक पाने वाले छात्रों की संख्या कुल छात्र-संख्या का कितना प्रतिशत है ?

8.1.1 प्रतिशतता की वृद्धि और कमी

गरमी की छुट्टियों से पहले मिले का वजन 40 कि.ग्रा. था । छुट्टियों के बाद उसका वजन 423 कि.ग्रा. हुआ । तब उसके वजन में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई ? आइए, हिसाब करें :

मिली का वजन छुट्टियों से पहले = 40 कि.ग्रा.

छुट्टियों के बाद का वजन = 42 कि.ग्रा.

वजन में वृद्धि = 42 कि.ग्रा. - 40 कि.ग्रा.

= 2 कि.ग्रा.

मूल वजन जब 40 कि.ग्रा. है तब वृद्धि हुई = 2 कि.ग्रा.

मूल वजन 1 कि.ग्रा. होता तो वृद्धि होती = $\frac{2}{40}$

मूल वजन 100 कि.ग्रा. होता तो वृद्धि होती = $\frac{2}{40} \times 100$ कि.ग्रा.

= 5 कि.ग्रा.

100 कि.ग्रा में वृद्धि 5 कि.ग्रा.

वृद्धि की प्रतिशतता - 5 प्रतिशतता या 5%

संक्षेप में हिसाब

$$\textbf{प्रतिशत वृद्धि} = \frac{\text{वृद्धि}}{\text{मूल परिमाप}} \times 100$$

और एक उदाहरण देखेंगे ।

उदाहरण - 1

एक बस में 30 यात्री थे । रास्ते में 6 यात्री उतर गए । अब बस की यात्री संख्या कितना प्रतिशत कम हो गया ?

हल :

बस में मूल यात्री संख्या =30

6 उतर गए संख्या में कमी हुई 6

30 से 6 कमी हुई

तो 1 से कम $= \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

100 से कम $= \frac{1}{5} \times 100 = 20$

कमी की प्रतिशतता - 20 या कमी 20 प्रतिशत

उदाहरण - 2

पिछले साल एक ज्यामिति बाक्स का मूल्य 35 रुपए था । इस साल ज्यामिति बाक्स का मूल्य 42 रुपए है । मूल्य में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई ?

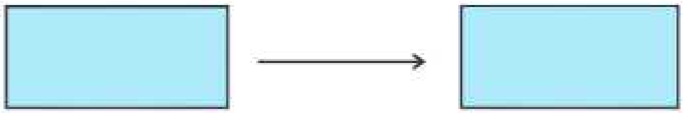
हल :

ज्यामिति बक्स का मूल्य पिछले साल = 35 रूपए

इस साल का मूल्य = 42 रूपए

मूल्य में वृद्धि = 42 रूपए - 35 रूपए =7 रूपए

वृद्धि में प्रतिशतता = ―――――― × 100



$= \frac{7}{35} \times 100$

∴ मूल्य में 20 प्रतिशतता या 20 वृद्धि हुई ।

उदाहरण - 3

रमादेवी महिला विद्यालय में 80 छात्राएँ थीं। उनमें से 8 छात्राओं के अभिभावकों का तबादला होने से वे छात्राएँ दूसरे विद्यालय में चली गई । तब विद्यालय की छात्राओं की संख्या कितना प्रतिशत कम हुआ ?

हल :

रमादेवी विद्यालय की पूर्व छात्रा संख्या = 80

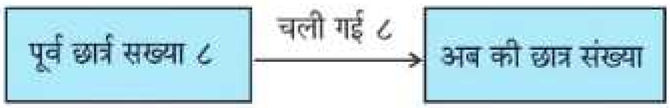
छात्रा संख्या में कमी =8

छात्रा संख्या की कमी की प्रतिशतता $= \frac{\text{कमी का परिमाण}}{\text{मूल परिमाण}} \times 100$

$= \frac{8}{80} \times 100 = 10$

∴ छात्रा संख्या में 10 प्रतिशत या 10% कमी है ।

खाली जगहें भरिए :



अभ्यास 8.1

1. रहीम ने 200 डाक टिकट संग्रह किया । हासिना ने रहीम की अपेक्षा 12 अधिक डाक टिकट संग्रह किया । तब हासिना के पास कितने डाक टिकट है ?

2. मिथुन के पास 150 नारियल थे । उनमें से 20 खराब हो गए । शेष नारियल को उत्सर्ग प्रत्येक को 5 रुपए की दूर से बेच दिया । उसे नारियल से कितने रुपए मिले ?

3. जन को परीक्षा में 445 अंक मिले । यह प्रथम श्रेणी के लिए आवश्यक अंक से 35 कम है । यदि प्रथम श्रेणी में पास होने के लिए 60 अंक की आवश्यकता है, तो उसने कुल कितने अंकों के लिए परीक्षा दी थी ?

4. एक व्यक्ति ने अपने मासिक वेतन के 30 से कर्ज चुकाया । शेष राशि का 50 बचत की । घर खर्च के लिए उनके बास 10,500 रुपए बचे । उनका मासिक बेतन कितना है ?

5. पुरुणिया प्राथमिक विद्यालय में 140 छात्र-छात्राएँ पढ़ते हैं। बेलबाहाली प्राथमिक विद्यालय की छात्र-छात्राओं की संख्या 175 है । तब बेलबाहाली प्राथमिक विद्यालय की छात्र-छात्राओं की संख्या, पुरुणिया प्राथमकि विद्यालय के छात्र-छात्राओं की संख्या से कितना प्रतिशत अधिक है ?

6. शलील बाबू के बगीचे में 60 नारियल के पेड़ हैं। जयंत बाबू के बगीचे में 75 नारियल के पेड़ है ।

   (क) शलील बाबू को नारियल पेड़ों की संख्या जयंत बाबू के नारियल के पेड़ों की संख्या की अपेक्षा कितना प्रतिशत कम है ?

   (ख) जयंत बाबू के नारियल पेड़ों के संख्या शलील बाबू के नारियल पेड़ों की संख्या की अपेक्षा कितना प्रतिशत अधिक है ?

   (ग) दोनों उत्तर समान हुए ? न नहीं हए, तो क्या समान नहीं हुए, कारण लिखिए ।

8.2. लाभ और हानि के हिसाब में प्रतिशत का व्यवहार

एक व्यापारी जितना मूल्य देकर कोई सामान खरीदना है । बेचते समय हल खरीद के मूल्य से अधिक मूल्य पर बेचकर लाभ लेता है । अतएव, लाभ वस्तु के मूल्य में वृद्धि है । क्रयमूल्य मूल मूल्य है ।

$$\text{जैसे वृद्धि में प्रतिशतता} = \frac{\text{वृद्धि का परिमाण}}{\text{मूल परिमाण}} \times 100$$

वैसे

$$\text{लाभ का प्रतिशत} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

अनेक समय पर बाजार में सामान का मूल्य घटा जाता है । या बिक्री के लिए रखा गया सामान पुराना हो जाने से व्यापारी को अपने क्र्यमूल्य से कम मूल्य पर सामान बेचना पड़ता हे । अर्थात् वह सामान क्रयमूल्य से कम मूल्य पर बेचता है । सामान का मूल्य घट जाने से कहा जाता है कि व्यापार में हानि हुई ।

$$\text{कमी में प्रतिशतता} = \frac{\text{कमी का परिमाण}}{\text{मूल्य परिमाण}} \times 100$$

उसी प्रकार हानि की प्रतिशतता = $\frac{\text{हानि}}{\text{क्रयमूल्य}} \times 100$

रामबाबू बगीचे के मालिक से 80 रुपए के आम खरीदे । हाट में न जा सकने से उन्होंने सारे आम पास के दुकानदार को 75 रुपए में बेच दिए। इससे राम बाबू को कितना प्रतिशत हानि उठानी पड़ी ?

हानि = क्रयमूल्य – विक्रयमूल्यव = 80 रुपए – 75 रुपए =5 रुपए

उनके क्रयमूल्य 80 रुपए में हानि 5 रुपए

क्रयमूल्य 1 रुपए में हानि $= \frac{5}{80}$

क्रयमूल्य 100 रुपए में हानि $= \frac{5}{80} \times 100$

उनके हानि का प्रतिशत $= \frac{5}{80} \times 100$

हानि का प्रतिशत = $\frac{\text{हानि}}{\text{क्रयमूल्य}} \times 100$

जानते हो ?
प्रतिशत लाभ या प्रतिशत हानि सदैव सामान के क्रय-मूल्य हर हिसाब किया जाता है ।

क्रयमूल्य, विक्रयमूल्य, और लाभ-हानि में सेदो का परिमाण दिया गया हो तो, अन्य को कैसे ज्ञात किया जाता है? आइए, देखें ।

उदाहरण - 4

सीमा ने एक रेडियो 450 रु में खरीदा था। रेडियो को कितने में बेचने पर उसे 4 रुपयों की हानि उठानी पड़ेगी ?

हल :

प्रथम प्रणाली

रेडियो का क्रयमूल्य = 450 रुपए

हानि = 4%

100 के क्रयमूल्य होने पर हानि 4 रुपए

∴ विक्रयमूल्य = क्रयमूल्यं – हानि

=100 रुपए – 4 रुपए = 96 रुपए

∴ 450 क्रयमूल्य के समय विक्रयमूल्य $= \frac{96}{100} \times 450$ रुपए

= 432 रुपए

विकल्प प्रणाली

हानि = क्रयमूल्य का 4% $= \frac{450 \times 4}{100}$ रुपए = 18रुपए

विक्रयमूल्य = क्रयमूल्य – हानि = 450 रुपए - 18रुपए = 432रुपए

उदाहरण - 5

दो एक ही प्रकार की चद्दर 640 रुपए में खरीदकर एक को 5% हानि पर और दूसरे को 10% लाभ पर बेचने से कुल क्रयमूल्य पर कितना प्रतिशत लाभ या हानि होगी ?

हल :

चद्दरों का क्रयमूल्य

∴ 1 चद्दर का क्रयमूल्य $= 640 \div 2$ रुपए $= 320$

एक चद्दर की बिक्री पर हानि $= 5\%$

$= $ क्रयमूल्य का $5\% = \frac{320 \times 5}{100}$ रुपए

$= 16$ रुपए

∴ प्रथम चद्दर का बिक्रयमूल्य - क्रयमूल्य - हानि

$= 320$ रुपए $- 16$ रुपए $= 304$ रुपए

द्वितीय चद्दर पर लाभ $= 10\%$

$=$ क्रयमूल्य 10%

$= \frac{320 \times 10}{100}$ रुपए $= 32$ रुपए

∴ द्वितीय चद्दर का बिक्रयमूल्य $=$ क्रयमूल्य $+$ लाभ

$= 320$ रुपए $+ 32$ रुपए

$= 352$ रुपए

कुल बिक्रयमूल्य $= 304$ रुपए $+ 352$ रुपए

$= 656$ रुपए

कुल क्रयमूल्य $= 640$ रुपए

कुल लाभ = 656 रुपए- 640 रुपए= 16 रुपए

प्रतिशत लाभ $= \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रयमुल्य}} \times 100$

$= \frac{16}{640} \times 100\%$

$= \frac{5}{2}\%$ 2.5%

दिए गए हल की संक्रिया को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- पहली चद्दर का क्रय-मूल्य कितना है ?
- पहली चद्दर कितने प्रतिशत हानि से बेची गई ?
- पहली चद्दर की हानि का मान कैसे निकला ?
- पहली चद्दर का बिक्रय मूल्य कितना हुआ ?
- पहली चद्दर की बिक्री से लाभ हुआ या हानि हुई ?
- यहाँ लाभ / हानि का परिमाण कितना है ?
- उसी प्रकार दुसरी चद्दर का बिक्रयमूल्य कैसे निकला ?
- दुसरी चद्दर के क्रय-मूल्य और बिक्रय मूल्य मे से कौन-सा बड़ा है ?
- दोनो चद्दरों के बिक्रय मूल्य का योगफल कितना है ?
- दोनों कारे बेचने से लाभ हुआ या हानि उठानी पड़ी ?
- कुल लाभ का परिमाण कितना है ?
- लाभ की प्रतिशतता कैसे निकली ?

✍ **खुद हल कीजिए:**

एक दुकानदार ने 4 नींबुओं को 3 रुपए के दर से खरीदकर 3 नींबुओं को 4 रुपए के दर से सारे नींबू बेच दिए। तब उसका लाभ या हानि कितनी प्रतिशत हुई?

हल के लिए सूचना :

हमें ज्ञान नहीं है कि - उसने कितने नीबू खरीदे थे। वह ज्ञात न होने से हम क्रयमूल्य या विक्रयमूल्य ज्ञात नहीं कर सकते। हिसाब में सुविधा के लिए हम मान लेंगे कि उसके खरीद गए नींबू और 4 तथा 3 का लघुतम समापवर्त्य दोनों बराबर हैं। (हमें 4 नींबूओं का क्रयमूल्य और 3 नींबूओं का बिक्रयमूल्य ज्ञात है।)

अभ्यास 8.2

1. एक आदमी ने 1200 रुपए में 40 खिलौने खरीदकर 16% लाभ पर बेच दिए। उसने हर खिलौने को कितने में बेचा?

2. एक बैल को 900 रुपए में बेचने से सुधाकर बाबू का 10% नुकसान हुआ। उसने कितने रुपए में बैल खरीदा था? कितने में बेचता तो 10% लाभ होता?

3. 10 लाल गुब्बारों के 1 रुपए में 8 रंग-बिरंगे गुब्बारों को 1 रुपए में खरीदकर सारे गुब्बारों को एक रुपए में बेचने से कितने प्रतिशत लाभ या हानि होगी?

4. रहीम बाबू ने 800 रुपए देकर चावल खरीदा। उन्होने $\frac{3}{4}$ भाग चावल 10% लाभ पर और शेष चावल 10% नुकसान पर बेच दिया। पूरी बिक्री से उन्हें कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई?

5. मालगोदाम का एक व्यापारी ने 800 रुपए में खरीदे गए चावल को 10% लाभ पर खुदरे दुकानदार को बेच दिया। दुकानदार ने 15% लाभ रखकर ग्राहक को बेच दिया। तब ग्राहक ने कितने रुपए देकर चावल खरीदा?

6. एक दुकानदार 5 नारियलों कों 24 रुपए के दर से खरीदकर तीन नारियलों को 20 रुपए के दर से बेच दिया उसका कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई?

8.3. ब्याज का हिसाब

एक दिन गौरी ने देखा कि उसकी माँ बैंक जाते समय हाथ में एक छोटी की पुस्तक ले रही है। गौरी ने उसे देखना चाहा। उसने माँ से वह पुस्तक ले ली और देखा। उस पर लिखा था - उसमें भिन्न-भिन्न तारीखों में जमा की गई राशि का परिमाण लिखा गया था। कहीं धन-राशि का परिमाण अधिक हुआ है तो कहीं अधिक। उसने माँ से पूछा कि यह सब क्या लिखा गया है।

माँ ने कहा कि वे अपनी आय से घर का खर्च करने कुच्छ रुपए अपने पास रखाकर बाकी रुपए बैंक में जमाकर देती है। उन्होने किस तारीख को कितने रुपए जमा किए, उसका विवरण उसमें लिखा गया है।

गौरी ने पूछा, जब तुम कुछ राशि जमा करती हो उस समय तो राशि का परिमाण बढ़ जाना चाहिए, कभी कभी वह कैसे कम हो जाता है ? माँ ने बताया, 'जरूरत पडने पर में कुछ रुपए निकाल लेती हूँ। उस समय जमा राशि कम हो जाती है।'

गौरी ने पूछा, 'आप रुपए अपने घर पर न रखकर क्यों बैंक में जमा कर देती हो ? जमा करते समय और रुपए निकालते समय तोने पैसे खर्च कर रिक्से के लिए पड़ते हैं।'

माँ ने समझा दिया - 'पहले तो बैंक में रुपए जमा करने से रुपए सुरक्षित रहते हैं। दूसरी बात है कि बैंक जमा की गई धनराशि पर कुछ ब्याज देता है। बैंक में रुपए रखते समय किस दर से हमें ब्याज मिलेगा, बैंक में रुपए रखने समय किस दर से हमें ब्याज मिलेगा, बैंक हम पहले उसे ज्ञात करा देता है। भारत सरकार के नियम के अनुसार ब्याज की दर तय होती है।'

इसके बाद माँ नें गौरी को ब्याज हिसाब करने का तरीका बता दिया।

- हर 100 रुपए की जमा राशि पर एक साल के लिए जितना ब्याज दिया जाता है, इसे प्रतिशत ब्याज की दर कहा जाता है। इसे r संकेत से व्यक्त किया जाता है।
- जमा की गई राशि को मूलधन कहा जाता है, इसे P संकेत से सूचित किया जाता है।
- जितने वर्ष तक धन राशि जमा की जाती है, उसे जमा राशि का समय कहा जाता है और उसे t संकेत से सूचित किया जाता है।
- जमा राशि पर जो ब्याज मिलता है उस I संकेत से सूचित किया जाता है।

- अब देखेंगे प्रतिशत r ब्याज की दर से जमा राशि P रुपए पर जमा किए गए समय t वर्ष में कितना ब्याज मिलेगा ?

प्रतिशत ब्याज r की दर 100 रुपए मूलधन पर।

वर्ष में r रुपए ब्याज मिलेगा। तब 1 रुपए मूलधन पर 1 वर्ष में $\frac{r}{100}$ रुपए ब्याज मिलेगा।

1 रुपए मूलधन पर r वर्ष में $\frac{r}{100}\times t$ रुपए ब्याज मिलेगा।

P रुपए मूलधन पर t वर्ष में $\frac{r}{100}\times t\times P$ रुपए ब्याज मिलेगा।

$\therefore$ अतएव, ब्याज का परिमाण $=\frac{r}{100}\times t\times P=\frac{Ptr}{100}$

अथवा $I=\frac{Ptr}{100}$

ब्याज का परिमाण $=\frac{\text{मूलधन}\times\text{समय (वर्ष में)}\times\text{प्रतिशत ब्याज की दर}}{100}$

इसे हम $100\times I=Ptr$ के रूप में लिख सकते हैं,

इस सूत्र का अर्थ है :

मूलधन P, ब्याज I, ब्याज की दर r और वर्ष संख्या में समय t के बीच रहनेवाला संबंध।

इन चारों में से किहीं तीन ज्ञात हों तो चौथे को ज्ञात किया जा सकता है।

क्या आप जानते हैं ?

बैंक में हम धन राशि जमा करने पर जैसे बैंक हमें ब्याज देता है, उसी प्रकार हम बैंक से या किसी दूसरी संस्था से उधार लोन पर वे हमसे ब्याज लेते हैं।

हमने जिस ब्याज पर चर्चा की उसे साधारण ब्याज कहते हैं। साधारण ब्याज की व्यवस्था में हर वर्ष पहली जमा राशि पर ब्याज का हिसाब किया जाता है। सिर्फ ब्याज कहने का अर्थ है साधारण ब्याज।

बताइए:
साधारण ब्याज के अलावा क्या और किसी प्रकार की ब्याज व्यवस्था है ?

अंत में हम उधार की गई राशि के साथ ब्याज की राशि मिलाकर लौटाते हैं। उसे मिश्रधन कहते हैं। इसे A संकेत से सूचित किया जाता है।
अतएव मिश्रधन (A)= मूलधन (P)+ ब्याज (I)

उदाहरण-6 :

ब्याज 5 की दर से 10,000 रुपए के मूलधन 2 पर कितना ब्याज मिलेगा ?

हल :

यहाँ मूलधन (P)=10,000 ब्याज की दर (r)=5%, समय (t) वर्ष संख्या =2

ब्याज $I = \frac{Ptr}{100} = \frac{10,000 \times 2 \times 5}{100}$ रुपए = 1,000 रुपए

उदाहरण-7:

कर्ज देने की एक संस्था से जबीन के पिताजी ने 5000 रुपए कर्ज लिए। इस कर्ज पर साधारण ब्याज की दर 8% हैं। तब 2 वर्ष बाद उनको कितने रुपए ऋण-मुक्त होना पडेगा ?

हल :

मूलधन (P)=5,000 रुपए

साधारण ब्याज की दर (r) = 8%

कर्ज लेने का समय (t) = 2 वर्ष

साधारण ब्याज $I = \frac{Ptr}{100}$

$= \frac{5,000 \times 2 \times 8}{100}$ रुपए

= 800 रुपए

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

=5000 रुपए + 800 रुपए

=5800 रुपए (उत्तर)

ऐकिक नियम में हल

100 रुपए का 1 वर्ष का ब्याज = 8 रुपए

1 रुपए का 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{8}{100}$ रुपए

5000 रुपए का 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{8}{100} \times 5000 = 400$ रुपए

5000 रुपए का 2 वर्ष का ब्याज = 400रु×2=800 रुपए

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज = 5000 रु + 800 रुपए

= 5800 रुपए (उत्तर)

अभ्यास 8.3

1. 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए 5,500 रुपए जमा रखाने से साधारण ब्याज में कितना ब्याज मिलेगा?
2. वार्षिक 12 की दर से 2 वर्ष का साधारण ब्याज 1512 रुपए हैं। मूलधन कितना है?
3. किसी मूलधन पर वार्षिक 5% की दर से 8 वर्ष का ब्याज 4200 रुपए हैं। उसी मूलधन पर वार्षिक 10% की दर से 3 वर्ष का ब्याज कितना होगा?
4. हीरालाल एक साहूकार से 50000 रुपए उधार लेकर 3 वर्ष के बाद कुल 49600 रुपए चुका कर ऋणमुक्त हुए। तब ब्याज की दर क्या थी?
5. नीलिमा ने बैंक से 6% की दर से 3 वर्ष के लिए 1400 रुपए कर्ज लिए। उसी समय जरुरत पडने पर नीलिमा की सहेली फतीमा ने नीलिमा से 1400 रुपए 8% की दर से 3 वर्ष के लिए कर्ज लिए और समय की समाप्ति के तुरंत बाद पुरी रकम देकर कर्ज से मुक्त हो गई। नीलिमा ने भी तुरंत अपना कर्ज चुका दिया। अब नीलिमा को कितना लाभ होगा?
6. एक आदमी ने 20500 रुपए 8% की दर से 3 वर्ष के लिए जमा रखा। एक साल के बाद ब्याज की दर में 9% हो गया। तब 3 वर्ष के बाद उन्हें मिश्रधन कितना मिलेगा?

8.4. छूट

ग्राहकां को आकर्षित करने के लिए दुकानदार भिन्न भिन्न उपाय अपनाते हैं। मुक्त भेंट देना, दो सामानों के मूल्य पर - सामान देना, लिखे गए मूल्य से कुछ कम पर बेचना, दो के मूल्य पर 3 सामान बेचना, ये सब ग्राहकों कों आकर्षित करने के उपाय हैं। हम तीज-त्याहारों के समय, प्रदर्शनी के समय, विभिन्न मेलों में दुकानों के सामने 'छूट पर बिक्री' बोर्ड लगाए हुए देखते हैं। लिखित मूल्य से कम दर से बेचने को 'छूट' कहते हैं ।

अतएव, छूट = लिखित मूल्य - छूट 20% छूट का अर्थ है - लिखित मूल्य का 20%

समाप्त: छूट के प्रतिशत में ब्याज किया जाता है। गांधी-जयंती के समय खद्दर कपड़ों पर खद्दर - पर सरकार के निर्देशानुसार दुकानदार छूट देती है।

चिंटू एक सर्ट खरीदने गई। उस सर्ट पर 100 रुपए लिखा गया था। दुकानदार ने उससे 80 रुपए लिए। बताइए उसने 20 रुपए कम क्यों लिए?

- सामान के लिखित मूल्य या सूचित मूल्य पर कम कर दिए गए परिमाण को छूट (Discount) कहते हैं।
- लिखित मूल्य / सूचित मूल्य - छूट = विक्रय मूल्य

  छूट (Discount)= लिखित मूल्य - विक्रय मूल्य
- छूट को सामान्य वस्तु के लिखित मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

$$\text{प्रतिशत छूट} = \frac{\text{छूट}}{\text{लिखित मूल्य}} \times 100$$

उदाहरण– 8 :

एक पंखे का लिखित मूल्य 555 रुपए हैं। ठंड के मौसम में एक दुकानदार ने 5% छूट पर पंखे बेचने का निर्णय लिया। तब पंखे को खरीदने के लिए क्या मूल्य देना पडेगा ?

समाधान : पंखे का लिखित मूल्य = 555 रुपए

छूट = 10%

$= \text{लिखित मूल्य} \times \frac{10}{100}$

$= 555 \text{ रुपए} \times \frac{1}{10} = \text{रु } 55.50$ पैसे

∴ बिक्री मूल्य = लिखित मूल्य - छूट

= रु 555.00 – रु 55.50 पैसे

= रु 499.50 (उत्तर)

उदाहरण-9

जूते के दुकानदार ने विज्ञापन दिया कि जिस जूते पर लिखित मूल्य 250 रुपए होंगे, उसे 220 रुपए में बेच दिया जाएगा। तब उन्होंने कितने प्रतिशत की छूट देकर जूते की बिक्री की ?

हल :

प्रथम प्रणाली

एक जोड़े जूते का लिखित मूल्य = 250 रुपए

बिक्री मूल्य = 220 रुपए

∴ अतएव, छूट का परिमाण = लिखित मूल्य - बिक्री मूल्य

=250 रू – 220 रू = 30 रू

∴ प्रतिशत छूट $= \frac{\text{छूट}}{\text{लिखित मूल्य}} \times 100$

$= \frac{30}{250} \times 100 = 12$

∴ दुकानदार ने 12% छूट पर जूते की बिक्री की।

क्या आप जानते हैं ?

500 रुपए को पहले Rs.500/- के रूप में लिखा जा रहा था। अब भारत सरकार की कानून के अनुसार उसे Rs.500/- के रूप में न लिखकर ₹ 500/- के रूप में लिखा जाता है।

विकल्प प्रणाली :

छूट = लिखित मूल्य - विक्री मूल्य

= रु 250.00 - रु 220.00

= रु 30.00

लिखित मूल्य 250 रुपए से छूट 30 रुपए

लिखित मूल्य 1 रुपए में छूट $= \frac{30}{250}$

लिखित मूल्य 100 रुपए में छूट $= \frac{3}{25} \times 100$ रुपए $= 12$ रुपए

$\therefore$ उसने 12% छूट पर जूते बेचे।

अभ्यास 8.4

1. एक दुकानदार छूट पर क्यों सामान बेचता है ? आप इस पर अपने विचार व्यक्त कीजिए।

2. बच्चों की साइकिल पर लिखित मूल्य 1680 रुपए हैं। दशहरे के मौके पर दुकानदार ने साइकिल को 20% छूट पर बेचना चाहा। तब एक खरीददार को उस साइकिल के लिए कितने रुपए देने पड़ेंगे ?

3. एक फ्रॉक का सूचित मूल्य 250 रुपए हैं। दुकान पर रह गई पोशाकों को जदी बेच देने के लिए दुकानदार ने वैसी फ्रकों को 210 रुपए में बेच दिया। उसके कितने प्रतिशत की छूट दी ?

4. एक कलम का मूल्य 8 रुपए हैं। पर उसी प्रकार की तीन कलमें खरीदने से 10% छूट देने के लिए दुकानदार ने विज्ञापन निकाला था। तब तीन कलमों की बिक्री पर कितनी होगी ?

5. एक बाल्टी का लिखित मूल्य 120 रुपए है। प्रदर्शनी के समय एक दुकानदार ने तीन बाल्टी के मूल्य पर चार बाल्टी देने की घोषणा की थी। यह सुविधा लेकर एक खरीददार ने दुकान से चार बाल्टियाँ लीं। उन्हें कितने प्रतिशत की छूट मिली ?

6. मेले के मैदान में एक दुकान पर 80 रुपए लिखे गए एक बैग को 15% छूट पर बेचा जा रहा था। दूसरी दुकान पर 90 रुपए लिखे गए बैग को 22% छूट पर बेचा जा रहा था। सीमा एक बैग खरीदेगी। हिसाब करके बताइए, किस दुकान से बैग खरीदने से कितने रुपए देने होंगे ?

7. एक दुकानदार ने अपनी दुकान की तीन पहिए वाली साइकिल पर 460 रुपए मूल्य लिखा था। उन्होने उसे 25% छूट पर बेच दिया। अपनें उन्हें 15% लाभ हुआ। उन्होने साइकिल को कितने में खरीदा ता ?

(सूचना : लिखित मूल्य और छूट से बिक्री मूल्य ज्ञात होगा। प्रतिशत लाभ और बिक्री मूल्य से क्रय मूल्य निकाला जा सकेगा।)

8.3 चलन

नीचे की दो परिस्थितियों पर ध्यान दीजिए।

पहली स्थिति

1 कि.ग्रा. चीनी का मूल्य 22 रुपए हैं। $\frac{1}{2}$ कि.ग्रा. चीनी का मूल्य 11 रुपए होंगे। 2 कि. ग्रा. चीनी का मूल्य 44 रुपए होंगे। हम ऐकिक नियम से इसका परिणाम निकालना जान चुके हैं। चीनी का परिमाण आधा हो जाने से मूल्य की आधा हो जाता है। चीनी का परिमाण दो गुना हो जाने से मूल्य भी दो गुना हो जाता है। चीनी का परिमाण बदल जाने से मूल्य भी बदल जाता है। अतएव, चीनी के परिमाण और उसके मूल्य, दोनों को चर राशि कहते हैं।

दूसरी स्थिति

एक आदमी 10 मिनट में 1 कि.मी. तय करता है। अपनी गति का वेग न बदलकर 20 मिनट पैदल चलेगा तो 2 कि.मी. दूरी तय करेंगे। 5 मिनट चलेंगे तो आधा कि.मी. या $\frac{1}{2}$ कि.मी. तय करेंगे। ऐकिक नियम का प्रयोग करके हम इसका हिसाब करना जानते हैं। इससे ज्ञात होता है कि समय आधा हो जोने से तय की जाने वाली दूरी आधी हो जाती है। समय दुगुना हो जाने से तय की जाने वाली दूरी दुगुनी हो जाती है।

अर्थात् समय जितना गुना हो जाता है, तय की जाने वाली दूरी अपनी गुनी हो जाती है।

समय और दूरी दोनों बदलते हैं। अर्थात् हम कितने समय तक गति करेंगे, यह हम पर निर्भर है। गति करने के समय पर दूरी निर्भर रहकर बदलती है। इसलिए समय और दूरी होने को चर राशि कहते हैं। हम गति करने वाले वेग को स्थिर मान लेते हैं।

ऊपर की पहली स्थिति में एक चर राशि (चीनी का परिमाण) पर निर्भर करके दूसरी चर राशि (चीनी का मूल्य) बदलती है और दूसरी चर राशि (चीनी का मूल्य) बदलती है और दूसरी - में चर राशि गति के समय पर निर्भर रहकर दूसरी चर राशि (दूरी) बदलती है।

एक चर राशि के परिवर्तन पर निर्भर करके दूसरी चर राशि के परिवर्तन होने की प्रक्रिया को (चलन) कहते हैं।

✍ आप इस प्रकार की दो स्थितियों के उदाहरण दीजिए, जिसमें एक चर राशि पर निर्भर करके दूसरी चर राशि बदल जाती हैं।

8.5.1 सीधा चलन

एक कॉपि का मूल्य 12 रुपए हैं। तब 10 कॉपियों का मूल्य 120 रुपए होंगे। अब बताइए 3, 9, 18 कॉपियों का मूल्य कितना होगा ?

ऐकिक नियम के मुताबिक

कॉपि का मूल्य = 12 रुपए

3 कॉपियों का मूल्य $=3\times12$ रुपए $=36$ रुपए

9 कॉपियों का मूल्य $=9\times12$ रुपए $=108$ रुपए

18 कॉपियों का मूल्य $=18\times12$ रुपए $=216$ रुपए

इस तथ्य को लेकर नीचे एक सारणी दी गई है :

वस्तु की पहली संख्या	वस्तु की दूसरी संख्या	दूसरी संख्या पहला मूल्य	वस्तु का पहला मूल्य	वस्तु का दूसरा मूल्य	दुसरी मूल्य दूसरा मूल्य
3	9	$\frac{9}{3}=3$	36	108	$\frac{108}{36}=3$
18	9	$\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$	216	108	$\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$

इससे ज्ञात हुआ कि वस्तु की संख्या तीन गुनी होने से उसका मूल्य भी तीन गुना हो जाता है। वस्तु की संख्या आधी हो जाने से उसका मूल्य भी आधा हो जाता हैं।

पहले की स्तिति में कॉपियों की संख्या एक चर राशि है। कॉपि का मूल्य एक चर राशि है।

हम पहले की चर राशि (कॉपियों की संख्या) के लिए x संकेत का व्यवहार करेंगे और दूसरी चर राशि के लिए (कॉपि का मूल्य) y संकेत का व्यवहार करेंगे। कॉपियों की पहली संख्या के लिए x_1 और कॉपियों की दूसरी संख्या के लिए x_2 का व्यवहार करेंगे।

x_1 कॉपियों के मूल्य के स्थिर, y_1 रुपए और x_2 कॉपियों के मूल्य के लिए y_2 रुपए का व्यवहार करने से सारणी के अनुसार हमें मिलेगा :

फिर हमें ज्ञात होगा : $x_1=3$, $y_1=36$

$x_2=9$, $y_2=108$

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{36}{3}=12$$

$$\frac{y_2}{x_2}=\frac{108}{9}=12$$

अतएव, हमें ज्ञात हुआ $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$ इसे भी इस प्रकार लिख सकते हैं $x_1y_2=x_2y_1$

हमने देखा -

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{9}{3}=3$$

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{108}{36}=3$$

$$\therefore \frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}$$

इसे भी - लिख सकते हैं। $x_1y_2=x_2y_1$

दो चर राशियों में पहला संपर्क जैसा संपर्क रहने से हम कह सकते है कि दोनों चर राशियों में सीधा चलन संबंध है। इसे हम संकेत से लिखते हैं- $y \alpha x$।

इसे हम y और x के बीच सीधा चलन है ऐसा पढ़ते हैं।

हमें ज्ञात हुआ :

क्या आप जानते हैं?

$x \alpha y$ के क्षेत्र में हम लिखते हैं :

$x_1y_2=x_2y_1$

जहाँ बहुत के मूल्य से एक की मूल्य ज्ञात करते समय यह कम हो जाता हैं, उस क्षेत्र में दोनों में सीधा चलन संबंध रहता है।

उदाहरण - 10

बी.पी.एल कार्ड में 20 कि.ग्रा. चावल का मूल्य 40 रुपए हैं। तब 13 कि.ग्रा. चावल का मूल्य कितना है ?

हल :

मान लीजिए, चावल का परिमाण = x कि.ग्रा. है। उसका मूल्य y रुपए हैं।

(20 कि.ग्रा. चावल का मूल्य जितना है, 1 कि.ग्रा. चावल का मूल्य उससे कम है। अतएव, यहाँ चावल के परिमाण और इसके मूल्य के बीच सीधा चलन संबंध है)

$\therefore \; y \alpha x$

$x_1 y_2 = x_2 y_1$

$20 \times y_2 = 13 \times 40$

$\Rightarrow y_2 = \dfrac{13 \times 40}{20}$

$\Rightarrow y_2 = 2 \times 13 = 26$

$\therefore$ 13 कि.ग्रा. चावल का मूल्य = 26 रुपए हैं।

उदाहरण-11

किसी कार्य में तैनात 30 मजदूरों को 3000 रुपए मजदूरी मिलती है। उसी कार्य में तैनात 18 मजदूरों को मजदूरी में कितने रुपए मिलेंगे ? कितने मजदूरों को रोज 4300 रुपए मजदूरी मिलेंगी ?

हल :

मजदूरों की संख्या बढ़ने से मजदूरी बढ़ेगी। मजदूरो की संख्या कम होने से मजदूराी उसी अनुपात से कम होगी। अतएव यहाँ मजदूरों की संख्या और मजदूरी के बीच सीधा चलन संबंध है, मजदूरों की संख्या के x और मजदूरी को y रूपए मान लेने से सारणी इस प्रकार होगी ?

x (मजदूरों की संख्या)	x_1=30	x_2=18	x_3= ?
y (मजदूरी)	y_1=3000	y_2= ?	y_3=4300

$\therefore$ यहाँ x और y के बीच सीधा चल संबंध है।

तब $x_1 y_2 = x_2 y_1$

$\Rightarrow 30 \times y_2 = 18 \times 3000$

$\Rightarrow y_2 = \dfrac{18 \times 3000}{30}$

$\Rightarrow y_2 = 1800$

$\therefore$ 18 मजदूरों की मजदूरी 1800 रुपए होंगे।

फिर,

$x_1 y_3 = x_3 y_1$

$30 \times 4300 = x_3 \times 3000$

$\Rightarrow x_3 \times 3000 = 30 \times 4300$

$\Rightarrow x_3 = \frac{30 \times 4300}{3000}$

$\Rightarrow x_3 = 43$

∴ मजदूरों को - रुपए मजदूरी मिलेगी।

अभ्यास 8.5

1. नीचे की सारणियों से कितनी चलराशि x और y के बीच सीधा चलन संबंध है, बताइए।

(क)

x	12	8	36
y	72	48	216

(ख)

x	2	3	4
y	4	9	16

(ग)

x	5	10	15
y	10	15	20

(घ)

x	48	24	12
y	24	12	6

2. सीधे चलन में दी गई सारणी में तारा चिह्नित स्थानों के लिए उपयुक्त मान ज्ञात कीजिए :

(क)

x	10	18	☆
y	220	☆	484

(ख)

x	14	2	☆
y	☆	4	76

3. चलन नियम के अनुसार निम्न प्रश्नों का हल कीजिए:

(क) एक कारखाने में एक हफते में (रविवार को कारखाना बंद रहता है।) 840 कनस्तर रंग बनाया जाता है, 4200 कनस्तर रंग बनाने के लिए कितने दिन लगेंगे ?

(ख) 12 मीटर ऊँची खंभे की परछाई 20 मीटर हैं। उसी समय कितने ऊँचें खंभे की परछाई 30 मीटर होगी ? 26 मीटर ऊँचें खंभ की परछाई कितने मीटर होगी ?

(ग) एक परिवार में रोज 10 कि.ग्रा. चावल खर्च होता है। जनवरी 1 तारीख से फरवरी 11 तारीख तक उनके परिवार में कितना चावल खर्च होगा ?

(घ) किसी काम के लिए 2 बोरे सीमेंट के साथ 12 बोरे बालू मिलाई जाती है। उसी काम के लिए 60 बोरे बालू के साथ किसने बोरे सीमेंट मिलया जाएगा ? 23 बोरे सीमेंट के साथ कितने बोरे बालू मिलाई जाएगी ?

(ङ) एक विद्यालय में छठी कक्षा की 30 छात्राओं के लिए पोशाक बनाने के लिए कपड़ों का क्रयमूल्य 2100 रुपए हैं। तब सातवीं कक्षा की 22 छात्राओं के लिए पोशाक बनाने के लिए कपड़े शरीर के लिए कितने रुपए लगेंगे ?

8.5.2. प्रतिलोमी चलन

यह उदाहरण देखिए :

एक दीवार बनाने के लिए 2 आदमी 6 दिन समय लेते हैं।

अतएव, एक आदमी उस काम को $6\times 2=12$ दिन समय लेंगे।

4 आदमी उस काम को $12\div 4=3$ दिन समय लेंगे।

यहाँ आदमी दुगुने हुए तो दिन की संख्या आधी हुई।

उस तथ्य के लिए एक सारणी बनाएँगे :

आदमी की संख्या (x)	दिन की संख्या (y)	आदमी की संख्या × दिन की संख्या $x\times y$
$x_1=2$	$y_1=6$	$x_1\times y_1=2\times 6=12$
$x_2=4$	$y_2=3$	$x_2\times y_2=4\times 3=12$

ऊपर के उदाहरण में आपने क्या देखा ?

एक चर (आदमियों की संख्या) दुगुना होने के समय दूसरा चर (दिनों की संख्या) आधा गुना होता है। दोनों चरों में ऐसे संबंध को प्रतिलोमी चलन कहते हैं।

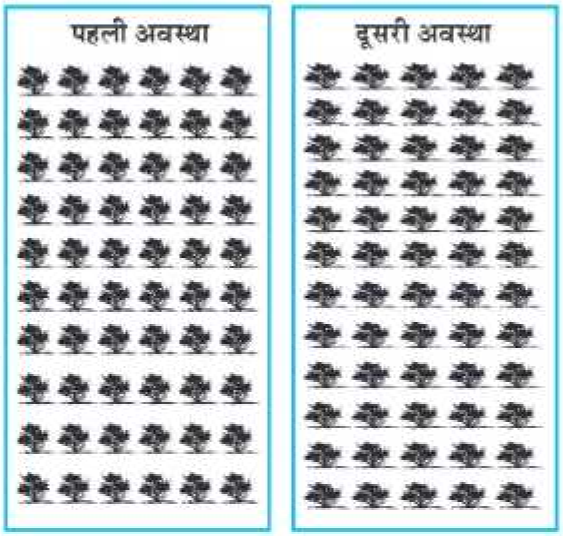
हम इसे संकेत से लिखते हैं -

$$y \propto \frac{1}{x}$$

इसे हम पढ़ते हैं y और x के बीच प्रतिलोमी चलन संबंध प्रश्न का हल करते समय प्रतिलोमी चलन के क्षेत्र में नीचे का सूत्र प्रयुक्त होता है।

उदाहरण -12 :

फूल के एक बगीचे में (बगल के चित्र में जैसे है प्रत्येक पंक्ति में 6 के हिसाब से कुल 10 पंक्तियाँ फूल के पौधे 5 लगाए गए हैं। अगर उन पंक्ति में फूलों के पौधों की संख्या कितनी होती ? चलन प्रणाली से हल कीजिए :



हल :

पंक्तियों की संख्या (x) और प्रत्येक पंक्ति में पौधों की संख्या (y)

अगर पंक्ति की संख्या बढ़ेगी तो निश्चित रूप से पंक्ति में पौधों की संख्या अनुपात के अनुसार कम होगी। अतएव, यहाँ x और y के बीच प्रतिलोमी चलन का संबंध है।

अतएव , $x_1y_1 = x_2y_2$ ....(1)

पहली स्थिति में पंक्तियों की संख्या $(x_1) = 10$

प्रत्येक पंक्ति में पौधे की संख्या $(y_1) = 6$

दूसरी स्थिति में पंक्तियों की संख्या $(x_2) = 5$

प्रत्येक पंक्ति में पौधे की संख्या $(y_2) = ?$

समीकरण में x_1, y_1 और x_2 का मान प्रतिस्थापित करने से मिला।

$$10 \times 6 = 5 \times y_2$$

$$\Rightarrow 5 \times y_2 = 10 \times 6$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{10 \times 6}{5} = 12$$

$\therefore$ प्रत्येक पंक्ति में पौधे की संख्या $= 12$ हैं।

उदाहरण- 13 :

एक बस को कटक से देवगड़ जाने के लिए 1 घंटे में 100 कि.मी. की रफतार से जाकर 8 घंटो में पहुँचती है। एक घंटे में 80 कि.मी. की रफतार से जाने से कितना समय लगेगा ?

हल :

एक निश्चित दूरी तय करने के लिए रफतार बढ़ने से समय कम लगता है। अत: दोनों चर राशियों में प्रतिलोमी चलन संबंध है।

बस की रफतार को x घंटा प्रति कि.मी. और समय के y घंटा मानकर लिखने से होगा :

प्रथम रफतार $x_1 = 100$ कि.मी. प्रति घंटा

प्रथम समय 8 घंटे $(t_1) = 8$

द्वितीय रफतार $(x_2) = 80$ कि.मी. प्रति घंटा

द्वितीय समय $(t_2) = ?$

प्रतिलोमी चलन की सूत्र के अनुसार $x_1 t_1 = x_2 t_2$

$$100 \times 8 = 80 \times t_2$$

$$\Rightarrow 80 \times t_2 = 100 \times 8$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{100 \times 8}{80}$$

$$\Rightarrow t_2 = 10$$

हल कीजिए:

पानी की एक टंकी में 12 नल लगे हैं। 8 नल खुले रहने से टंकी 6 घंटों में भर जाती है। समी नल खुले रहने से टंकी कितने समय में भर जाएगी ?

हल के लिए सूचना :

नलों की संख्या बढ़ने से टंकी के भर जाने का समय कम होगा। अतएव, यह प्रतिलोमी चलन है। यहाँ नलों की संख्या के x और समय को y घंटा मानना होगा।

अभ्यास 8.5

1. निम्न चर जोड़ों में से किन चर जोड़ो में सीधा चलन और किस चर जोड़ा में प्रतिलोमी चलन संबंध है, उसे चिह्नित कीजिए।

   (क) एक बाँध बनाने के लिए नियुक्त लोग आवश्यक और बाँध बनाने के लिए दिनों की संख्या।

   (ख) एक पैकट में ढाल का परिमाण और पैकेट का मूल्य।

   (ग) एक स्कुटर चालक एक निश्चित दूरी तय करने के समय उसके स्कुटर का बैग और दूरी तय करने का समय।

   (घ) एक निश्चित व्यय से भोज में भागलेने वाले बच्चों का देय और प्रत्येक का देय।

   (ङ) एक निश्चित परिमाण के पेय जल को बराबार आकार वाली बोतलों में भरते समय प्रत्येक बोतल का आकार तथा बोतलों की संख्या।

2. नीचे दिए गए सारणियों में च x और y जोड़ें है। उनको लेकर $\frac{x}{y}$ और xy का मान ज्ञात कीजिए। इसे देखकर चर राशिओं में सीधा चलन है प्रतिलोमी चलन संबंध है, तय कीजिए।

(क)

एक निश्चित दूरी तय करनन का वैग, एक घंटे में (x)	60	40	48
दूरी तय करने का समय (y) घंटों में	4	6	5
$x \times y$			
$\frac{x}{y}$			

(ख)

गेदों की संख्या (x)	4	6	10	12
गोदों का मूल्य रुपए में (y)	48	72	120	144
$x \times y$				
$\frac{x}{y}$				

(ग) एक कनस्तार के तेल को बराबर आकार की बोतलों में भरा गया

तेल का परिमाण लीटर में (x)	2	3	5
बोतलों की संख्या (y)	15	10	6
$x \times y$			

3. नियम सारणी में चर राशि x और y में प्रतिलोमी चलन का संपर्क है। सारणी की अज्ञात राशियों का मान ज्ञात कीजिए।

x	72	90	60	x_1	40	x_2
y	10	8	y_1	15	y_2	20

4. निम्न प्रश्नों का चलन नियम में हल कीजिए :

(क) धल बाबू घर से स्कुटर से एक घंटे में 40 कि.मी. वेग से जाकर ऑफिस में $2\frac{1}{2}$ घंटे मे पहुँचते हैं। कितनी वेग से जाने पर उनको 2 घंटे लगेंगे ?

(ख) पानी की एक टंकी 5 नलों में 40 मिनट में भर जाती है। कितने नल चालु होने से टंकी 50 मिनट में भर जाएगी ?

(ग) एक दौड़ प्रतियोगिता में 24 बच्चों को हिस्सा लेना था। हर प्रतियोगी को 7 विस्कुट देने के लिए बिस्कुट मँगवाए गए थे। प्रतियोगिता में और अधिक 4 प्रतियोगी ने भाग लिया। तब हल प्रतियोगी को कितने बिस्कुट मिलेंगे ?

(घ) एक माचिस डिब्बे में 48 तिलियों रख जोन से सारी तिलियों को रखने के लिए 56 डिब्बे की जरूरत पड़गी है। सारी तिलियों के 64 डिब्बों में रखने से हर डिब्बे में कितनी तिलियाँ रखी जाएँगी ?

8.5.3. संयुक्त चलन

कुछ स्थितियाँ ऐसी हैं, जहाँ तीन चर राशियों में परस्पर संबंध रहता है। एक स्थिति है : एक कार्य किए जाने के समय उसमें कुछ मजदूर तैनात होते हैं। रोज कुछ घंटों के लिए कार्य किया जाता है। कार्य पूरा होने के लिए कुछ दिन लगते हैं।

यहाँ रोज एक निश्चित समय तक कार्य किया जाए तो जितने अधिक मजदूर कार्य में तैनात होंगे, कार्य पूरा होने के दिन उतने कम होते जाऐंगे। इसलिए मजदूरां की संख्या (x) और दिनों की संख्या (y) के बीच परस्पर प्रतिलोमी चलन संबंध रहता है।

$\therefore x \propto \frac{1}{y}$ (जब दिन का कार्य करने का समय z स्थिर है)

मजदूरों की संख्या (x) स्थिर रहे तो प्रत्येक दिन के कार्य करने की घंटी की संख्या z दिनों की संख्या y भी परस्पर प्रतिलोमी चलन में संबंधित हो जाते हैं।

$\therefore y \propto \frac{1}{z}$ (जब मजदुरों की संख्या x स्थिर है)

इस क्षेत्र में माना जाता है कि x, y और z के बीच संयुक्त चलन संगठित होता है। इसके लिए नियम अलग से हैं, आगे इस पर अधिक पढ़ेंगे।

✍ आप इस प्रकार की स्थिति का एक - उदाहरण बताइए।

समय और कार्य :

विद्यालय के बच्चे बगीचे का काम कर रहे थे। फूल के पौधे लगाने के लिए कुछ क्यारियाँ तैयार की गई थीं। प्रत्येक क्यारी की लम्बाई और चौड़ाई बराबर थी। पहले दो क्यारी की मिट्टी को भुरभुरी क्यारी के बाद फूल के पौधे लगाए जाएँगे।

पहली क्यारी में 3 बच्चे काम कर रहे थे और दूसरी में 2 बच्चे। जिस क्यारी में 3 बच्चे काम कर रहे थे, उसका काम 40 मिनट में समाप्त हुआ। पर दूसरी क्यारी का काम समाप्त नहीं हो सका।

शिक्षक ने बडी कक्षा के एक लडके समीर के कार्य की देख-रेख की जिम्मेदारी दी थी। दूसरी क्यारी का काम समाप्त न होने से - शिक्षक से कहा, 'दूसरी क्यारी का काम समाप्त नहीं हो सका है। शायद उस क्यारी में काम करने वाले बच्चे ठीक से काम नहीं करते। शिक्षक ने आकर देखा। उन्होंने कहा, 'अधिक आदमी काम करने पर काम पूरा होने में कम समय लगता है, कम आदमी काम करने पर काम समाप्त होने के लिए अधिक समय लगता है। आप को परेशान होने की जरूरत नहीं।

दूसरी क्यारी का काम समाप्त होने के बाद बच्चे कक्षा में गए। उसके बाद के अंतर में शिक्षक ने समय और कार्य संबंधी हिसाब समझाया: कोई भी कार्य करते समय :

- कुछ मजदूर काम करते हैं।
- उनके कार्य का कुछ परिमाण होता है।
- कार्य करने के लिए कुछ समय लगता है।
- प्रत्येक आदमी का काम करने की कुछ क्षमता होती है। अर्थात् वह एक इकाई के समय (1 दिन या 1 घंटा) कुछ परिमाण का कार्य करता है। इन चार बातों को व्यवहार करके कार्य संबंधी विभिन्न हिसाब किया जाता है।

आइए, कुछ उदाहरणों पर चर्चा करेंगे।:

उदाहरण : 14

हसीना 5 दिनों में 20 गुड़ियाँ बना सकती हैं । 32 गुडियाँ बनाने के लिए कितने दिन लगेंगे ?

चर्च्चा :

नीचे की सारणी देखिए :

हसीना ने 5 दिन काम किया	20 गुडियाँ बनाईं
उसने और 5 दिन काम किया	और 20 गुडियाँ बनाईं
उसने और 5 दिन काम किया	और 20 गुडियाँ बनाईं

यदि वह 5 दिन 5 दिन या 10 दिन काम करेगी तब (20+20) या 40 गुडियाँ बनाएगी।

अर्थात् समय दुगुना होगा तो काम का परिमाण दुगुना होगा।

उसी प्रकार यदि वह (5+5+5) दिन या 15 दिन काम करेगी तो वह (20+20+20) या 60 गुडियाँ बनाएगी।

अर्थात् समय अगर 3 गुना होगा काम का परिमाण भी तीन गुना होगा।

अतएव, हमें ज्ञात हुआ कि समय जितना गुना होगा कार्य का परिमाण भी उतना गुना होगा। अतएव, यहाँ ऐकिक नियम का प्रयोग किया जा सकेगा।

हासिना कितने दिन में 32 गुडियाँ बनाएगी। हमें उसे ज्ञात करना चाहिए। इसलिए पहली उक्ति में हम गुड़ियों की संख्या पहले रखेंगे। हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

हासिना 20 गुडियाँ बनाती हैं 5 दिन में

$\therefore$ वह 1 गुडियाँ बनाती है $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ दिन में

वह 32 गुडिया बनाएगी $\frac{1}{4}\times 32=\frac{32}{4}=8$ दिन में (उत्तर)

ऊपर के उदाहरण में समय और कार्य का एक संबंध :

5 दिन में हासिना 20 गुडियाँ बनाती है।

1 दिन में बनाती है $\frac{20}{5}=4$ गुडियाँ

हमें पता चला कि हासिना की गुडियाँ बनाने की दक्षता है। दिन में 4 गुडियाँ बनाती।

इकाई समय में कार्य - परिमाण ही काम करने वाले की कार्य दक्षता है।

हमें ज्ञात हुआ :

कार्यदक्षता अर्थात् 1 घंटे (या एक दिन) में किए जानेवाला कार्य का परिमाण = $\frac{\text{कुल कार्य}}{\text{उस कार्य के लिए}}$

अब इस नियम को देखें:

32 गुडियाँ बनाने के लिए समय ज्ञान करने के लिए आवश्यक समय = $\frac{32}{4}$

अर्थात् कार्य करने का समय = $\frac{\text{कुल कार्य}}{\text{एक दिन का कार्य}}$

सामान्यत: हम कह सकते हैं :

कार्य करने के लिए आवश्यक समय = $\frac{\text{कार्य परिमाण}}{\text{इकाई समय का कार्य}}$

विकल्प प्रणाली :

समय जितना गुना होगा कार्य का परिमाण भी उतना गुना होगा। अतएव, यहाँ समय (t) और कार्य का परिमाण (x) के बीच सीधा चलन संबंध है।

अर्थात् $\frac{t_1}{t_2} = \frac{x_1}{x_2}$ ---- (1)

यहाँ प्रथम स्थिति में t_1=5 दिन, x_1=20 गुडियाँ

द्वितीय स्थिति में कार्य परिमाण x_2=32 गुडियाँ

समीकरण 1 में इन मानों को प्रतिस्थापित करने से $\frac{5}{t_2} = \frac{20}{32}$ होगा।

$$\Rightarrow 5 \times 32 = 20 \times t_2$$

$$\Rightarrow 20 \times t_2 = 5 \times 32$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{5 \times 32}{20} = 8$$

∴ हासीना को 32 गुडियाँ बनाने के लिए 8 दिन लगेंगे।

उदाहरण - 15

रमा एक काम 3 दिन में समाप्त कर सकती है। सनत उस काम को 6 दिन में समाप्त कर सकता है।

रमा और सनत एक साथ करेंगे तो काम कितने दिन में समाप्त होगा ?

हल :

रमा एक काम को 3 दिन में समाप्त कर सकती है।

∴ रमा के 1 दिन का काम $= \frac{1}{3}$ भाग

सनत उस काम को 6 दिन में समाप्त कर सकती है।

∴ सनत के 1 दिन का काम $= \frac{1}{6}$ भाग

रमा और सनत एक साथ काम करेंगे तो उनके 1 दिन का कार्य $= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ भाग

उनको कार्य पूरा करने के समय लगेगा $= \frac{\text{कार्यका परिमाण}}{\text{उनके- दिन का कार्य}}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \quad \text{(पूरा कार्य 1 है)}$$

$$= 1 \times \frac{2}{1} = 2 \quad \text{दिन}$$

उदाहरण - 16

1 दिन में 5 आदमी 2 हेक्टर जमीन में पानी भर देते हैं। कितने आदमी 1 दिन में 6 हेक्टर जमीन में पानी भर सकेंगे ?

हल :

यहाँ आदमियों की संख्या ज्ञात करने को दिया गया है। अर्थात् प्रथम उक्ति की आदमियों की संख्या अंत में रखेंगे।

2 हेक्टर जीमन में 1 दिन में पानी भरते हैं 5 आदमी

1 हेक्टर जमीन में 1 दिन में पानी भरेंगें $\frac{5}{2}$ आदमी

6 हेक्टर जमीन में 1 दिन में पानी भरेंगे $\frac{5}{2}\times 6 = 15$ आदमी

✍ समय स्थिर हो तो आदमियों की संख्या और कार्य के परिमाण के बीच सीधा चलन संबंध रहता है। चलन प्रणाली से भी इस प्रश्न का हल किया जा सकता है। खुद कोशिश कीजिए।

उदाहरण - 17

एक कार्य को फनी 30 दिन में और बीरु 20 दिन में कर सकते हैं। दोनों ने एक साथ काम करना शुरू किया। काम शुरू होने के 2 दिन के बाद बीरु काम छोड़ कर चला गया। तब काम समाप्त होने के कुल कितने दिन लगेंगे ?

सूचना : यहाँ फनी ने कार्य के प्रारम्भ से समाप्ति तक काम किया है पर बीरु ने सिर्फ दो दिन काम किया है। पूरे कार्य से बीरु का काम घंटा देगे। शेष कार्य फनी ने किया है।

हल :

बीरु 20 दिन में कार्य समाप्त करता है,

$\therefore$ बीरु 1 दिन में कार्य का भाग करता है $= \frac{1}{20}$

बीरु 2 दिनों में कार्य का भाग करता है $= \frac{1}{20}\times 2 = \frac{1}{10}$

$\therefore$ कार्य का शेष भाग $= 1-\frac{1}{10} = \frac{10-1}{10} = \frac{9}{10}$

फनी 30 दिन में कार्य समाप्त करता है।

फनी 1 दिन में कार्य का भाग करेगा $= \frac{1}{30}$

फनी को $\frac{9}{10}$ भाग कार्य काम करना होगा

फनी के लिए आवश्यक समय $= \frac{\text{कुल कार्य}}{\text{एक दिन का कार्य}}$

$$=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{30}}=\frac{9}{10}\times\frac{30}{1}=27 \text{ दिन}$$

∴ कार्य समाप्त होने के लिए कुल 27 दिन लगेंगे।

उदाहरण - 18

रोज 6 घंटे काम करके 20 मजदूर 7 दिन में एक काम कर सकते हैं। 28 मजदूर रोज 5 घंटे काम करके उस काम को कितने दिन में पूरा करेंगे ?

हल :

पहले मजदूर रोज 6 घंटे के हिसाब से 7 दिन काम करते हैं

उन्होनें कुल $7 \times 6 = 42$ घंटे काम किया है

एक कार्य 20 मजदूर 42 घंटे में समाप्त करते हैं

उसी कार्य को 1 मजदूर 42×20 घंटे में करेंगे

उसी कार्य को 28 मजदूर करेंगे $=\frac{42\times20}{28}=30$ घंटे में

वे रोज 5 घंटे काम करते हैं।

∴ 30 घंटे काम के लिए दिनों का संख्या $=\frac{30}{5}=6$ दिन।

अभ्यास 8.7

1. विद्यालय का एक कमरा बनाने के लिए 20 मजदूरों को 13 दिन लगते हैं। तब 26 मजदूर उस काम को कितने दिन में पूरा करेंगें ?
2. नित्यानन्द 6 दिन में 20 टोकरियाँ बना सकता है। तब 70 टाकरियाँ बनाने के लिए उसे कितने दिन लगेंगे ?
3. सुजाता हाथ करघे से 4 गमछे बुनने के लिए 20 दिन का समय लेती है। वह 45 दिन में कितने गमछे बुन सकेगी ?
4. एक कन्याश्रम में 50 छात्राओं के लिए 30 दिन का भोजन सामग्री मौजूद थी और 10 छात्राएँ वहाँ आ गई। मौजुद भोजन सामग्री कितने दिन तक जाएगी ?
5. एक बढ़ई 5 दिन में 2 अलमारियाँ बना सकता है। उससे 10 अलमारियाँ बनाने के लिए कहा गया। वह कितने दिन में काम पूरा कर पाएगा ?

6. 7 मजदूर एक सड़क की मरम्मत का काम 8 दिन में पूरा करते हैं। यदि 4 मजदूर काम करेंगे तब काम पूरा होने के लिए कितने दिन अधिक लगेंगे ?

7. 15 मजदूर रोज 6 घंटे कार्य करके एक काम 8 दिन में पूरा करते हैं। 10 मजदूरों को उस काम को 9 दिन में पूरा करने के लिए रोज कितने घंटे काम करना पड़ेगा ?

8. एक जहाज की सामग्री को 10 दिन में उतारने के लिए 280 मजदूरों को तैनात किया गया। सिर्फ 3 दिन में पूरी सामग्री का $\frac{1}{4}$ भाग उतारा गया और कितने अधिक मजदूरों को काम में नियोजित करने से निर्धारित समय पर काम पूरा हो सकेगा ?

9. एक कार्य को रोहित 20 दिन में और संबित 25 दिन मे कर सकते हैं। दोनों ने एक साथ काम शुरू किया। काम 5 दिन के बाद संबित ने काम बंद कर दिया। शेष कार्य पूरा करने के लिए रोहित को कितने दिन लगेंगे ?

10. दुना एक मकान में रंग पोतने का काम शुरू करके 9 दिन में $\frac{3}{10}$ भाग पूरा कर सका। दुना के साथ कांचन ने काम किया और शेष काम - दिन में पूरा हुआ। कांचन अकेली उस काम को कितने दिन में कर सकेगी ?

11. संजु 2 घंटे में 13 पृष्ठ टाइप कर सकती है। तब उसे 195 पृष्ठ टाइप करने को कितना समय लगेगा ?

12. 12 पुरुष या 15 महिलाएँ एक काम को 20 दिन में कर सकती हैं। यदि उस काम के लिए 8 पुरुष और 10 महिलाएँ नियोजित होगें तो वह काम कितने दिन में पूरा होगा ?

बताइए:

- क्या आपने विश्व प्रसिद्ध कोणार्क मंदिर देखा है ?
- आप को पता होगा कि कोणार्क मंदिर बनाने के लिए 1200 को कारीगरों को 12 वर्ष का समय लगा था।
- अब बताइए कि राजा लांगुला नरसिंह देव कितने कारिगरों को नियुक्त करते तो काम चार वर्ष में समाप्त होता ?
- कितने कारीगर काम करते तो काम 10 वर्ष में पूरा हो जाता।

8.7. समय और दूरी

हम पैदल चलकर, साइकिल से, स्कुटर से या दूसरे बाहनों से एक स्थान से दूसरे स्थान में जाते हैं।

- उस समय हम एक निश्चित दूरी तय करते हैं। यह दूरी कम हो सकती है, अधिक भी।
- किसी दूरी के तय करने समय हम कुछ समय लेते हैं। वह भी दूरी के अनुसार कम या अधिक हो सकता है।

* हम पैदल जाते समय एक घंटे में जितनी दूरी तय करते हैं, साइकिल से जाते समय उसी एक घंटे में अधिक दूरी तय करते हैं। मानक समय (एक घंटा, एक मिनट या एक सेंकेड) में तय करनेवाली दूरी की गति का वेग कहते है। हमारा वेग भी कम या अधिक हो सकता हैं।

इसलिए प्रत्येक गति के साथ ऊपर के तीनों (दूरी, समय और वेग) चर राशियाँ संबंधित हैं। आइए देखें, उनमें क्या संबंध है ?

बगल के चित्र में

'क' से 'ख' तक के रास्ते की लम्बाई 24 कि.मी. है। रघुवीर साइकिल से 'क' से 'ख' तक गए। इस दूरी को तय करने के लिए उन्होनें 3 घंटे का समय लिया। तब उन्होनें हर घंटे में कितनी दूरी तय की ?

3 घंटे में तय की गई दूरी 24 कि.मी. है।

$\therefore$ 1 घंटे में तय की गई दूरी $= \frac{24}{3} = 8$ कि.मी.है।

रघुवीर का साइकिल चलाने का वेग हर घंटे में 8 कि.मी. है।

सुनीता ने उसकी दूरी को स्कुटर से आधे घंटे में तय किया। तब उसका स्कुटर चलाने का वेग कितना है ?

$\frac{1}{2}$ घंटे में सुनीता दूरी तय करती है =24 कि.मी.

$\therefore$ 1 घंटे में सुनीता दूरी तय करेगी $= 24 \div \frac{1}{2}$ कि.मी. $= 24 \times 2$ कि.मी. $= 48$ कि.मी.

अत: सुनीता का वेग हर घंटे में 48 कि.मी. है।

हमने रघुवीर के वेग का हिसाब कैसे किया ?

रघूबीर का वेग $= \frac{\text{24 कि.मी.}}{\text{3 घंटा}}$

अर्थात् वेग $= \frac{\text{तय की गई दूरी}}{\text{लगाया गया समय}}$

सुनीता के क्षेत्र में वेग $= \frac{\text{सन्तोष तय की गई दूरी}}{\text{सन्तोष लगाया गया समय}}$

संक्षेप में हम लिख सकते हैं -

$$\text{वेग} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

और भी देखें तो दूरी की इकाई कि.मी. और समय की इकाई घंटा होने पर वेग की इकाई हर घंटे में कि.मी. होती हैं।

हमने देखा कि वेग ज्ञात करना एक भाग प्रक्रिया है।

* यहाँ दूरी भाज्य है।
* समय भाजक है।

अब बताइए:
दूरी की इकाई मीटर और समय की इकाई मिनट हो तो वेग की इकाई क्या होगी ?

- वेग ही भागफल है। (यहाँ शेषफल नहीं होगा।)

हम जानते हैं। भाज्य = भाजक × भागफल

दूरी = समय × वेग

समय, दूरी और वेग में से किन्ही दो ज्ञात हों तो, हम ऊपर के दो सूत्रों मे से किसी एक का प्रयोग करके दूसरे को ज्ञात कर सकते हैं।

समय और दूरी दिए गए तो वेग ज्ञात करने का उदाहरण

उदाहरण- 19

जाफर ने 30 कि.मी. दूरी को स्कुटर से 40 मिनट तय किया। वह कितने वेग से स्कुटर चला रहा था ?

हल :

समान्यात : वेग के प्रति घंटे में कि.मी. या प्रति मिनट में मीटर वेग के रूप में व्यक्त किया जाता।

अब दूरी को कि.मी. और समय को घंटे के रूप में लेंगे ।

यहाँ दूरी = 30 कि.मी.

समय =40 मिनीट = $\frac{40}{60}$ घंटे = $\frac{2}{3}$ घंटे

वेग = $\frac{\text{दूरी (कि.मी. में)}}{\text{समय (घंटे में)}}$

$= \frac{30}{\frac{2}{3}} = \frac{30 \times 3}{2}$

= 45 कि.मी. प्रति घंटा

∴ वेग $\frac{\text{दूरी (मीटर में)}}{\text{समय (मिनिट में)}}$ $= \frac{30000}{40}$ मी. प्रति मिनट

= 7500 मी. प्रति मिनट

यहाँ प्रति घंटे में कि.मी. की इकाई में वेग को व्यक्त करना चाहिए, क्योंकि इस क्षेत्र में वेग को छोटी सख्या से व्यक्त होना है।

वेग और दूरी दिए गए तो समय ज्ञात करने का उदाहरण

उदाहरण - 20

सुरेश घंटा प्रति 12 कि.मी वेग से साइकिल चलाता है। वह 2 कि.मी. 400 मी. दूरी को कितने समय में तय करेगा ?

हल :

यहाँ दूरी = 2 कि.मी. 400 मीटर

$$= 2\frac{400}{1000} \text{कि.मी.} = 2\frac{2}{5} \text{कि.मी} = \frac{12}{5} \text{कि.मी.}$$

वेग = प्रति घंटा 12 कि.मी.

हम जानते हैं :

समय × वेग = दूरी

$$\therefore \text{समय} \times 12 = \frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow \text{समय} = \frac{12}{5} \div 12 = \frac{12}{5} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{5} \text{ घंटा}$$

$$\Rightarrow \text{समय} = 12 \text{ मिनट}$$

अब समय के लिए t, वेग के लिए s और दूरी के लिए d संकेत का व्यवहार करेंगे।

अब सूत्रों को लिखेंगे - $s = \frac{d}{t}$, $d = s \times t$

एक निश्चित दूरी को तय करते समय वेग बदलने से समय बदलता है, उसका एक उदाहरण देखें :

उदाहरण-21

मामुनी प्रति घंटा 12 कि.मी. वेग से साइकिल से जाकर जिस दूरी को 45 मिनट में तय किया,बुबुनी प्रति घंटा 10 कि.मी. वेग से साइकिल से जाकर उसी दूरी को कितने समय में तय करेगा ?

हल :

यहाँ दोनों का वेग अलग अलग है।

मामुनी का साइकिल चलाने के क्षेत्र में

वेग =12 कि.मी. प्रति घंटा

$$\text{समय} = 45 \text{ मिनट} = \frac{45}{60} \text{ घंटा} = \frac{3}{4} \text{ घंटा}$$

$$\text{दूरी} = t \times s = \frac{3}{4} \times 12 \text{ कि.मी} = 9 \text{ कि.मी.}$$

बुबुनी का साइकिल चलाने के क्षेत्र में दूरी -

पहले की दूरी = 9 कि.मी.

वेग प्रति घंटा = 10 कि.मी.

$t \times s = d$

$\Rightarrow t \times 10 = 9$ कि.मी.

$\Rightarrow t = \frac{9}{10}$ घंटा

$= \frac{9}{10} \times 60 = 54$ मिनट

विकल्प प्रणाली : इस प्रश्न का हल चलन प्रक्रिया द्वारा किया जा सकता है।

मामुनी के क्षेत्र में वेग $(s_1) = 12$ कि.मी. प्रति घंटा

समय $(t_1) = 45$ मिनट

बुबुनी के क्षेत्र में वेग $(s_2) = 10$ कि.मी. प्रति घंटा

समय $(s_2) = ?$

एक निश्चित दूरी तय करने समय

सूत्र है : $s_1 t_1 = s_2 t_2$

$12 \times 45 = 10 \times t_2$

$10 \times t_2 = 12 \times 45$

$\Rightarrow t_2 = \frac{12 \times 45}{10}$ मिनट

$= 54$ मिनट

क्या आप जानते हैं?

वेग - अधिक होने से समय - कम होगा। वेग कम होने से समय अधिक होगा। अतएव, वेग और समय के बीच प्रतिलोमी चलन संबंध रहता है।

उत्तर ज्ञात कीजिए:

दो दोस्तों ने A और B एक निश्चित समय तक स्कुटर चलाना शुरू किया। A प्रति घंटा 54 कि.मी. वेग से स्कुटर चलाकर निश्चित समय में 36 कि.मी. दूरी तय की। B उसी समय में 30 कि.मी. दूरी तय की। तब B कितने वेग से स्कुटर चला रहा था ?

बताइए

बराबर वेग से गति करने वाली 500 मी लंबी एक ट्रेन बिजली के एक खंम्बे को जलदी पार कर जाएगी या 300 मी. लंम्बी एक ट्रेन 200 मी. लंबे एक प्लेट फॅार्म को जल्दी पार कर जाएगी ?

अभ्यास 8.8

1. एक स्कुटर प्रति घंटा 40 कि.मी. वेग से जाता है। तो 800 मीटर रास्ता कितने सेकेंड में तय करेगा ?

2. एक ट्रेन की लंबाई 600 मीटर है। बिजली के एक खंबे को इसने 40 सेकेंड में पार कर गई इसका वेग प्रति घंटा कितना है ?

3. सोनाली पैदल चलकर 400 लंबे पुल को 5 मिनट में पार कर गई। 2 घंटे में वह कितना रास्ता तय करेगी ?

4. किशोर बाबू प्रति घंटा 30 कि.मी वेग से जाकर एक स्थान पर 6 घंटे में पहुँचे थे। कितने वेग से जाते तो वे 3 घंटे में पहुँच जाते ?

5. प्रति घंटा 90 कि.मी वेग से जानेवाली एक ट्रेन एक प्लेटफॉर्म पर खडे एक आदमी को 20 सेकेंड में पार कर गई। ट्रेन की लम्बाई कितनी है ?

6. प्रति घंटा 60 कि.मी वेग से घर से कुछ दूरी 30 मिनट में तय करती है। उसी स्थान से वह प्रति घंटा 72 कि.मी. वेग से जाकर ऑफिस में 30 मिनट में पहुँच जाती है। उसके घर से ऑफिस की दूरी कितनी है ?

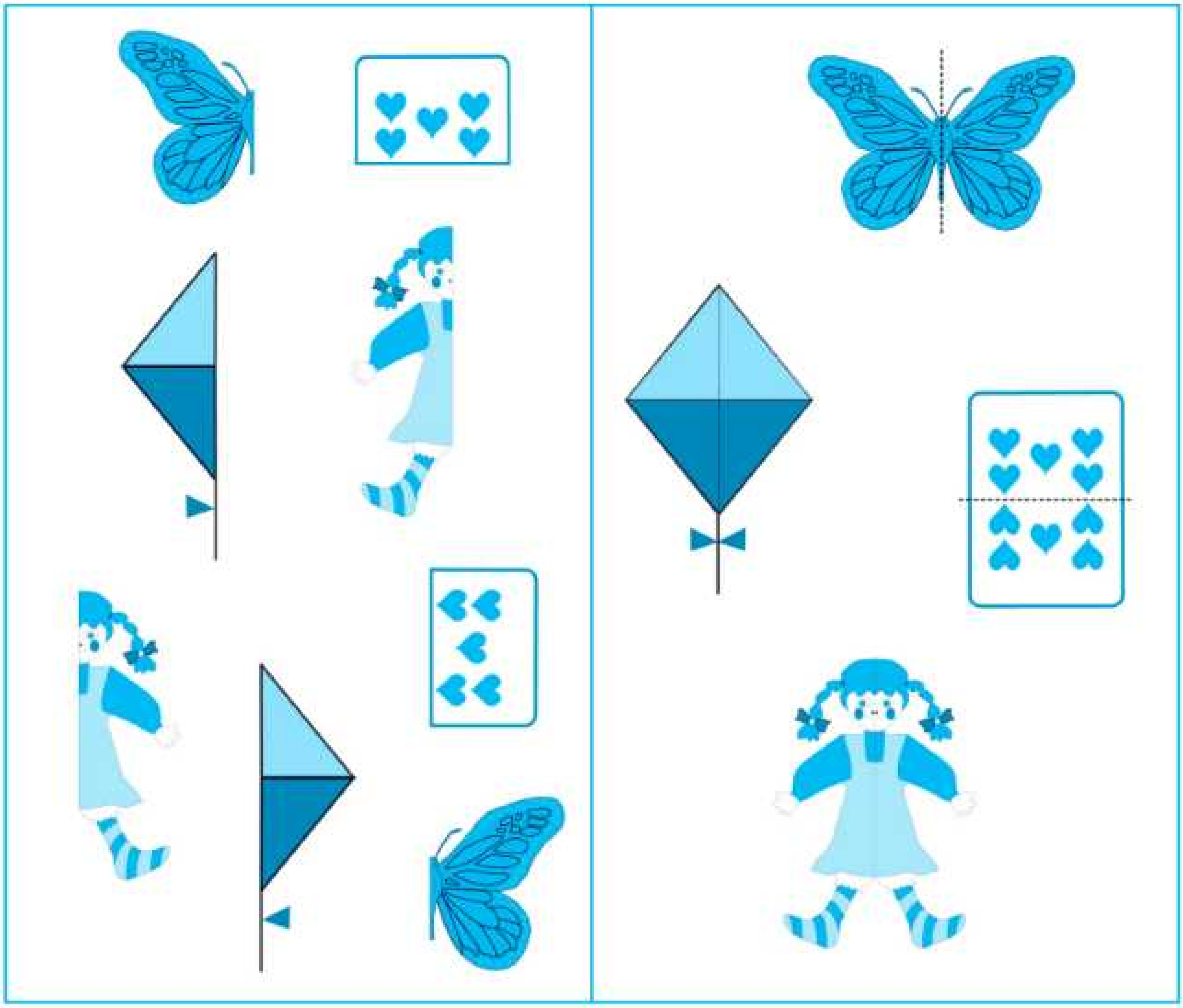
7. एक ट्रेन 30 बिजली के एक खंबे को और 300 मीटर लंबी एक पुल को एक मीनट में पार कर जाती हैं। ट्रेन की लम्बाई और प्रति घंटा वेग ज्ञात कीजिए।

नवम अध्याय

सममिति और सर्वांगसमता

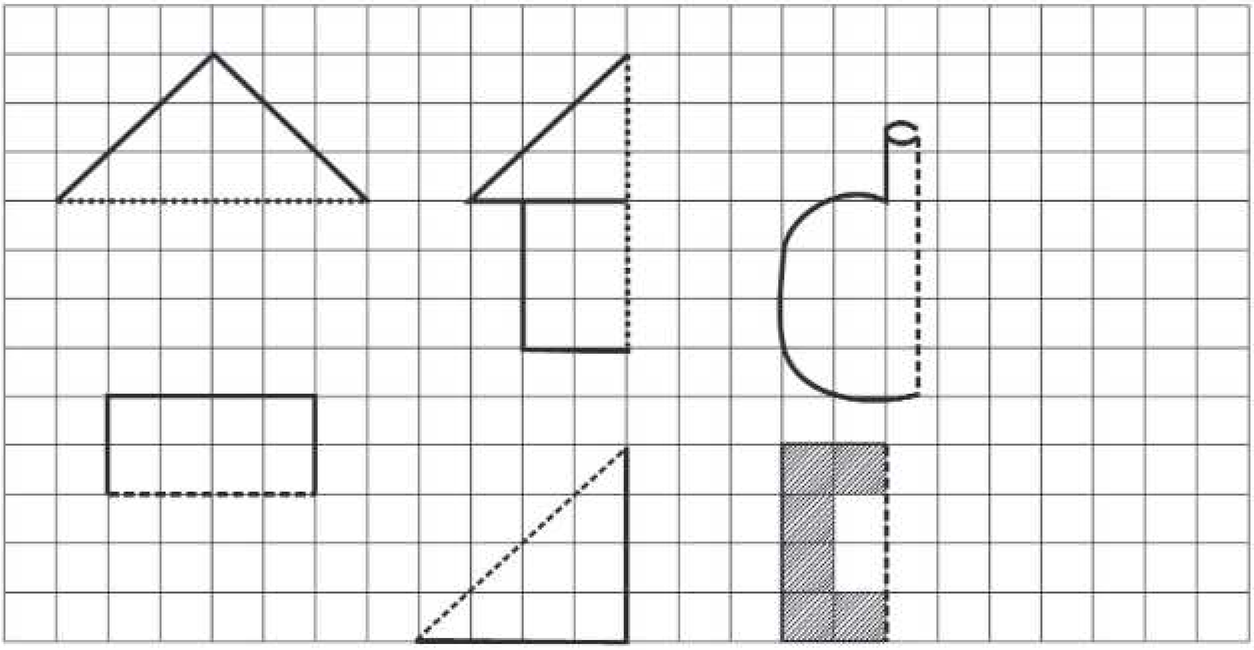
9.1. सममिति :

सिनु और लिनु दो सहेलियाँ हैं। एक दिन लिनु सिनु को घर घूमने गई थी। उसने सिनु के बैग से तस्वीरों के कुछ टुकडे देखे। लिनु ने पूछा, 'तुम्हें ये तस्वीरें कहाँ से मिलीं ? सिनु ने बताया, मैनें इन्हें खुद बनायी हैं। लिनु तस्वीरों के टुकड़ों को जोड़ने लगी। जुड़ जाने के बाद तस्वीरें निम्न प्रकार से दिखाई दीं।

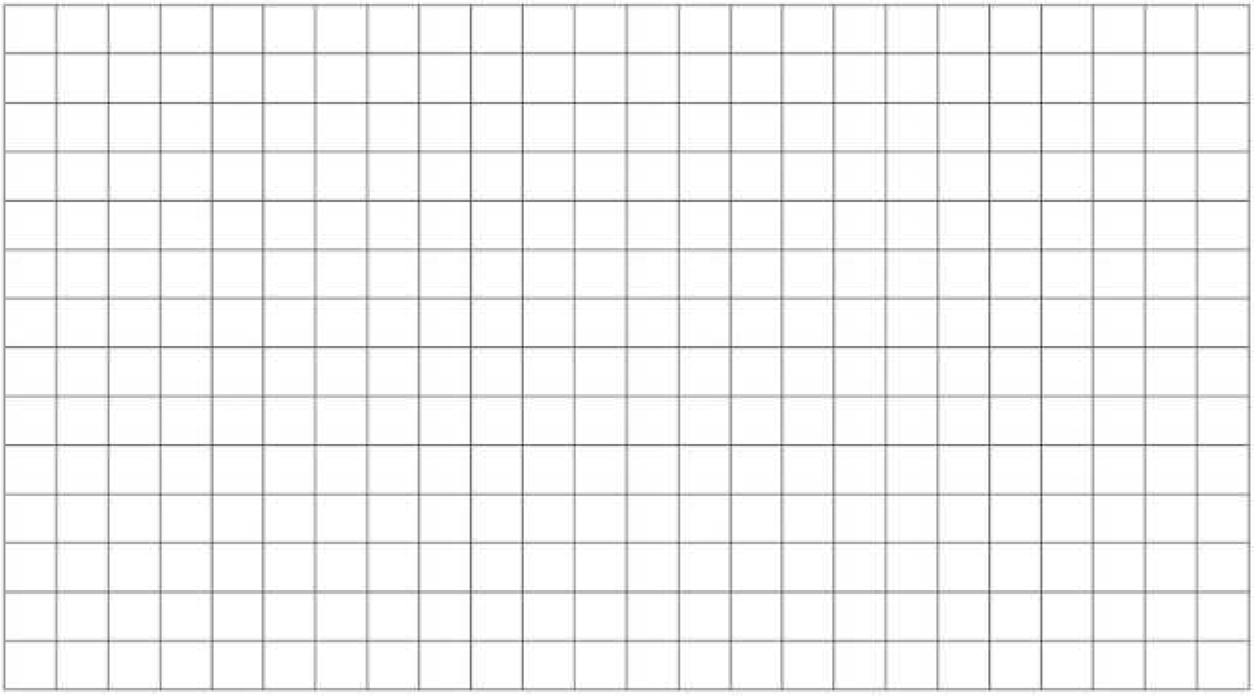


कोठरियों के दाईं ओर की तस्वीरें देखिए। तस्वीरों के बीच की रेखा को ध्यान से देखिए। क्या देखते हैं, लिखिए।

लिनु ने पूछा, 'तुम ऐसी खुबसूरत तस्वीर कैसे बना सकती हो?' सिनु ने कहा, 'में पहले ग्राफ कागज पर तस्वीरें खींचती थीं। बाद में आदत हो जाने से ऐसी तस्वीरें खींच सकती हूँ। सिनु एक ग्राफ कागज लाई और तस्वीरें खींचने लगी। सिनुने कहा, 'मैंने तस्वीर आधी बना दी, तू उसे पूरा करो। देखो, कैसी तस्वीर बनती है? याद रखो, तस्वीर को पूरा करते समय बिन्दु वाली रेखा को दूसरी तरफ - का आधा हिस्सा बनाना होगा।



ऊपर जैसे उदाहरण दिए गए हैं, उसी प्रकार अपने मन मे तस्वीर का आधा हिस्सा पहले बाताइए और बाद में दूसरा हिस्सा पूरा कीजिए।



ये काम लिनु के पिताजी देख रहे थे। उन्होंने कहा 'जानती हो, जिस रेखा वे दोनों तरफ के चित्रों के टुकड़े बराबर हैं उसे क्या कहते हैं?

क्या आप जानते हैं?

कुछ तस्वीरों की बीच में एक रेखा खींचकर या उसे बीच से जोडकर देखने से पताचलता है कि एक तरफ की तस्वीर दूसरी तरफ की तस्वीर को पूरी तरह ढँक लेती है। इस रेखा को रैखिक सममिति यां सममिति कहते हैं।

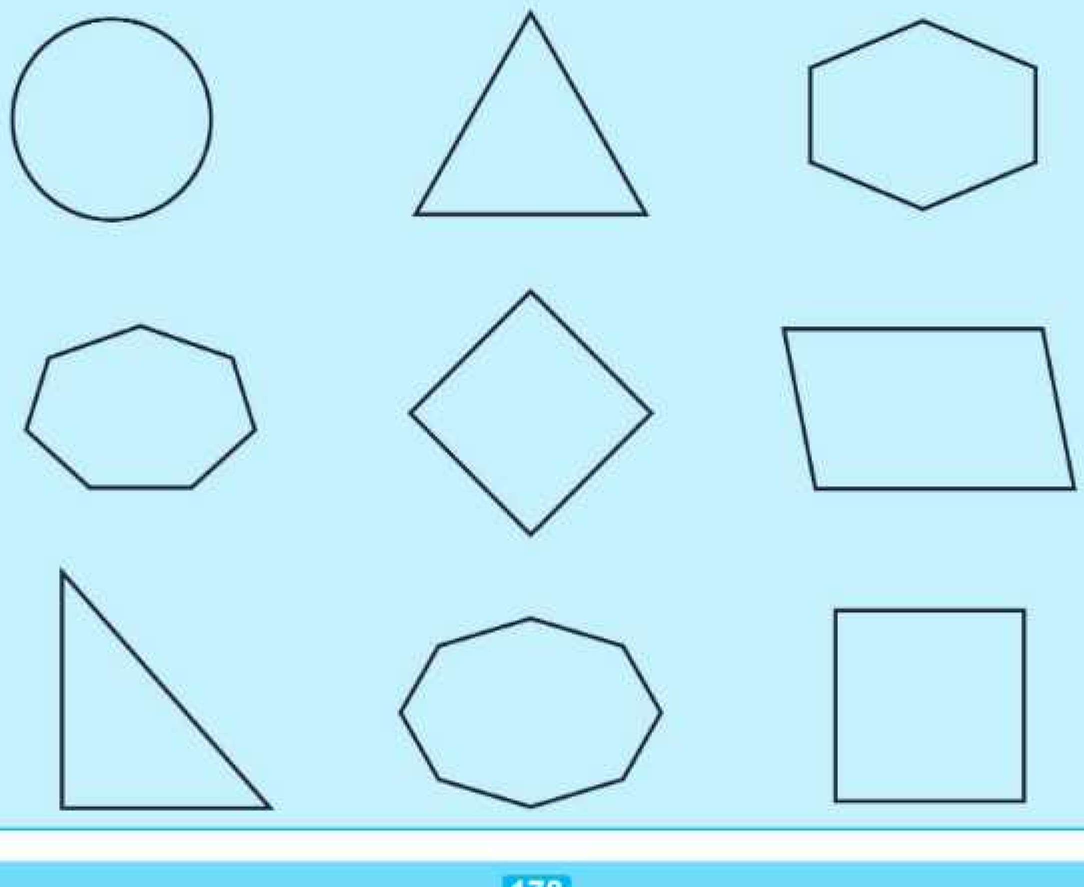
तस्वीर के बीच की रेखा या मोड़ पर एक दर्पण रखने से यदि एक तरफ की तस्वीर का प्रतिबिम्ब दूसरी तरफ की तस्वीर के साथ पूरी तरह समान दिखता है, तब उसी रेखा या मोड़ को सममिति रेखा या सममिति अंकन कहते हैं।

बताइए:

आपके ज्यामिति बाक्से में दो सेट्स्कोयर हैं, क्या वे सममिति आकृति के हैं? इसका कारण क्या है?

नीचे दी गई आकृतियाँ क्या सममिति आकृतियाँ हैं?

✎ इसका कारण दर्शाइए। आवश्यक स्थल पर सममिति - दर्शाइए।



(क) आप अपने परिवेश मे जो जो चीजें देखते हैं, उनमें से किन-किन आकृतियों में सममिति पाई जाती हैं, उनमें से पाँच से पाँच के उदाहरण दीजिए।

(ख) किन-किन आकृतियों में सममिति नहीं हैं, उनके पाँच उदाहरण दें।

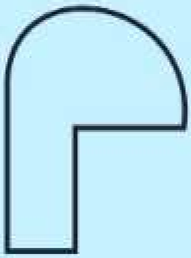
सममिति आकृति	बिना सममिति की आकृतियाँ
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

नीचे की आकृतियाँ देखिए। जो आकृतियाँ सममित हैं उनमें सममित रेखाएँ खींचिए।

(क)

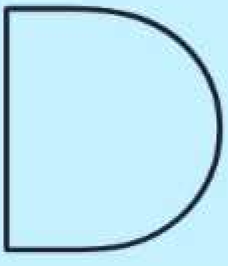
(ख)

(ग)

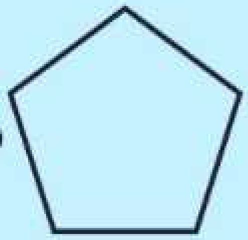


(घ)

(ङ)

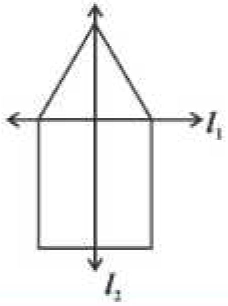


(च)



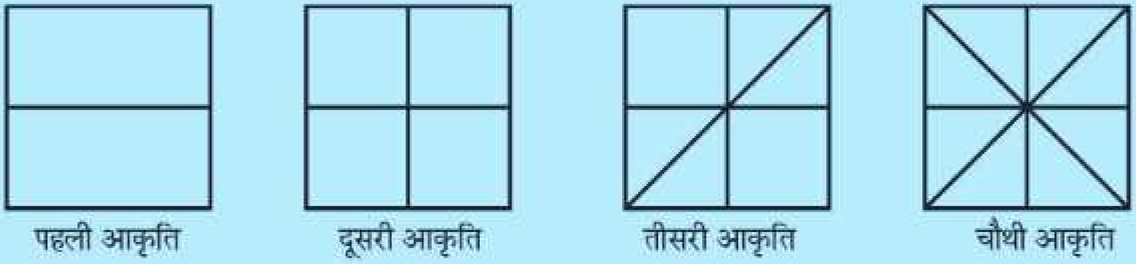
पिताजी ने कहा, 'क्या तुम जानती हो, कुछ आकृतियाँ हैं, जिसके - सममित अक्ष होते हैं।

बगल की आकृति में l_1 और l_2 में से कौन सा सममित अक्ष है, पहचानिए।



खुद करके देखिए :

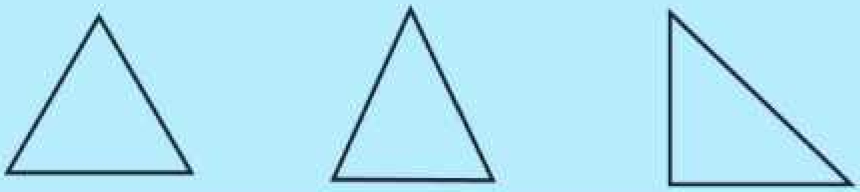
- एक वर्गाकार कागज लीजिए। जैसे दर्शाया गया है, वैसे एक के बाद एक मोड कीजिए। मोड़ने का काम समाप्त होने के बाद देखिए, कागज पर कितने सममित अक्ष हैं?



- सममित अक्ष कितने हैं?
- एक आयात्कार कागज लेकर पहले की तरह जोड़िए।
- इसमें कितने समामित अक्ष मिले?
- वेग और आयत की सममित अक्ष - क्यों बराबर नहीं हुए?
- अपने दोस्तों से चर्चा करके इसका कारण दर्शाइए।

खुद करके देखिए:

- एक एक समबाहु, समहिबाहु और समकोण-समद्विबाहु त्रिभुजाकार कागज लीजिए। प्रत्येक कागज पर सममित अक्ष दर्शाईए।



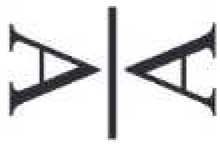
क्या आप जानते हैं?

विषमबाहु त्रिभुज का कोई सममित अक्ष नहीं होता।

सिनु के घर पर एक खिलौना गाड़ी थी। उस पर लिखा गया था ƎƆИA⅃UBMA सिनु और लिनु इन अक्षरों को समझ नहीं सकीं। उन्होंने लिनु के पिताजी से पूछा। पिताजी ने कहा, 'एक दर्पण लो आओ, दर्पण को आकृति के नीचे दी गई रेखा को सटाकर रखो, जैसे दर्पण का सामने का भाग लिखे गए अक्षरों पर रहेगा।

बताइए:
किसी इस वाहन में AMBULANCE को इस प्रकार लिखे जाने का कारण क्या है ?

वाहन पर AMBULANCE लिखा हुआ था। यह जानकर दोनों लडकियाँ बहुत खुश हुईं। लिनु ने एक कागज पर 'A' लिखकर भिन्न-भिन्न दिशाओं से दूरी देखने लगी।



आप दूसरे अंग्रेज अक्षर लिखकर दर्पण पर उसका प्रतिबिंब देखिए। जैसी आकृतियाँ देख रहे हैं, उन्हें लिखिए।

सिनु और लिनु ने अपना अपना नाम दर्पण में देखने की कोशिश की।

खुद कर के देखिए :

आप अपने पाँच दोस्तों के नाम अंग्रेजी में बड़े अक्षरों मे लिखकर उन्हें दर्पण में देखिए। जैसी आकृतियाँ देख रहे है, उन्हें लिखने की कोशिश कीजिए।

क्रमांक	नाम (अंग्रेजी में बड़े अंक्षरों में)	दर्पण में कैसे दिखाई पडता है ?
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

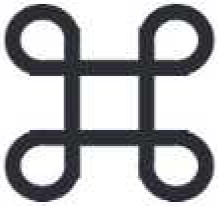
✎ दर्पण में न देखकर नीचे लिखे गए नामों को लिखने की कोशिश कीजिए।

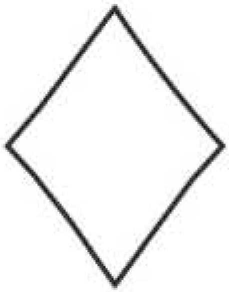
EINSTINE
JOSEPH
SIBASUNDAR
TENDULKAR

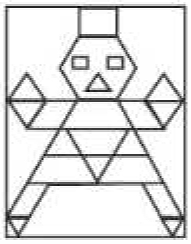
अभ्यास 9.1

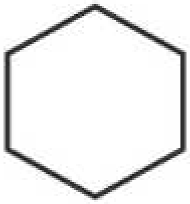
1. प्रत्येक आकृति का सममित अक्ष खींचने की कोशिश कीजिए। किस आकृति में कितने सममित अक्ष मिले, लिखिए। किस आकृति में सममित अक्ष नहीं है?

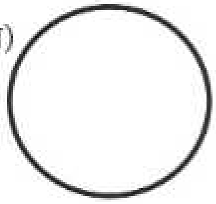
(क)

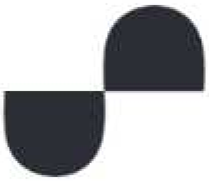
(ख) 

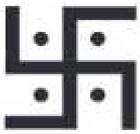
(ग) 

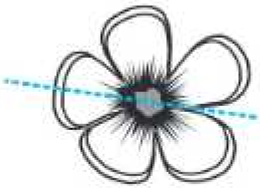
(घ) 

(ङ) 

(च) 

(छ) 

(ज) 

2. 

जो रेखा खींची गई है वह क्या सममित अक्ष है? यदि हाँ, तब दूसरे अक्ष भी खींचिए। यदि दूसरा अक्ष नहीं है, तब नहीं है, लिखिए।

3. प्रत्येक आकृति की सममित अक्ष संख्या दाईं ओर के खानों मे लिखिए।

आकृति का नाम	सममित अक्ष संख्या
समबाहु त्रिभुज	
समद्विबाहु त्रिभुज	
विषमबाहु त्रिभुज	
वर्ग	
आयत	
समचर्तुभुज (रम्बस)	
वृत्त	
सामंतरिक चतुर्भुज	

4. नीचे दिए गए नामों के बाईं तरफ दर्पण रखकर प्रतिबिंब कैसे दिखाई पडते हैं, लिखिए। दर्पण का व्यवहार करके अपने उत्तरों की जाँच कीजिए। प्रत्येक शब्द में कौन से अक्षर के प्रतिबिंब मूल अक्षर के बराबर दिखाई पडते हैं ?

GOPAL
RAMESH
MIRROR
RAJESH
EEMA

5. अपने घर पर विद्यालय में अपने परिवेश में पाई जाने वाली विभिन्न सममित आकृतियों का संग्रह कीजिए। एक कॉपी में गोंद से चिपका दीजिए।

9.2 सर्वांगसमता

इस विभाग में हम सर्वंगसमता जैसी एक महत्वपूर्ण धारण के संबंध में चर्चा करेंगे। हम विशेष रूप से त्रिभुज की सर्वांगसमता पर चर्चा करेंगे।

खुद करके देखिए :

- डाकघर से दो डाकटिकट संग्रह कीजिए, जो आपस में पूरी तरह समान हों।
- एक डाकटिकट पर दूसरा डाकटिकट रखिए। क्या देख रहे हैं ? आप देख सकेंगे कि पहला और दूसरा डाकटिकट दोनों एक दूसरे को पूरा का पूरा ढँक लेते हैं। इसका अर्थ है कि दोनों डाक टिकटों की आकृति और आकार बराबर हैं।
- अब बताइए किन्हीं दो डाकटिकट लें, तो क्या उनकी आकृति और आकार बराबर होगें ?
- बराबर आकार और आकृति के दो डाकटिकट परस्पर सर्वसम है। समतल पृष्ठ पर दो आकृतियों का आकार बराबर होने से वे दोनों परस्पर सर्वागसम आकृतियाँ होते हैं।

✎ आप अपने परिवेश में पाए जानेवाले बराबर आकार और आकृति वाली वस्तुओं की तालिका बनाइए।

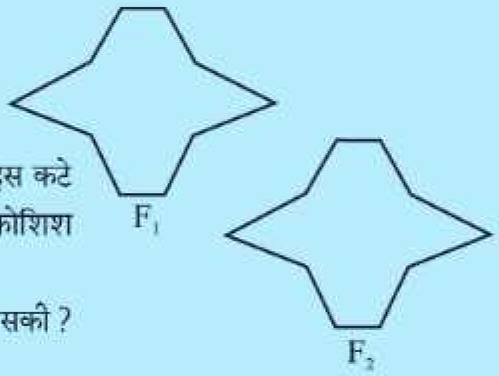
बताइए:

दो ज्यामिति बॉक्सों से समद्वीवाहु और समकोण वाले दो सेटस्कोयर लेकर एक के साथ दूसरे को मिलाकर रखिए। क्या दोनों एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेते हैं? क्या दोनों सेटस्कोयर सर्वांगसम होंगे?

9.2.1 समतल पर दो आकृतियों की सर्वसमता

खुद करके देखिए :

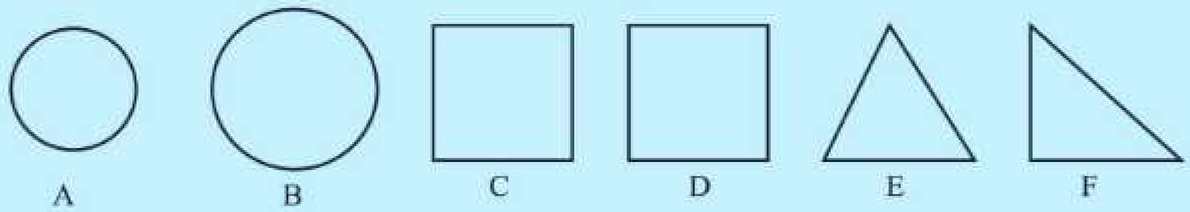
- बगल में की गई दोनों आकृतियाँ देखिए।
- एक ट्रेसिंग कागज लीजिए। इसे आकृति पर रखकर आकृति की प्रतिलिपि ट्रेसिंग कागज पर बनाइए।
- अब ट्रेसिंग कागज से आकृति के किनारों को काट लीजिए। इस कटे गए भाग को F_2 पर उसे रखकर F_2 को पूरा ढाँकने की कोशिश कीजिए। देखेंगे, दोनों आकृतियाँ एक दूसरे को ढाँक लेती हैं।
- ट्रेंसिग कागज से कटी हुई आकृति क्या F_2 को पूरी तरह ढाँक सकी? कोशिश करें जैसे एक आकृती दूसरी आकृती से ढाँक जाए।



इससे हमें क्या ज्ञात हुआ?

ट्रेसिंग कागज से काटी गई आकृति F_2 के बराबर है। हम कहते हैं ट्रेसिंग कागज से काटी गई आकृति F_2 का हू-ब-हू प्रतिलिपि है। हम कहते हैं कि F_1 और F_2 दोनों आकृतियाँ सर्वांगसम हैं।

✎ नीचे के चित्रों को देखकर सारणी के खाली स्थान भरिए।



चित्रों के नाम	क्या आकृयाँ बराबर है?	क्या आकार बराबर हैं?	क्या आकृति और आकार बराबर हैं?
(A) और (B)			
(C) और (D)			
(E) और (F)			

उसी प्रकार दो वर्गों की भुजाएँ बराबर हों तो सर्वांगसम है। बराबर व्यासार्द्ध वाले दो वृत्त की परस्पर सर्वांगसम है।

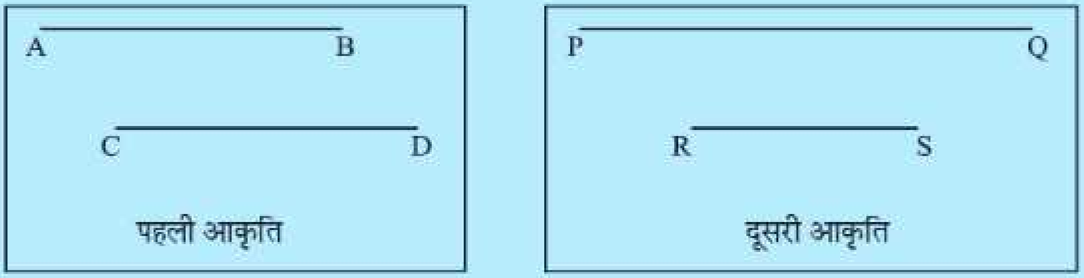
> **क्या आप जानते है ?**
>
> दो सर्वांगसम चित्रों F_1 और F_2 को $F_1 \cong F_2$ के रूप में लिखा जाता है।
>
> $\cong$ सर्वांगसमता का चिह्न है।

जोडी विभिन्न प्रकार की सर्वांगसम आकृतियाँ बनाइए।

9.2.2 दो रेखाखण्डों की सर्वांगसमता

खुद करके देखिए :

- दो रेखाखण्ड सर्वांगसम हैं या नहीं, उसकी जाँच करने के लिए नीचे दर्शाया गया काम करेंगे :



- एक ट्रेसिंग कागज लेकर $\overline{AB}$ प्रतिलिपि का अंकन कीजिए।
- $\overline{AB}$ की प्रतिलिपि को $\overline{CD}$ पर डालकर देखिए।
- $\overline{CD}$ के 'C' के साथ $\overline{AB}$ के 'A' को मिलाकर रखिए।
- अब देखिए 'D' के साथ क्या प्रतिलिपि तस्वीर का 'B' मिल जाता है ?
- अब हमें ज्ञात हुआ कि $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ सर्वांगसम है। इसे हम $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ लिकते हैं।
- दूसरी तस्वीर मे ट्रेसिंग कागज पर $\overline{PQ}$ प्रतिलिपि अंकन कीजिए।
- $\overline{PQ}$ प्रतिलिपि रखने से P बिन्दु R बिन्दु के साथ क्या मिलकर रहता है ?
- यहाँ $\overline{PQ}$ और $\overline{RS}$ सर्वांगसम होंगे ?

अब बताइए :

- $\overline{AB}$ की प्रतिलिपि $\overline{CD}$ को पूरी तरह ढांक लेती है। पर $\overline{PQ}$ की प्रतिलिपि $\overline{RS}$ को ढँक नहीं सकती।
- $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ की लम्बाई बराबर न होती तो $\overline{AB}$ की प्रतिलिपि $\overline{CD}$ को क्या पूरी तरह ढँक लेती ?

हमने देखा $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ दोनों रेखाखण्ड हैं, इसलिए दोनों की आकृतियाँ बराबर लम्बाई बराबर होने से उनका आकार भी बराबर है।

अतएव, $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ सर्वांगसम हैं।

हमें ज्ञात हुआ :

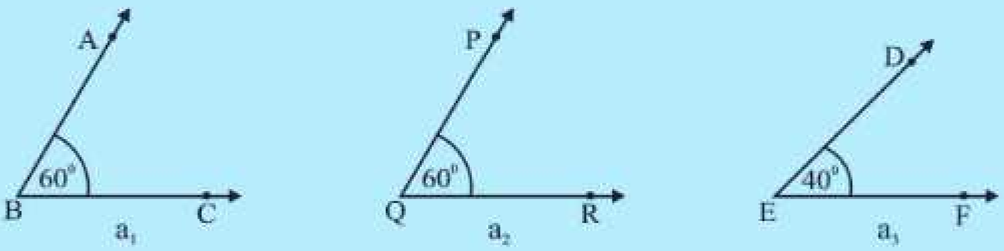
दो रेखाखण्ड की लम्बाई बराबर हों तो आप दोनों रेखाखण्डों को सर्वांगसम रेखाखण्ड कहेंगे ?

9.2.3 कोणों की सर्वांगसमता :

कोणों की सर्वांगसमता को जानने के लिए हम नीचे का काम करेंगे :

खुद करके देखिए:

- आप चाँद की सहायता से 3 कोण $m\angle ABC=60^\circ$, $m\angle PQR=60^\circ$ $m\angle DEF=40^\circ$ खींचिए।



- आप एक ट्रेसिंग कागज लेकर $\angle ABC$ की प्रतिलिपि बनाइए।
- प्रतिलिपि के $\overrightarrow{BA}$ को $\angle PQR$ के $\overrightarrow{QP}$ के साथ मिलाकर रखिए? $\overrightarrow{QR}$ के और $\overrightarrow{BC}$ क्या एक दूसरे को ढँक लेती है?
- इससे हमें क्या ज्ञात हुआ?

$m\angle ABC = m\angle PQR$ $\quad$ $\angle ABC \cong \angle PQR$

- अर्थात्- फिर ट्रेसिंग कागज पर खींचे गए $\angle ABC$ की प्रतिलिपि $\overrightarrow{BA}$ का $\angle DEF$ की $\overrightarrow{ED}$ पर मिलाकर रखो। $\overrightarrow{EF}$ और $\overrightarrow{BC}$ क्या पूरी तरह एक दूसरे को ढँक लेती है।
- इससे हमें क्या ज्ञात हुआ?

$\therefore$ $\angle ABC$ और $\angle DEF$ को परिमाण समान नहीं है।

चित्र a_1 और a_2 और a_3 की आकृतियाँ बराबर हैं, लेकिन आकार (परिमाण) बराबर नहीं हैं।

चित्र a_1 और a_2 की आकृतियाँ बराबर हैं, आकार (परिमाण) भी बराबर हैं। अतएव $\angle ABC \cong \angle PQR$

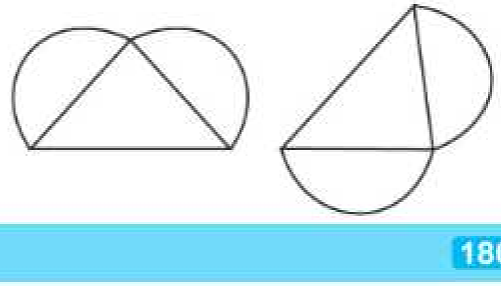
हमें ज्ञात हुआ :

दोनों कोणों का परिमाण या माप बराबर होने पर दो दोनों कोण सर्वांगसम हैं।

अभ्यास 9.2

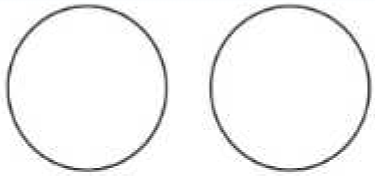
1. प्रत्येक जोड़े चित्रों में से एक की प्रतिलिपि बनाइए। उसे उस जोड़े के दूसरे चित्र पर रखिए। दोनों चित्र सर्वांगसम हैं या नहीं, जाँच कीजिए।

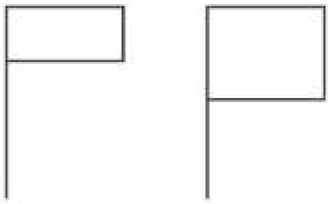
(a)

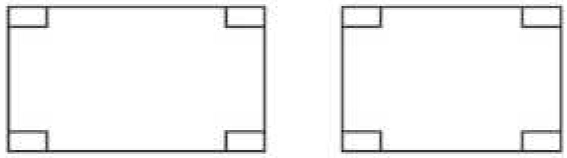


(b)

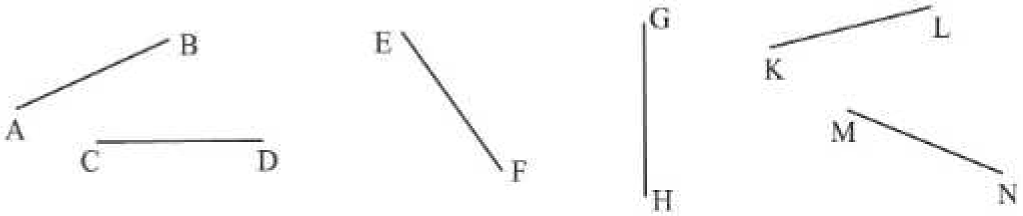
(c)

(d) 

(e) 

(f) 

2. नीचे दी गई रेखाखण्डों में कौन सर्वांगसम है, जाँच कीजिए:



3. $\overline{AB}$ रेखाखण्ड खींचिए, जैसे AB=4.6 से.मी. होगी

$\overline{CD}$ खींचो, जैसे $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ होगी।

4. निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(क) किस शर्त पर दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होंगे ?

(ख) दो वृत्त सर्वांगसम हैं, यह कैसे पता चलेगा ?

(ग) दो कोण सर्वांगसम होने की क्या शर्त है ?

(घ) किस परिस्थिति में दो वृत्त सर्वांगसम होंगे ?

5. दो सर्वांगसम वृत्त खींचकर एक के अन्त:भाग को काले रंग से और दूसरे के अन्त:भाग को हरे रंग से भरिए।

(क) सर्वांगसम वृत्त दोनों का व्यासार्द्ध की माप कीजिए।

(ख) वृत्तों की व्यासार्द्ध में क्या संबंध है ?

(ग) वृत्तों के व्यास क्या सर्वांगसम होंगे ? जाँच कीजिए।

(घ) वैसे दो सर्वांगसम आयत खींचिए। उनके परिमाण में क्या संबंध है, बताइए।

9.3. त्रिभुज की सर्वांगसमता

त्रिभुज के विभिन्न भागों के बारे में आप जानते हैं कि त्रिभुज के तीन शीर्ष बिन्दु तीन भुजाएँ और तीन कोण होते हैं। अतएव, त्रिभुज का आकार इसकी, भुजाओं और कोणों की माप पर निर्भर है। दो त्रिभुजों की आकृति बराबर होती है, कि दोनों त्रिभुज हैं अब बताइए, उन दोनो के आकार के संबंध में क्या जानने से सिद्ध होगा कि दोनों सर्वांगसम हैं।

खुद करके देखिए :

- $60°$, $30°$ सेटस्कोयर को कागज पर रखकर उसके किनारों पर रेखा खींचकर दो त्रिभुज खींचिए उन दोनों के नाम ABC और PQR दीजिए।

- एक ट्रेसिंग कागज पर ΔABC की प्रतिलिपि चित्र खींचिए। इसे ΔPQR के साथ मिनाने की कोशिश कीजिए। कितने प्रकार से हम ΔABC की प्रतिलिपि को ΔPQR पर डाल सकेंगे।

ध्यान दें : तीन प्रकार से हम यह कार्य कर सकेंगे।

- ΔABC का प्रतिलिपि लेकर ΔPQR पर निम्न प्रकार से हालने की कोशिश कीजिए।

  जैसे कि :

  प्रथम संस्थापन : A के साथ P, B साथ Q, और C के साथ R मिल जाएँगे।

  द्वितीय संस्थापन : A के साथ Q, B के साथ R और C के साथ P, मिल जाएँगे।

  तृतीय संस्थापन : A के साथ R, B के साथ P, और C के साथ Q मिल जाएँगे।

  अब बताइए :

  किस स्थिति में ΔABC की प्रतिलिपि का तीनों शीर्ष ΔPQR के तीनों शीर्षों के साथ मिल जाएँगे।

  ऊपर के कार्य से हमने देखा कि प्रथम स्थिति में प्रतिलिपि ΔABC पर डालने से दोनों ΔPQR को ढँक लिया। A शीर्ष P शीर्ष के साथ B शीर्ष Q शीर्ष के साथ और C शीर्ष R शीर्ष के साथ मिल गए।

  अतएव, हमें ज्ञात हुआ कि -

  $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

क्या आप जानते हैं?

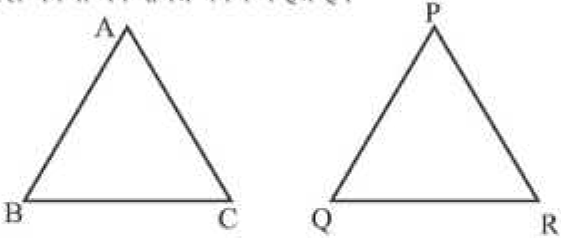
यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

तब $\Delta ABC \cong \Delta QPR$ लिखना सही नहीं होगा।

$\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ लिखना भी सही नहीं होगा।

- **याद रखिए :**

दो सर्वांगसम त्रिभुज परस्पर को ढँक लेते हैं तो मिल जानेवाले शीर्ष बिन्दुओं को संगत शीर्ष कहते हैं। परस्पर को ढँक लेनेवाली भुजाओं को संगत भुजा और परस्पर को ढँक लेनेवाले कोणों को संगत कोण कहते हैं।



इसलिए ΔABC और ΔPQR के बीच :

संगत शीर्ष बिन्दु है A और P, B और Q, C और R

संगत भुजाएँ हैं $\overline{AB}$ और $\overline{PQ}$, $\overline{BC}$ और $\overline{QR}$, $\overline{CA}$ और $\overline{RP}$

संगत कोण हैं : $\angle A$ और $\angle P$, $\angle B$ और $\angle Q$, $\angle C$ और $\angle R$

हमें ज्ञात हुआ :

सर्वागसम त्रिभुजों में संगत भुजाएँ सर्वांगसम हैं। $\overline{AB} \cong \overline{PQ}, \overline{BC} \cong \overline{QR}, \overline{CA} \cong \overline{RP}$

संगत कोण भी सर्वांगसम है : $\angle A \cong \angle P, \angle B \cong \angle Q, \angle C \cong \angle R$

हम लिखते हैं : -

क्या आप जानते हैं ?

ΔABC और ΔPQR के बीच सर्वांगसम संबंध व्यक्त करते समय शीर्ष बिंदुओं के नाम संगत शीर्ष के क्रम से लिखना चाहिए।

✍ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ हो तो त्रिभुज के कौन-कौन से अंग सर्वांगसम होंगे ?

शीर्षबिन्दु A संगत D, B संगत E और C संगत F हैं।

$\angle A$ संगत , $\angle D$, $\angle B$ संगत और $\angle E$ संगत $\angle C$ है $\angle F$ ।

$\overline{AB}$ संगत $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ संगत $\overline{EF}$ और $\overline{CA}$ संगज हैं $\overline{FE}$ ।

✍ ΔDEF और ΔKLM सर्वांगसम हो, लो नीचे की खाली जगहे भरिए :

(क) $\overline{DE} \cong$ ___ (ख) $\angle F \cong$ ___

(ग) $\angle L \cong$ ___ (घ) $\overline{KM} \cong$ ___

(ङ) $\overline{ML} \cong$ ___

क्या आप जानते हैं ?

सर्वांगसम त्रिभुज के क्षेत्र में $\leftrightarrow$ संकेत का व्यवहार करके संगत शीर्षों को लिखा जाता है।

$A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$

अभ्यास 9.3

1. यदि - और सर्वांगसम होंगे, तब नीचे की खाली जगहें भरिए :

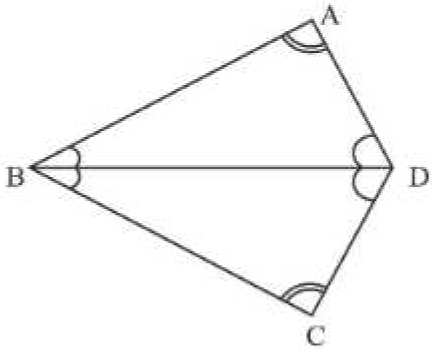
(क) $\Delta PQR \cong \Delta$........, $\Delta QRP \cong \Delta$........

(ख) $P \leftrightarrow$ ...., $\overline{QR}$..........

(ग) $\overline{PQ} \cong$ ...., $\overline{QR} \cong$ ....

(घ) $\overline{PQ}$ संगत ...., $\angle R$ संगत ....

2. बगल की आकृति देखकर खाली जगहें भरिए।



Δ ABD ≅ ....

$\overline{BC}$ संगत ....

$\overline{AB}$ ≅........

$\overline{AD}$ संगत ....

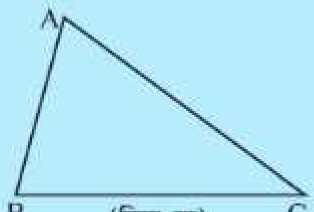
9.3.1 त्रिभुजों में सर्वांगसमता की शर्तें:

दो त्रिभुजों में से एक की तीन भुजाएँ दूसरे की तीन भुजाओं के साथ सर्वांगसम होने के साथ-साथ एक के तीन कोण दूसरे के तीनों संगत कोणों को साथ सर्वांगसम होंगे। दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे, इस पर हमने चर्चा की है।

कुछ कम से कम शर्तों पर भी दो त्रिभुज सर्वागसम हो सकते हैं। आइए, उन शर्तों पर चर्चा करेंगे।

खुद करके देखिए :

- एक ड्रईंग सीट पर कोई भी एक त्रिभुज खींचिए। उसका नाम Δ दें। उस कागज पर ΔABC की लम्बाई $\overline{BC}$ के बराबर एक रेखाखण्ड खींचिए। (चित्र-ख) उसका नाम $\overline{QR}$ दें।



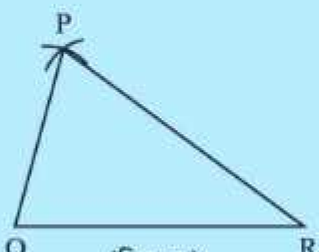
(चित्र-क)

(चित्र-ख)

- $\overline{AB}$ की लम्बाई के बराबर व्यासाद्ध लेकर Q को केन्द्र बनाकर परकार से एक चाप खींचिए। (चित्र-ग)।
- फिर परकार से $\overline{AC}$ की लम्बाई बराबर व्यासाद्ध लेकर R को केन्द्र करके एक चाप खींचिए। जैसे कि वह पहले की चाप को प्रतिच्छेद करेगा।

(चित्र-ग)

- इस प्रतिच्छेद बिन्दु का नाम दें।
- अब $\overline{PQ}$ और $\overline{PR}$ खींचो। Δ PQR मिल गया।
- अब ABC त्रिभुज की प्रतिलिपि खींचिए।
- इसे Δ PQR पर रखो। जैसे Δ ABC की शीषबिन्दु A पर ΔPQR का शीर्ष बिन्दु P रहेगा। क्या देख रहे हैं?



(चित्र-घ)

अब बताइए :

ΔABC की किन भागों की माप व्यवहार करके, ΔPQR खींचिए। सिफ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{CA}$ की लंम्बाई की माप लेकर ΔPQR खींचा गया है।

अब जाँच का व्यवहार करके त्रिभुज के कोणों की माप लेकर उसका परिमाण लिखिए।

$m\angle A$ = ..., $m\angle B$ = ..., $m\angle C$ = ...

$m\angle P$ = ..., $m\angle Q$ = ..., $m\angle R$ = ...

नीचे की सारणी में खाली जगहें भरिए :

ΔABC और ΔPQR की भुजाओं में संबंध (खींचते समय लिया)	ΔABC और ΔPQR के कोणों के संबंध (मापकर देखा गया)
$\overline{AB} \cong$ .... $\overline{BC} \cong$ .... $CA \cong$	$\angle A \cong$ .... $\angle B \cong$ .... $\angle C \cong$ ....

क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हो रहे हैं?

हमने देखा $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

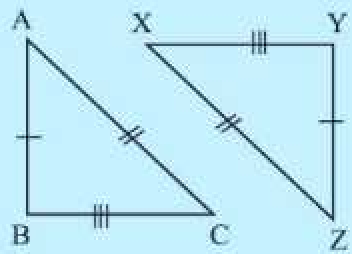
यहाँ दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होने के लिए कम से कम कौन सी शर्त की जरूरत पड़ी?

हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे कि :

दो त्रिभुजों में एक की तीन भुजाएँ क्रमश: दूसरे की तीन भुजाओं के साथ बराबर होने पर दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे। सर्वांगसमता की इस शर्त को भुजा-भुजा-भुजा या संक्षेप में भू-भू-भू सर्वांगसमता कहा जाता है।

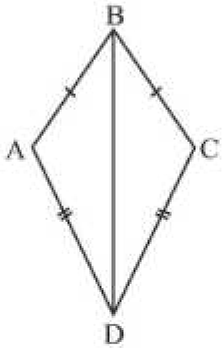
खुद उत्तर देने कि कोशिश कीजिए :

1. Δ PQR और Δ LMN में कौन कौन सी भुजा-युग्म संगत भुजाएँ हैं?
2. बगल की आकृति में दोनों त्रिभुजों में कौन-कौन सी भुजाओं की लंबाई बराबर है, उन्हें चिह्नित किया गया है)
   (क) दोनों Δ सर्वांगसम हैं?
   (ख) यदि उत्तर 'हाँ' है तब सर्वांगसम की किस शर्त पर दोनों त्रिभुज सर्वांगसम है?
   (ग) यदि प्रश्न (क) क उत्तर 'हाँ' है, तब सर्वांगसम का संकेत का व्यवहार करके, दोनों सर्वांगसम त्रिभुजों के नाम लिखिए।



अभ्यास 9.4

1. बगल की आकृति में, $\overline{AB}=\overline{CB}, \overline{AD}=\overline{CD}$ नीचे के प्रश्नो के उत्तर दीजिए :



(क) ΔABD और ΔCBD की कौन-कौन सी भुजाएँ सर्वांगसम हैं?

(ख) दर्शाई गई आकृतियों में ΔABD और ΔCBD क्या सर्वांगसम हैं?

यदि उत्तर हाँ हैं, उसका कारण क्या है?

यदि उत्तर ना है, उसका कारण क्या है?

(ग) ΔABD और ΔCBD के कौन-कौन से कोण संर्वांगसम हैं?

(घ) $\overline{BD}$ किस किस कोणाको समद्विभाजन करती हैं?

(ङ) $\Delta ABD \cong \Delta BDC$ लिखना सही होगा? अपने उत्तर का कारण बताइए।

2. दो सर्वांगसम त्रिभुज खींचकर सन्यापन कीजिए कि सर्वांगसम त्रिभुजों में सर्वांगसम भुजाओं के सम्मुख कोण संगत होंगे।

ΔABC और ΔPQR में $AB = PQ$ $BC = QR$

(क) CA के साथ ΔPQR की किस भुजा की लंबाई बराबर होने पर $\Delta ABC \cong \Delta$ होगा?

(ख) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ हों तो, खाली जगहों पर क्या लिखा जाएगा?

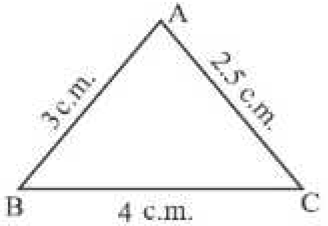
शीर्ष बिंदु A का संगत __________,

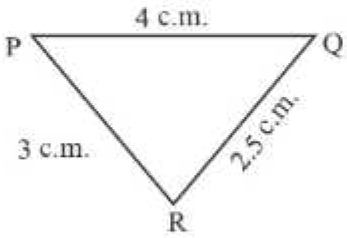
शीर्ष बिंदु B का संगत __________,

शीर्ष बिंदु C का संगत __________ ।

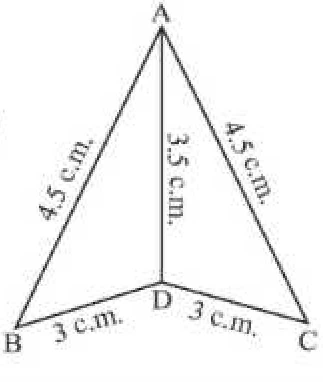
3. नीचे की आकृतियों में भू-भू-भू सर्वांगसमता की शर्त की अनुसार सर्वांगसम होनेवाले त्रिभुजों के नाम लिखिए।

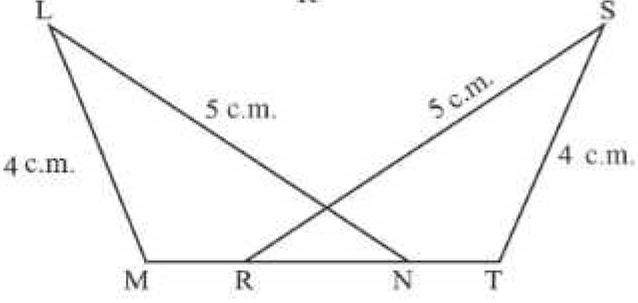
(क)





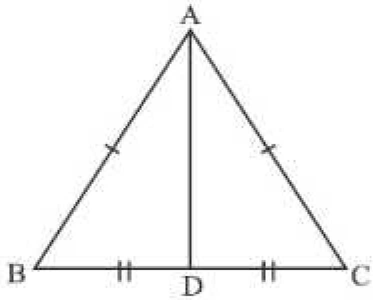
(ख)





BC = 3 c.m.
FE = 3 c.m.

बगल की आकृति में AB=AC D, $\overline{BC}$ का मध्यमबिंदु है।



आकृति को देखकर नीचे की खाली जगहें भरिए :

$\Delta ADB \cong \Delta$ ______

$\angle ABD \cong \angle$ ______

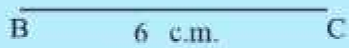
$\angle BAD \cong \angle$ ______

$\angle ADB \cong \angle$ ______

दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की और एक शर्त पर चर्चा करेंगे।

खुद करके देखिए :

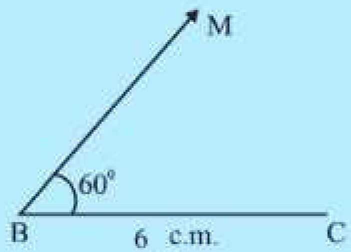
अपनी कॉपी नीचे की सूचना के अनुसार अंकन कीजिए:



(आकृति-क)

-

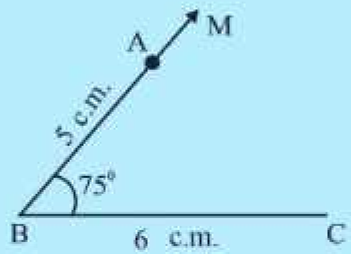
  $\overline{BC}$



(आकृति-ख)

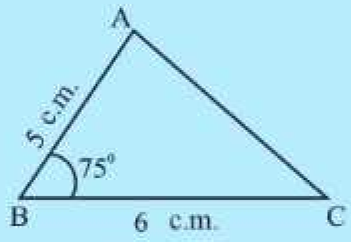
- $\overrightarrow{BM}$

  $m\angle CBM = 60^{0}$



(आकृति-ग)

- $\overrightarrow{BM}$ पर A बिंदु चिह्नित कीजिए,
  जैसे BA =5 से.मी (आकृति - ग)

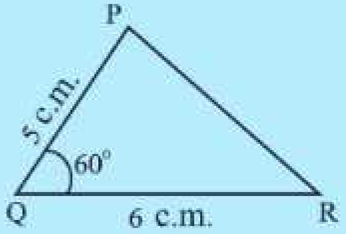


(आकृति-घ)

- $\overline{AC}$ खींचे (आकृति-घ)
  अब ΔABC मिला।

- उसी प्रकार - खींचिए, जिसकी

  QR=6 से.मी., PQ=5 से.मी और ∠PQR की माप 60° है।



- $\overline{AC}$ और $\overline{PR}$ की लंबाई ज्ञात कीजिए, क्या दोनों की लम्बाई बराबर हुई ?
- भू-भू-भू शर्त के अनुसार Δ ABC और Δ PQR के बीच क्या सर्वांगसमता की शर्त पूरी हुई ?
- अतएव हमें ज्ञात हुआ Δ ABC ≅ Δ PQR
- Δ ABC और Δ PQR के बीच

  $\overline{AB}$ ≅ ____, $\overline{BC}$ ≅ ____, $\overline{CA}$ ≅ ____,

  ∠A ≅ ____, ∠B ≅ ____, ∠C ≅ ____
- Δ दोनों को खींचने के लिए हमने कौन सी शर्त अपनाई थी ?

अब Δ ABC के साथ कौन सा त्रिभुज सर्वांगसम हुआ ?

ऊपर की गतिविधि से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे :

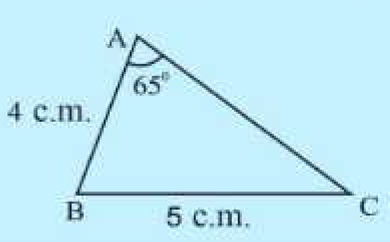
दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके आसन्न कोण दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं और उनका आसन्न कोण के बराबर होंते हैं तो दोनों त्रिभुज वापस में सर्वांगसम कहे जाएँगे।

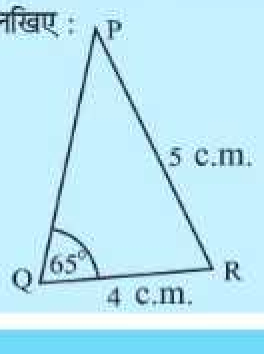
✍ खुद उत्तर देने की कोशिश कीजिए :

1. Δ PQR में (क) $\overline{PQ}$ और $\overline{PR}$ भुजाओं का अन्तर्गत कोण कौन सा है ?

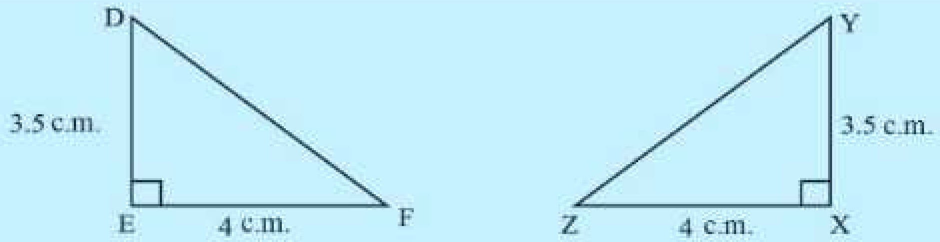
   (ख) किन दो भुजाओं का अन्तर्गत कोण ∠R होगा ?
2. Δ ABC और Δ XYZ में $\overline{AB} \cong \overline{XY}$ और ∠A ≅ ∠X उन दोनों त्रिभुजों का कौन सा अंग सर्वांगसम होने से दोनों त्रिभुज भु-को-भु शर्त के अनुसार सर्वांगसम होंगे ?
3. नीचे की आकृतियों में से कौनसा त्रिभुज युग्म भु-को-भु सर्वांगसम के अनुसार सर्वांगसम हैं? उन दोनों त्रिभुज युग्मों को सर्वांगसमता का चिह्न का व्यवहार करके लिखिए। अपने उत्तर के लिए कारण लिखिए :

(क)

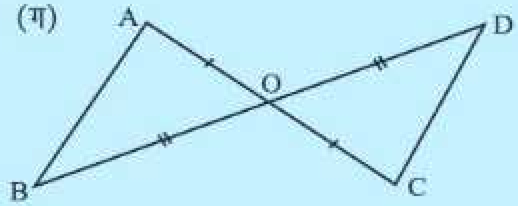




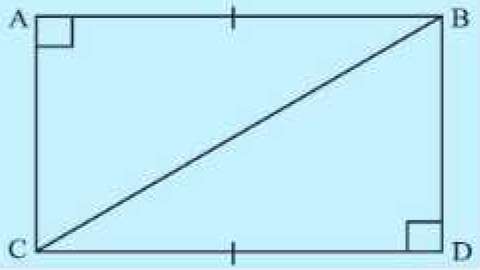
(ख)



(ग)



(घ)



अभ्यास 9.5

1. ΔABC और ΔDEF में $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ और $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ । ΔABC के किस कोण के साथ ΔDEF का कौन सा कोण सर्वांगसम होने से दोनों त्रिभुज भु-को-भु सर्वांगसमता के अनुसार सर्वांगसम होगे ?

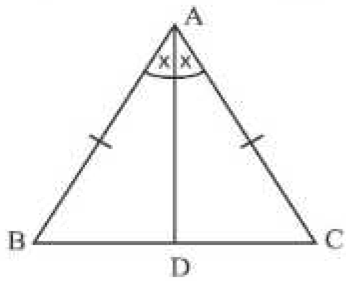
2. ΔPQR और ΔABC में $PQ = AB,\ m\angle Q = m\angle B$ । किन भुजाओं की लंबाई बराबर होने से दोनों त्रिभुज भु-को-भु सर्वांगसम के अनुसार सर्वांगसमता होंगे ?

3. ΔABC में $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ और $\angle BAC$ का समद्वि भाजक है $\overline{AD}$ ।

   (क) Δ ABD और Δ ACD में अन्य कौन से अंग सर्वांगसम होंगे ?

   (ख) Δ ABD और Δ ACD सर्वांगसम होंगे ?

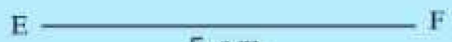
   यदि सर्वांगसम होंगे तब किस शर्त पर सर्वागसम होंगे ?



9.3.2 दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की और एक शर्त :

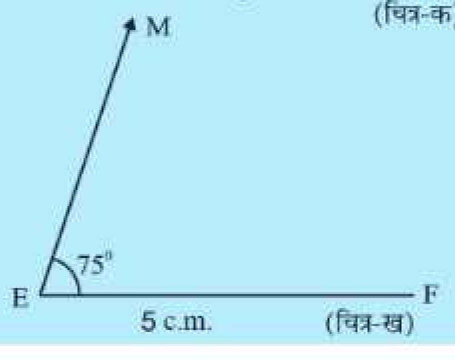
खुद करके देखिए :

- 5 सी.मी. लम्बाई का एक रेखाखण्ड खींचिए। उसका नाम दें $\overline{EF}$ ।



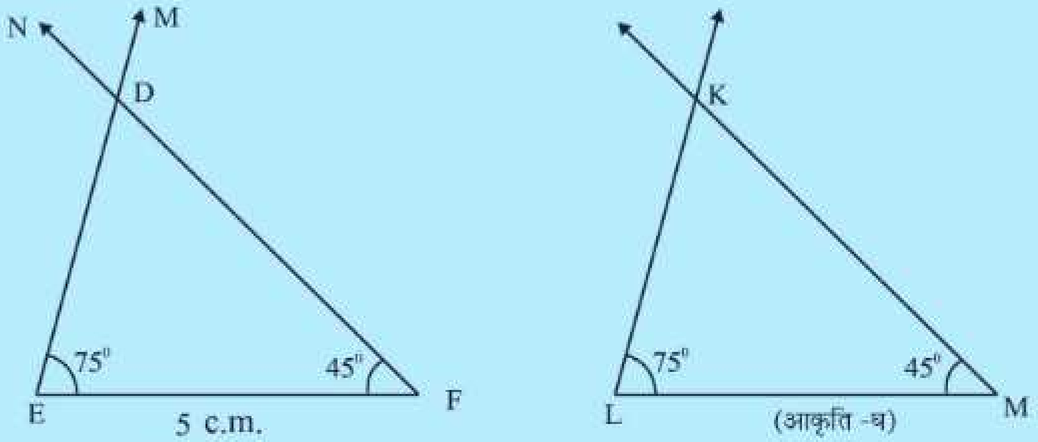
(चित्र-क)

- चाँद व्यवहार करके $\overrightarrow{EM}$ खींचिए, जैसे कि $\angle FEM$ की माप - होगा।



(चित्र-ख)

- चाँद का व्यवहार करके $\overrightarrow{FN}$ खींचिए, जैसे कि $\angle EFN$ की माप 45° होंगी।
- $\overrightarrow{EM}$ और $\overrightarrow{FN}$ रश्मि दोनों का प्रतिच्छेदित बिन्दु का नाम D दो। ΔDEF मिल गया।
- उसी प्रकार की प्रणाली से Δ KLM खींचिए जिसकी LM = 5 से.मी. $m\angle L = 75^0$ और $m\angle M = 45^0$ (आकृति -घ)



(आकृति -ग) (आकृति -घ)

- पारदर्शी कागज का व्यवहार करके ΔDEF की एक प्रतिलिपि बताइए।
- ΔDEF की प्रतिलिपि को ΔKLM पर डालिए। जैसे कि E बिन्दु L बिन्दु पर और F बिन्दु M बिन्दु पर रहेंगे।
- ΔDEF और ΔKLM दोनों क्या बराबर आधारवाले होंगे ?

ΔDEF और ΔKLM के अन्य अंशें को मापकर नीचे की सारणी भरिए।

Δ DEF	Δ KLM
DE = ...	KL = ...
DF = ...	KM = ...
$m\angle EDF$ = ...	$m\angle LKM$ = ...

- आपने त्रिभुज खींचने के लिए जो माप की, उन्हें और प्राप्त माप को देखकर - जगहें भरिए:

Δ DEF और Δ KLM के बीच

$\overline{DE} \equiv$ ...., $\overline{EF} \equiv$ ...., ... $\equiv \overline{MK}$

$\angle D \equiv$ ...., $\angle E \equiv$ ...., ... $\equiv$ LM

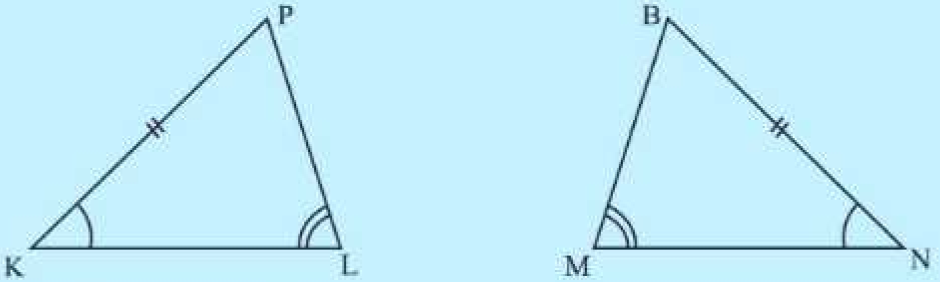
- अब ΔDEF के साथ ΔKLM सर्वांगसम होंगे ? उसका कारण क्या है, उसे दोस्तों के साथ चर्च्चा करके लिखिए।
- दोनों त्रिभुजों के खींचने के लिए इसमे किन-किन अंगों की माप को बराबर करके लिया था ?

हमें ज्ञात हुआ :

यदि त्रिभुजों के कोई दो कोण और उसके अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा बराबर हों तो दोनों त्रिभुज आपस के सर्वांगसम कहलाएँगे। सर्वसमता की इस शर्त को कोण-भुजा-कोण या संक्षेप में को-भु-को सर्वांगसमता कहा जाता है।

खुद उत्तर देने की कोशिश कीजिए :

1. Δ PQR के $\overline{PR}$ संलग्न (आसन्न) कोण दोनों के नाम लिखिए इस Δ की किस भुजा के संलग्न दोनो कोण $\angle R$ और $\angle P$ हैं ?
2. ΔLMN और ΔXYZ के बीच $\angle L \cong \angle X$, $\overline{LM} \cong \overline{XY}$ अन्य दोनों त्रिभुजों में अन्य कौन-सा अंग सर्वांगसम होने से त्रिभुज दोनों को-भु-को की शर्त पर सर्वांगसम होंगे ?
3. बगल में दिए गए दो त्रिभुजों के कौन–कौन से अंग आपस में बराबर हैं, दर्शाया गया है।



(क) क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं ?

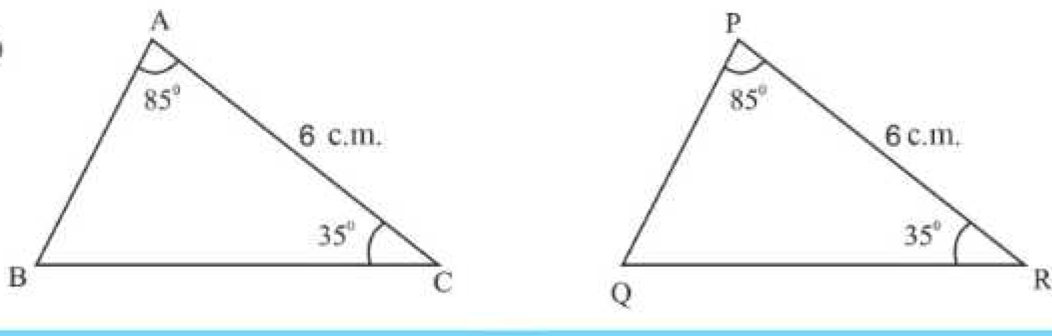
(ख) यदि उत्तर हाँ है, तब किस शर्त पर दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगें ?

(ग) त्रिभुज के अन्य कौन-कौन से अंग बराबर होंने से को-भु-को सर्वांगसमता शर्त के अनुसार दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे ?

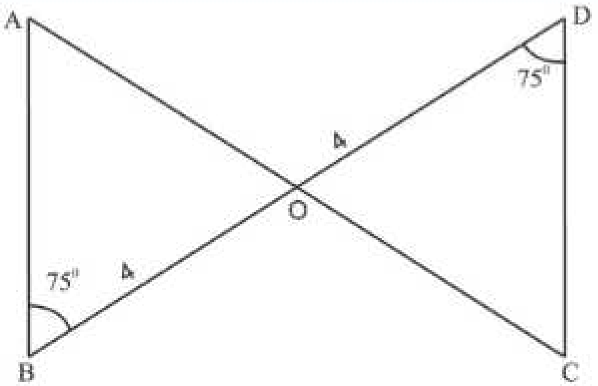
उदाहरण :

नीचे दिए गए त्रिभुजों में से जो त्रिभुज-युग्म को-भु-को सर्वागसमता की शर्त के अनुसार सर्वांगसम है, उनको चुनिए। सर्वांगसमत संकेत का व्यवहार करके सर्वांगसम त्रिभुज युग्मों के नाम लिखिए।

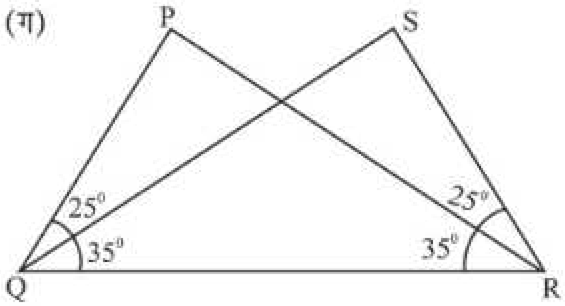
(क)



(ख)



(ग)



हल :

(क) में $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

क्योंकि $\overline{AC} \cong \overline{PR}, \angle A \cong \angle P$

और $m\angle C \cong m\angle R$

(ख) में $\Delta ABO \cong \Delta CDO$

क्योंकि $\overline{BO} \cong \overline{DO}$ (दिया गया है)

$m\angle B \cong m\angle D$ (दिया गया है)

$m\angle AOB \cong m\angle COD$ (शीर्षाभिमुखी कोण)

बताइए

आकृति (ख) में $\angle B$ और $\angle D$ के बदले $\angle A$ और $\angle C$ की माप 75° दी जाने से क्या $\angle ABO$ और $ACDO$ सर्वांगसम होंगे ? इसका कारण बताइए।

(ग) में ध्यान दें :

$m\angle PQR = 25^0 + 35^0 = 60^0$

$m\angle SRQ = 25^0 + 35^0 = 60^0$

$\Delta PQR \cong \Delta SRQ$

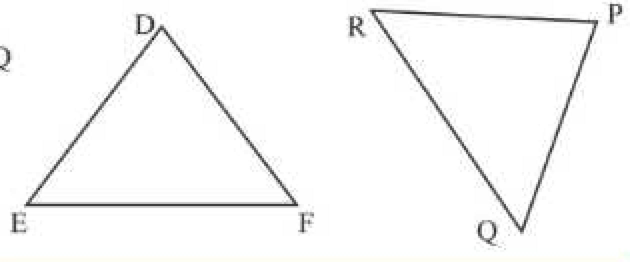
क्योंकि $\overline{QR} \cong \overline{QR}$ (सामान्य भुजा)

$\angle PQR \cong m\angle SRQ$ (प्रत्येक की माप - है

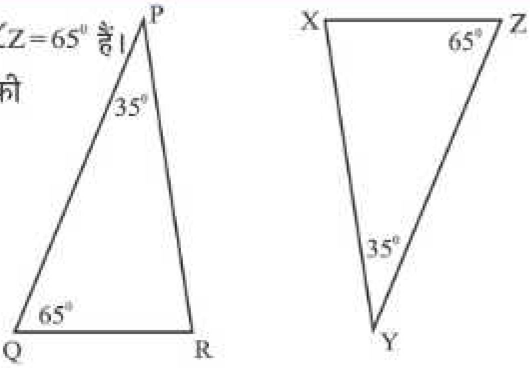
$m\angle PRQ \cong m\angle SQR$ (दिया गया है।)

अभ्यास 9.6

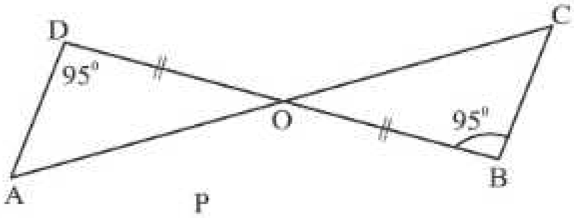
1. बगल में दिए गए त्रिभुजों में $\overline{DE} \cong \overline{PQ}$ $m\angle E = m\angle Q$ अन्य किन दो कोणों की माप बराबर होने से दोनों त्रिभुज को-भु-को शर्तपर सर्वांगसम होंगे ?



2. बगल के त्रिभुजों में $m\angle P = m\angle Y = 35^\circ$ और $m\angle Q = m\angle Z = 65^\circ$ हैं। अन्य कौन से दो अंग बराबर होने से दोनों त्रिभुज को-भु-को की सर्वांगसमता की शर्त पर सर्वांगसम होंगे ?



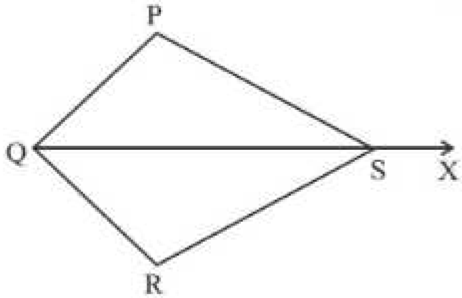
3. बगल के कौन से दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे ? सर्वांगसमता की शर्त लिखिए।



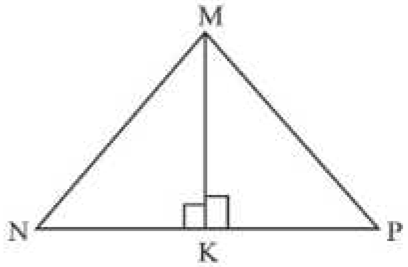
4. बगल मे दिए गए त्रिभुजों में $\overrightarrow{QX}$, $\angle PQR$ और $\angle PSR$ को समद्विभाजन करती है।

Δ QRS और Δ QPS सर्वांगसम होंगें ? यदि सर्वांगसम है, तब यहाँ कौन सी सर्वांगसमता की शर्त लागू होती है ?

ΔPQS और Δ RQS जैसे कौन-से तीन अंग युग्म सर्वागसम होंगे ?



5. बगल में दो त्रिभुज दिए गए हैं। $\angle NMP$ का समद्विभाजक। $\overline{MK}$ है और $\overline{MK} \perp \overline{NP}$ है। बताइए कौन-से दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं।



9.3.4 समकोण त्रिभुज - युग्म सर्वांगसम होने की शर्त :

खुद करके देखिए :

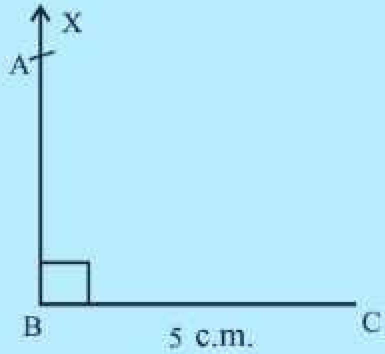
नीचे की सूचना के अनुसार खींचिए :

- 5 से.मी. लंबी $\overline{BC}$ खींचिए (आकृति -क)
- चाँद का व्यवहार करके $\overrightarrow{BX}$ खींचिए, जैसे $\overrightarrow{BX} \perp \overline{BC}$ होगी। (आकृति -ख)

(आकृति -क)

(आकृति -ख)

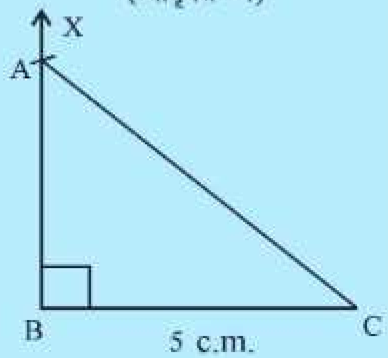
- परकार द्वारा 6 से.मी का व्यासार्द्ध लीजिए। C को केन्द्र बनाकर चाप का अंकन कीजिए जैसे चाप $\overrightarrow{BX}$ को प्रतिच्छेदन करेगी। प्रतिच्छेदन बिन्दु का नाम A दें।



(आकृति -ग)

- $\overline{AC}$ खींचो।

  अब ΔABC प्राय हुआ। (आकृति -घ)



(आकृति -घ)

- उसी प्रकार ΔPQR खींचिए, जिसको $QR=5$ से.मी. है, $m\angle PQR=90^0$ है और $RP=6$ से.मी. है।

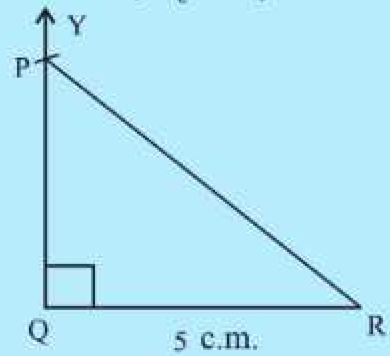
- अब नीचे के प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

  - Δ ABC और Δ PQR क्या एक एक समकोण त्रिभुज होंगे ? क्यों ?

  - त्रिभुज-युग्म में से $\overline{AB}$ और $\overline{PQ}$ को मापिए। दोनों की लबांई क्या बराबर हुई ?

  - खाली जगहें भरो :

    $\overline{AB} \equiv$ ...., $\overline{BC} \equiv$ ...., $\angle ABC \equiv$ ....,



(आकृति -ङ)

अब क्या Δ ABC और Δ PQR को सर्वांगसम कह सकेंगे ? किस सर्वांगसमता की शर्त के अनुसार यह होगा।

- हम किन -किन मापों को लेकर त्रिभुज खींचे थे।

  इस गतिविधि से हम इस निकर्ष पर पहुँचे :

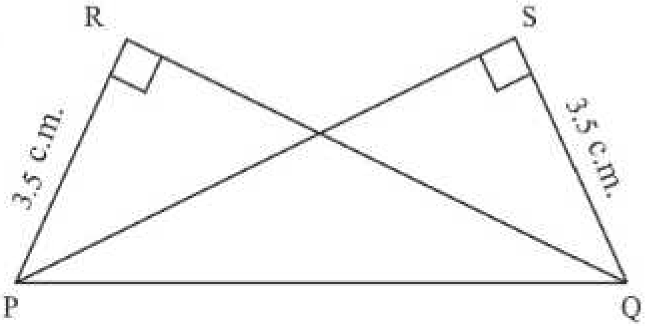
किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमश: किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कोण और एक भुजा के बराबर हो, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

इस सर्वांगसमता को समकोण-कर्ण-भुजा सर्वांगसमता या संक्षेप में - स-क.भु सर्वांगसमता कहा जाता है।

उदाहरण :

निम्नलिखित त्रिभुजों में से कौन सा त्रिभुज युग्म स.क. भु. सर्वांगसमता के अनुसार सर्वांगसम हैं? उन त्रिभुज युग्म के सर्वसमता चिह्न का व्यवहार करके लिखिए। अपने अगर का कारण भी दर्शाइए।

(क)



हल :

(क) क्योंकि $\Delta RPQ \cong \Delta SPQ$

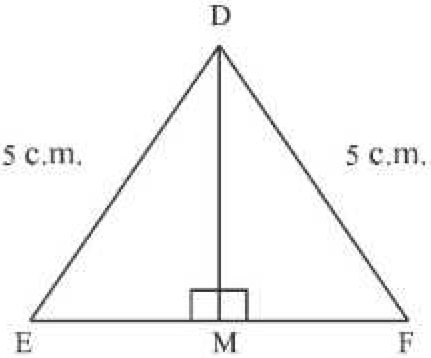
ΔRPQ और ΔSPQ में

$\angle PRQ$ और $\angle QSP$ समकोण हैं। (दत्त)

कर्ण $\overline{PQ} \cong$ कर्ण $\overline{QP}$ (समानता)

$\overline{RP} = \overline{SQ}$ (दत्त)

(ख)



हल :

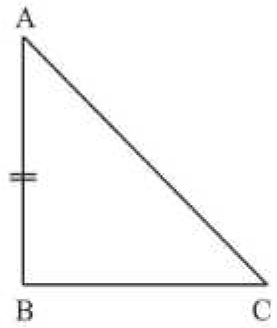
(ख) Δ DEM $\cong \Delta$ DFM

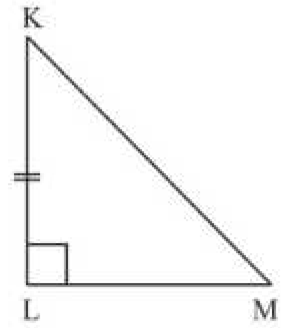
क्योंकि $\angle DME$ और $\angle DMF$ समकोण है कर्ण $\overline{ED} \cong$ कर्ण $\overline{FD}$ (दत्त)

$\overline{DM} = \overline{DM}$ (समानता भुजा)

अभ्यास 9.7

1. बगल के त्रिभुजों मे $m\angle L = m\angle B = 90^\circ$ AB = KL । अन्य किस शर्त पर दोनों त्रिभुज स-क-भु सर्वांगसमता के अनुसार सर्वांगसम होंगे?





2. ΔABC में $\overline{AB} = \overline{AC}$ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ है।

Δ ABD और Δ ACD में किन की सर्वांगसमता के कारण Δ ABD और Δ ACD स-क-भु-सर्वांगसमता का अनुसार सार्वगसम होंगे।

दशम अध्याय

परिमिति

10.1 हमें जो ज्ञात हैं :

किसी बंद आकृति की सीमा निरूपक रेखाखण्डों की लम्बाई का योग इसका परिमाप है। विद्यालय के अहाते के चारों ओर की दीवारों की लम्बाई बगीचे के चारों ओर की सीमा, फोटो का फ्रेम आदि परिमाप को सूचित करते हैं।

आप को रोजमर्श की जिंदगी में जिन परिस्थितियों में परिमाप ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है, उनके दो उदाहरण दीजिए।

बताइए :
पैदल जाने से किस स्थिति में अधिक दूरी तय करनी पडेगी ?
4 मीटर लम्बाई के वर्ग के चारों ओर घूमने के लिए था अथवा
4 मी लंबे और 3 मी. चौड़ी एक आयत के ओर घूमने के लिए था ?

आकृति 10.1

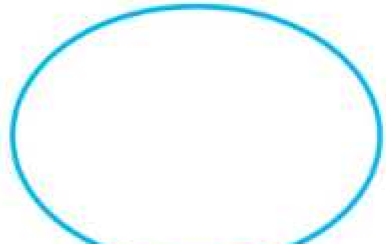
विद्यालय की वार्षिक खेल-कूद प्रतियोंगिता होगी। विभिन्न दूरी की दौड़ प्रतियोगिता के लिए दौड़ का मार्ग चूना डालकर दर्शाया जाएगा। समर और रहीम खेल के शिक्षक की मदद कर रहे थे। सौ मीटर दौड मार्ग तैयार करने के लिए माप के फीते से 100 मी. मापकर सीधी रेखा खींचकर मार्ग बनाया गया। उसके बाद 400 मी. दौड़ मार्ग बनाया जाएगा।

शिक्षक से समर ने पूछा, 'सर! हमारे मैदान में 400 मी का दौड मार्ग बनाने के लिए पर्याप्त जगह नहीं है। 100 मी के लिए तो जगह दे दी गई है। 400 मी के लिए चार गुनी जगह की जरूरत है। विद्यालय के अहाते में इतनी जगह तो नहीं है?'

रहीम ने पूछा, क्या आप ने पिछले साल की खेल-कूद प्रतियोगिता नहीं देखी है ?

समर ने कहा, 'नहीं, मेरी तबीयत खराब थी। इसलिए मैं आ नहीं सका था।'

रहीम ने कहा, 400 मी दौड के लिए मार्ग कों 100 मी दौड़ के मार्ग की तरह नहीं बनाया जाता। उसे गोलाकार किया जाता है। यह कहकर उसने समर को अपनी कॉपी में एक आकृति बनाकर दिखा दिया।



आकृति 10.2

उसने कहा कि इस - मार्ग पर दौड़ने से 400 मी.पूरा हो जाता है।

खेल के शिक्षक ने बताया, 'यह मार्ग एक बंद आकृति है। इसका परिमाप 400 मीं. है। चारों ओर से - रेखा से बंद आकृति का परिमाप का ज्ञात करने का नियम आपको पता नहीं हैं। आप पहले से वर्ग और आयत का परिमाप ज्ञात करना सीख चुके हैं।'

समर ने कहा, 'हाँ, आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौडाई)'

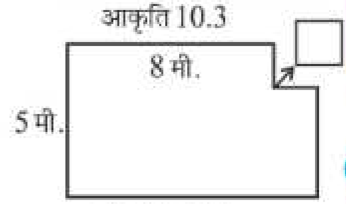
रहीम ने काहा, ' वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा की लम्बाई।'

अब बताइए :

- बगल की आयताकार आकृतिवाली कागज का परिमाप कितना है ?

आकृति 10.3

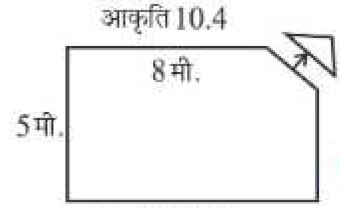
- ऊपर की आयातकार आकृति 10.3 के कागज से एक कोने से 2 मी भुजावाला वर्गाकार कागज काट कर बाहर कर देने से बची आकृति का परिमाप कितना होगा ?



आकृति 10.4

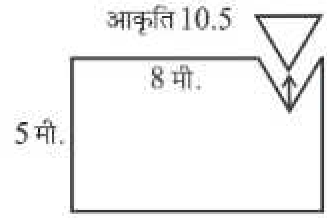
- कागज के दोनों टुकड़ों के परिमाप की तुलना करने से क्या ज्ञात हुआ ?

- यदि आकृति 10.3 में दर्शाए गए कागज के टुकड़े के एक कोने से आकृति 10.5 में त्रिभुज की आकृति का एक टुकड़ा काट लें, शेष कागज टुकडे की परिमाप को मूल कागजच टुकड़े के परिमाप से तुलना करने से शेष कागज का परिमाम मूल कागज कें परिमाप के साथ बराबर होगा, या अधिक होगा या कम होगा ?



आकृति 10.5

- यदि आकृति 10.6 में जैसे दर्शाया गया है, उसी प्रकार एक त्रिभुज की आकृति काट ली जाए, तब शेष कागज के टुकड़े के परिमाप को मूल कागज के टुकडे के परिमाप से तुलना करने पर हमें क्या मिलेगा ?



आकृति 10.6

उदाहरण -1

38 से.मी. लम्बाई और 22 से .मी. चौडाईवाले एक फोटोफ्रेम की आलुमिनियम के पत्ती को खोलकर 10 से.मी भुजा वाले कितने वर्गाकार फोटोफ्रेम बनाए जा सकेंगे ?

> **क्या आप जानते हैं ?**
> आयातकार आकृति की लम्बाई (length) को l और चौड़ाई (Breadth) के b रूप में लिखा जा सकता है।

हल :

फोटो की लम्बाई =38 से.मी.

चौड़ाई = 22 से.मी.

फोटोफ्रेम में इस्तेमाल किए गए एलुमिनियम पत्ती कुल लंबाई = फोटोफ्रेम का परिमाप

$= 2 \times (l + b) = 2 \times (38 + 22)$ से.मी.

$= 2 \times 60$ मी.= 120 से.मी.

तो आलुमिनियम पत्ती की कुल लंबाई =120 से.मी.

बनाए जानेवाले वर्गाकार फोटोफ्रेम की भुजा = 10 से.मी.

इसका परिमाप = 4 ×10 से.मी = 40 से.मी.

अर्थात् एक वर्गाकार फोटोफ्रेम के लिए 40 से.मी. आलुमिनियम के पत्ती के जरूरत है।

$$\text{फोटोफ्रेम की संख्या} = \frac{\text{आलुमिनियम पत्ती की लम्बाई}}{\text{नए फोटोफ्रेम का परिमाप}}$$

$$= \frac{120}{40} = 3$$

✍ हल कीजिए :

1. बाबू ने एक आयातकार आकृति बनाई, जिसकी लंबाई - से.मी. और चौडाई - से.मी. है। जॉन ने एक वर्गाकार आकृति बनाई जिसकी प्रत्येक भुजा - से.मी है। दोनों आकृतियों पर फ्रेम चढ़ाने के लिए हर से.मी. को - रुपए के हिसाब से किसका कितना खर्च होगा? किसकी आकृति के लिए अधिक खर्च होगा?

2. एक वर्ग और एक आयत का परिमाप बराबर है। आयतकार क्षेत्र के चारों-ओर तार की जाली लगाने के लिए मीटर को 5 रुपए के हिसाब से 400 रुपए खर्च हुए। वर्ग की भुजा की लंबाई कितनी है?

पहले प्रश्नों का हल कीजिए, उसके बाद नीचे लिखे गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

- तार की जाली की लंबाई जानने के लिए क्या करना होगा?
- आयत के परिमाप के साथ तार की जाली की लंबाई का क्या संबंध है?
- आयत का परिमाप कितना है?
- वर्ग का परिमाप ज्ञात हो तो उससे वर्ग की प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात होगी?
- यहाँ वर्ग की प्रत्येक भुजा की लंबाई कितनी हुई?

अभ्यास - 10.1

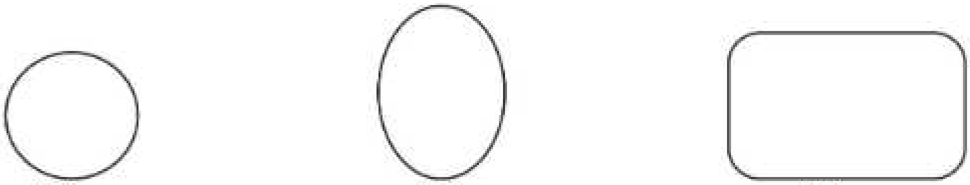
1. बेबिना के घर को सटे फूल के बगीचे की एक तरफ उसका घर है। अन्य तीन किनारों की लंबाई क्रमश: 13.5मी, 7.8 मी और 11.7 मी. है। उसने फूल के बगीचे को बाड़ लगाकर सुरक्षित रखने की इच्छा की। बाड़ लगाने के लिए प्रत्येक मीटर के लिए 6.50 रुपए खर्च होंगे। तब उसे कुल कितना खर्च करना होगा?

2. एक वर्गाकार कागज पट्टी की लंबाई 10 से.मी है। एक आयतकार कागज पट्टी की लंबाई 12 से.मी और चौडाई 8 से.मी है। दोनों के एक एक कोने से 4 से.मी भुजा के वर्ग काट लिए गए। प्रत्येक कागज पट्टी के शेष अंशों का परिमाप ज्ञात कीजिए।

3. एक आयत की लंबाई चौड़ाई से दो गुनी है। इसका परिमाप 600 मीटर है। इसकी चौड़ाई के बराबर माप के वर्ग का परिमाप ज्ञात कीजिए।

10.2 वृत्त की परिधि

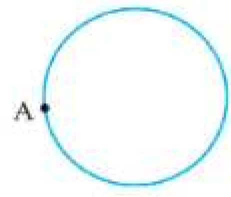
अनू ने एक गत्ता (कार्ड़बोर्ड़) से निम्न भिन्न वर्गाकार आकृतियाँ काट लीं।



(क) (ख) (ग)

आकृति 10.7

उसने इन आकृतियों के किनारों पर विभिन्न रगों की झालर लगानी चाही। पर वह तय कर नहीं सकी कि किस आकृति के लिए कितनी लम्बी झालर की जरूरत पड़ेगी। इसके किनारे सीधे नहीं थे। इसलिए स्केल से मापना संभव नहीं है। इसलिए ऊसने उपर की कक्षा में पढ़नेवाली वीणा से पूंछा।

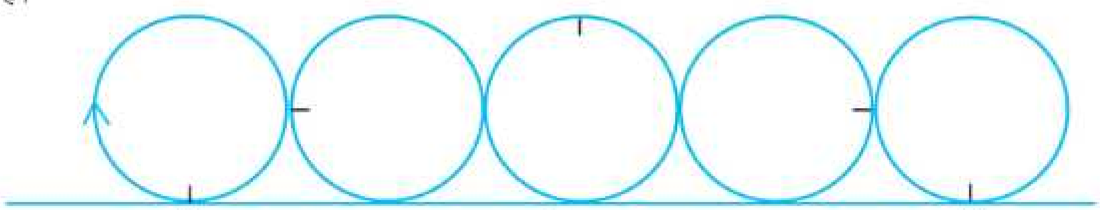


आकृति10.8

वीणा पहले एक वृत्ताकार कागज पट्टी लेकर उसके किनारे की एक जगह पर एक बिन्दु चिह्नित किया। उसका नाम दिया A। एक धागा लेकर उसके एक सिरे को बिंदु पर स्थिर रखने को कहा, धागे को आकृति के किनारों से सटाकर A बिन्दु तक घुमाकर ले आई। A बिन्दु पर धागे का जो अंश छुता है, वही उसने धागे पर स्याही से चिह्न दिया। उसके बाद उसने अनू से कहा, 'धागे के पहले सिरे से इस स्याही के चिह्न तक की लबांई और आकृति का परिमाप दोनों बराबर हैं।

वीणा की सहेली मीना ने दूसरी प्रणाली से उस कागज पट्टी का परिमाप ज्ञात किया।

मीना ने कगाज पट्टी के किनारे को बिन्दु पर स्याही से चिह्न लगाया। उसके बाद स्केल से एक सफेद कागज पर एक सीधी रेखा खींची। उस रेखा पर कागज पट्टी के किनारे को सटाकर रखा, जैसे कि स्याही का चिह्न रेखा से सटकर रहे। उसके बाद उसने वृत्ताकार कागज पट्टी को रखा पर धीरे धीरे लुढ़क्कार ओग बढ़ाया। अब उस पर अंकित बिन्दु दुबारा रेखा को स्पर्श करना है।



आकृति 10.9

अब मीना ने कागज पट्टी को उठा लिया। रेखा पर अंकित दोनों बिन्दुओं की दूरी मापकर मीना के वृत्ताकार कागज पट्टी का परिमाप ज्ञात किया।

वीणा और मीना की भाँति विधियाँ देखने के बाद अनू ने बोतल का एक काग लिया। एक फीता उसके चारों ओर घुमाकर काग का परिमाप बताया।

✍ वीणा, मीना और अनू की परिमाप ज्ञात करने की प्रणालियों में से आप को कौन सी पसंद आई ? क्यों पसंद आई, लिखिए।

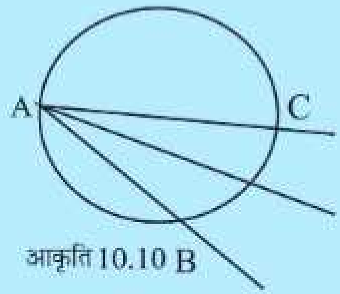
खुद करके देखिए:

कार्य-1

- दो बराबर माप की थालियाँ लाइए। ऊपर जैसे बताया गया है, उनमें से किसी एक प्रणाली से दोनों थालियों का परिमाप ज्ञात कीजिए। दोनों परिमापों में क्या संबंध है ?

कार्य-2

- बगल की आकृति के देखिए। एक वृत्ताकार पट्टी के किनारे पर एक बिन्दु का चिह्न दें। वहाँ A लिखिए। एक धागे से एक सिरे को A के साथ सटाकर रखिए।
- धागे के दूसरे सिरे को खींचकर रखिए, जैसे धागा पट्टी से सटाकर रहे। पट्टी के किनारे को - धागे का जो भाग छुता है, उसका नाम B दें।



आकृति 10.10

- धागे के दूसरे सिरे को पट्टी के भिन्न-भिन्न स्थान पर रखिए। आप को याद होगा कि धागे का अधिक से अधिक भाग कागज पट्टी के साथ सटाकर रखना है। पट्टी को किनारे के साथ धागो का सबसे अधिक भाग जहाँ स्पर्श करेगा उस बिन्दुका नाम C दीजिए।
- A और C के बीच की दूरी को स्केल से मापिए। $\overline{AC}$ की माप वृत्ताकार कागज पट्टी की व्यास की लंबाई है।
- कागज पट्टी का परमिाप मापिए। व्यास की माप से किसका गुना होगा परिमाप की माप के साथ वह बराबर होगी ?

क्या आप जानते हैं ?

वर्गाकार आकृति के किनारे की लंबाई को उसकी परिधि कहा जाता है।

आप साइकिल, स्कुटर या बैलगाडी के पहियों की परिधि धागे या फीते से माप सकेंगे। विभिन्न औजारों में वृत्ताकार आकृति के पुरजे लगते हैं। उनकी माप में त्रुटि नहीं रहनी चाहिए। धागे या फीते से मापकर जो परिधि ज्ञात होगी वह पूरी तरह त्रुटिशून्य नहीं होगी। इसलिए हमें गाणितिक सूत्रों का ज्ञान होना चाहिए।

क्या आप जानते हैं ?

वृत का व्यास उसकी त्रिज्या का दुगुना होता है।

वृत्त की परिधि और उसकी व्यास या त्रिज्या में क्या संबंध है, उसे अब जानेंगे। 5 भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं के वृत्तों की परिधि की माप को लेकर निम्न सारणी बनाई गई है।

वृत्त	त्रिज्या	व्यास	परिधि	परिधि : व्यास	परिधि-त्रिज्या
1	3.3	6.6	20.72	$\frac{20.72}{6.6}=3.14$ (लगभग)	$\frac{20.72}{3.3}=2\times3.14$
2	3.5	7.0	31.6	$\frac{22.0}{7.0}=3.14$ (लगभग)	$\frac{22.0}{3.5}=2\times3.14$
3	5.0	10.0	31.4	$\frac{31.6}{10.0}=3.14$ (लगभग)	$\frac{31.6}{5.0}=2\times3.14$

वृत्त	त्रिज्या	व्यास	परिधि	परिधि : व्यास	परिधि-त्रिज्या
4	7.0	14.0	44.0	$\frac{44.0}{14.0}=3.14$ (लगभग)	$\frac{44.0}{7.0}=2\times3.14$
5	15.0	30.0	94.0	$\frac{94.0}{30.0}=3.13$ (लगभग)	$\frac{94.0}{15.0}=2\times3.13$

इस सारणी से ज्ञात होता है कि वृत्त का आकर चाहे कुछ भी हो, पर इसकी परिधि और व्यास का अनुपात सदैव बराबर रहता है। हम कहते हैं सभी वृत्तों और व्यासों का अनुपात (परिधि व्यास) एक ध्रूव संख्या है। इस ध्रूव संख्या को पाई π कहा जाता है।

हमें ज्ञात हुआ :

- वृत्त की परिधि अपने व्यास के तीन गुने से अधिक है।
- वृत्त की परिधि को c व्यास को d और त्रिज्या को r मानने से $\frac{c}{d}=\pi$ या $c=\pi d$ और $c=2\pi r\ (\therefore d=2r)$

क्या आप जानते हैं ?

π ग्रीक भाषा का एक अक्षर है। π का मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 माना जाता है।

अब जानेंगे

एक वृत्त की परिधि और उसके व्यास का अनुपात वृत्त का आकार बढ़ने घटने पर भी सदैव बराबर रहता है। अर्थात् विभिन्न माप के व्यास लेकर वृत्त बनाइए। प्रत्येक की परिधि मापकर उसे संबंधित वृत्त के व्यास से भाग देनेपर सभी वृत्तों के क्षेत्र में भागफल बराबर रहना है। यह भागफल या अनुपात (परिधि : व्यास) को π संकेत द्वारा बनाया जाता है। (अनेक वर्ष तक परीक्षण निरीक्षण करने के बाद 1761 में गणितज्ञ लम्र्ब्ट ने प्रामाण किया कि π एक अपरिमेय संख्या है) पर हिसाब करने के लिए π के एक लगभग मान का व्यवहार किया जाता है। विश्व के विभिन्न स्थानों में इसके लिए भिन्न-भिन्न मानों की कल्पना की गई थी। उसकी एक तालिका नीचे दी गई है :

π के लगभग का मान	किस गणितज्ञ या किस सभ्यता द्वारा यह मान स्वीकृत हुआ था ?	समय
$\pi=\sqrt{10}=3.16$	वेद (भारत)	संभवत: 3000 ई.पू.
$\pi=\frac{22}{7}=3.1428$	अर्कमेडिस (ग्रीस)	सन् 287-212 ई.पू.
$\pi=3.1416$	टलेमी (ग्रीस)	सन् 150 ई.
$\pi=\frac{355}{113}$	चुंग्ची (चीना)	सन् 150 ई.
$\pi=\frac{62832}{20000}=3.1416$	आर्यभट्ट (भारत)	सन् 499 ई.
$\pi=\frac{3927}{1250}=3.1416$	भास्कराचार्य (भारत)	सन् 1150 ई.
$\pi=\frac{9801}{1103\sqrt{8}}=3.1415926218033$	रामानुजन (भारत)	सन् 1887-1919 ई.

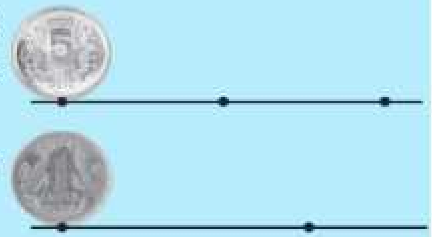
हम सामान्यत: हिसाब करते समय (वृत्त का परिमाप या क्षेत्रफल ज्ञात करते समय) π के लिए $\frac{22}{7}$ या 3.141 लेते हैं। सामान्यत: π के लिए कौन सा मान लिया जाएगा, प्रश्न में उसका उल्लेख रहता है। यदि प्रश्न में π का मान न दिया गया हो तब हम ध्यान देखें कि प्रश्न की त्रिज्या / व्यास क्या 7 का गुणज है ? यह है, तो π के लिए $\frac{22}{7}$ लेंगे। इससे हिसाब करना आसान होगा। अथवा π के लिए मान 3.141 या 3.14 लेंगे।

आप अपने क्षेत्र के अनार से पूछेगें, वह एक चूड़ी तैयार करने के लिए कितनी लंबाई सोने और चाँदी का तार ले रहा है ? वह बताएगा कि वह चूड़ी के व्यास का तीन गुना लंबा तार लेगा। एक लुहार से पूछेगें कि वह बैलगाड़ी पहिए का हाल बनाने के लिए कितना लंबा पत्ती लेकर उसे गोलाकार आकृति का बानएगा ? वह भी बताएगा कि पहिए को व्यास का तीन गुना लंबी पत्ती लेना होगा। अतएव, सुनार या लुहार वृत्त की परिधि $=3\times$ व्यास का सूत्र इस्तेमाल करना है। पर इस सूत्र से परिधि का पूर्व सही मान नहीं मिलेगा। अधिक सही मान जानने के लिए हम पाई (π) $\frac{22}{7}$ के लिए 3.141 मान लेते हैं।

खुद करके देखिए :

आकृति 10.11

- पाँच रुपए का एक सिक्का और एक रुपए का सिक्का लीजिए।
- पाँच रुपए के सिक्के के किनारे की एक बिन्दू पर काले रंगों का निशान लगाइए।
- एक रुपए के सिक्के के किनारे के एक बिन्दु पर लाल रंग का निशान लागाइए।
- अपनी कॉपी के एक पन्ने पर दो सीधी रेखा खींचिए एक रेखा पर पाँच रुपए के सिक्के को धीरे धीरे घुमाकर आगे ले लीजिए आप देखेगें कि रेखा पर भिन्न-भिन्न स्थान पर काला निशान लग गया होगा।
- दूसरी रेखा पर एक रुपए का सिक्का धीरे-धीरे घुमाकर आगे लेते समय रेखा पर भिन्न-भिन्न स्थान पर लाल निशान लग जाएगा।



आकृति 10.12

ध्यान दें:

- पहले की रेखा पर पास-पास के दो काले निशान के बीच की दूरी की परिधि है।
- उसी प्रकार दूसरी रेखा पर पास-पास के दो लाल निशान के बीच की दूरी एक रुपए के सिक्के की परिधि है।

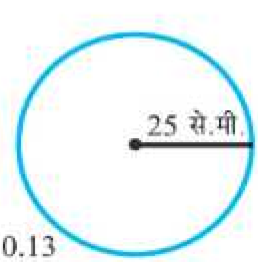
अब बताइए:

(क) दोनों सिक्कों में से कौन सा सिक्का एक बार घूमने समय दूसरे सिक्के से अधिक दूरी तय करती है ?

(ख) कौन सा सिक्का कितनी बार घूमने से पन्ने के बाईं ओर से दाईं ओर जाता है ?

उदाहरण :2

एक वृत्त की त्रिज्या 25 से.मी है। इसकी परिधि ज्ञात कीजिए ? ($\pi = 3.14$)



आकृति 10.13

हल :

वृत्त की त्रिज्या $= r = 25$ से.मी

$\therefore$ इसकी परिधि= $2\pi r = 2 \times 3.14 \times 25$ से.मी $= 157$ से.मी।

✍ **उत्तर ज्ञात कीजिए:**

(क) एक चुड़ी का व्यास 3.5 से.मी. है। इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।

(ख) एक पहिए की त्रिज्या 21 से.मी. है। यह कितनी बार घूमने से 66 मी. दूरी तय करेगी ?

उदाहरण : 3

एक वृत्त की परिधि 66 मी. है। इस का व्यास और त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)

हल :

पहली विधि वृत्त की परिधि

$= \pi d = 66$ (d = वृत्त का व्यास)

$\therefore d = \frac{66}{\pi}$

$= \frac{66}{\frac{22}{7}}$

$= \frac{66 \times 7}{22} \quad = 21$

$\therefore \quad r = \frac{d}{2} = \frac{21}{2} \quad = 10.5$ मी.

दुसरी विधि वृत्त की परिधि

$= 2\pi r = 66$ मी.

$= 66 \quad = 2\pi r$ मी.

$\therefore r = \frac{66}{2\pi} \quad = \frac{66}{2 \times \frac{22}{7}} \quad = \frac{66}{\frac{44}{7}}$ मी.

$= \frac{66 \times 7}{44} = \frac{21}{2} \quad = 10.5$ मी.

$\therefore$ व्यास = 2× व्यसार्द्ध =2×10.5 =21 मी.

- इन दो विधियों में क्या अंतर पाया जाता है ?
- आपको कौन -सी प्रणाली सरल लगती है ? कारण दर्शाइए।

उदाहरण : 4

बगल की आकृति में तीन अर्द्धवृत्तों द्वारा बंद आकृति है। प्रत्येक अर्द्धवृत्त का व्यास 7 से.मी. है। त्रिभुज परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल :

प्रत्येक अर्द्धवृत्त का व्यास d=7 से.मी.

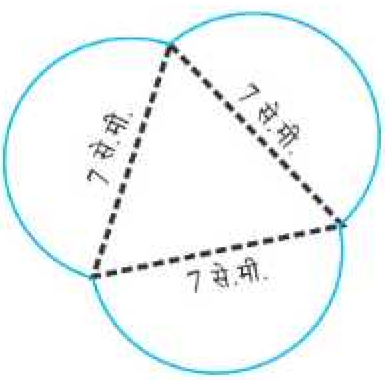
$\therefore$ प्रत्येक अद्धवृत्त की लंबाई = वृत्त के परिमाप का आधा

$= \pi d \times \frac{1}{2} = \frac{22}{7} \times 7 \times \frac{1}{2}$ से.मी.

= 11 से.मी.

आकृति का परिमाप = 3 अर्द्धवृत्तों की लंबाई का जोड़

= 3×11 से.मी. = 33 से.मी.



आकृति 10.14

ध्यान दें :

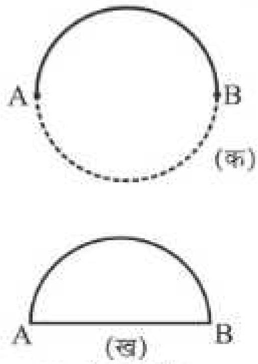
बगल में आकृति 10.15 (क) में एक वृत्त को दो बराबर भागों में बाँटा गया है। इसका ऊपरी भाग एक अर्द्धवृत्त की आकृति का है। इसके दोनों छोरों के नाम A और B है।

इस अर्द्धवृत्त आकृति की लकीरों की लँबाई

= पूरे वृत्त के परिमाप के दो बराबर भागों में से क्या एक भाग (अर्द्ध परिधि)

$$= \frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

आकृति 10.15 (ख) में एक अर्द्धवृत्त की आकृतिवाला बंद क्षेत्र है। इसकी सीमा दो भागों को लेकर बनी है। एक भाग है A से B तक का वक्र रेखाखण्ड या अर्द्धवृत्त है। दूसरा भाग है A से B तक का सीधा रेखाखण्ड यह सीधा रेखाखण्ड AB अर्द्धवृत्त का व्यास है।



आकृति 10.15

अतएव, आकृति 10.15 (ख) में अर्द्धवृत्त की आकृति वाली बंद क्षेत्र का परिमाप

= अर्द्धवृत्त की लंबाई + अर्द्धवृत्त का व्यास $= \pi r + 2r$

अभ्यास 10.2

1. एक वृत्त का व्यास 0.42 मीटर है, इसकी परिधि ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)
2. एक वृत्ताकार तार को सीधा किया गया। उसके बाद तार को वृत्ताकार क्षेत्र में बनाया गया। इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई 22 से.मी हुई। पहले जो वृत्ताकार आकृति थी, उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
3. एक वृत्तकार कार्डबोर्ड की त्रिज्या 14 से.मी. है। उसे काटकर दो अर्द्धवृत्त बनाए गए। दो अर्द्धवृत्त के किनारों पर लैस लगाने के लिए कितनी लैस की आवश्कता पड़ेगी ?

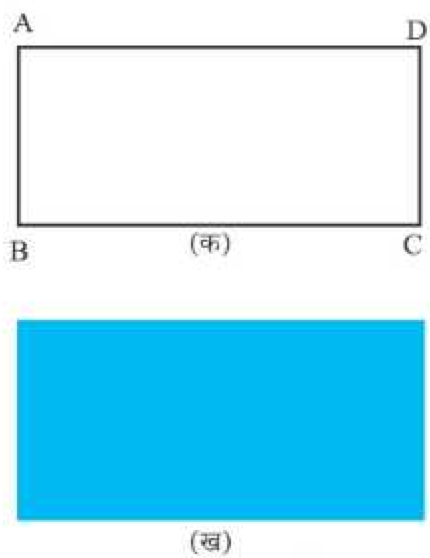
10.3. क्षेत्रफल

एक समतल पर खींची गई अंकित एक बंद क्षेत्र से समतल का एक भाग समतल से अलग हो जाता है। यह बंद क्षेत्र का अन्त:भाग है। हमारे बगीचे का कुछ भाग भी बाड़ से बंद होता है। हम बगीचे का कुछ भाग बाड़ लगाकर बंद करते हैं। बंद आकृति के साथ इसके द्वारा समतल क्षेत्र से अलग हो गए भाग के परिमाण को बंद क्षेत्र का क्षेत्रफल कहते हैं।

बगल की आकृति 10.16 (क) में ABCD एक आयत है।

आकृति 'ख' समतल कागज का जो भाग बंद आकृति ABCD कागज के पृष्ठ से अलग हो गया है। उसे छायांकित किया गया है। ABCD आयत और इससे बंद छायांकित क्षेत्र को एक साथ लेने से इसे ABCD आयत कहा जाता है।

इस छायांकित भाग को ABCD आयत का क्षेत्रफल कहा जाता है।



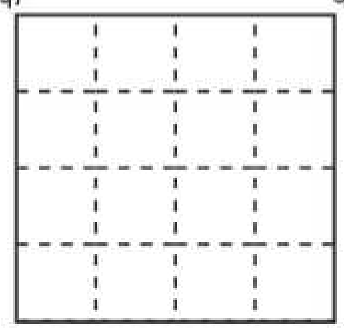
आकृति 10.16

जैसे लंबाई मापने के लिए मीटर एकक है और द्रव पदार्थ का परिमाप मापने के लिए लीटर एकक है, उसी प्रकार क्षेत्रफल मापने के लिए 1 मीटर भुजा वाले वर्ग के क्षेत्रफल को 1 वर्ग मीटर कहा जाता है। क्षेत्रफल मापने का यही वर्ग मीटर एकक है। छोटे क्षेत्रों का क्षेत्रफल मापने के लिए 1 से.मी. भुजाओं वाले वर्ग का व्यवहार किया जाता है। इसका क्षेत्रफल। वर्ग से.मी होगा।

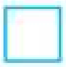
10.3.1. वर्ग का क्षेत्रफल :

आइए, एक वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

बगल की आकृति में 4 मीटर लंबी भुजा पर एक वर्ग दर्शाया गया है।



आकृति 10.17



यह आकृति 1 मीटर भुजावाला एक वर्ग है। इसे मापने की इकाई के रूप में हम व्यवहार करेंगे। इसके आकार की पट्टी लेकर हम कखगघ वर्ग पर बारबार रखेंगे। देखेंगे कि यह कुल कितनी बार उस पर रह सकेगी।

आकृति 10.17 में हमने देखा कि छोटा वर्ग गत्ता एक पंक्ति में चार बार रह सका और कुल चार पंक्तियाँ हुई। अर्थात् 1 मीटर लंबा वर्ग पट्टी कखगघ वर्ग पर $4\times4=16$ बार रह सका।

अब बताइए, कखगघ वर्ग में 16 मीटर लंबे वर्ग गत्ते में 16 बार में कितनी जगह घेर ली? कखगघ वर्ग का क्षेत्रफल $=16$ वर्ग मीटर है पर $16=4\times4$ या 4 का वर्ग है।

अतएव, 4 मी. लंबे भुजावाले वर्ग का क्षेत्रफल 4^2 वर्गमीटर

क्या आप जानते हैं?

4×4 को 4^2 के रूप में लिखा जाता है। यहाँ आधार 4 है, घातांक रहे। 4^2 को 4 का वर्ग कहा जाता है।

हमें ज्ञात हुआ:

एक वर्ग का भुजा की लंबाई a मी हो तों इसका क्षेत्रफल $=a^2$ वर्ग मीटर होगा।

वर्ग के क्षेत्रफल ज्ञात करने की सूत्र की चर्चा होने के बाद श्याम ने पास बैठे छात्र से पुछा, 'यदि एक वर्ग का क्षेत्रफल 9 वर्ग से.मी. हो तो उसकी भुजा की लंबाई कितनी से.मी. होगी?

रमन ने कुछ देर सोचकर कहा 3 से.मी. होगा

श्याम ने पूछा, 'आपको यह कैसे ज्ञात हुआ?

रमन ने बताया - $3\times3 = 9$ या $3^2 = 9$

वर्ग की (भुजा की लंबाई)^2= क्षेत्रफल

अतएव, भुजा की लंबाई 3 से.मी. होगी।

बताइए :
एक वर्ग का क्षेत्रफल 25 वर्ग मीटर होने पर इसकी भुजा की लंबाई कितनी होगी?

श्याम ने काहा, 'यदि किसी वर्ग का क्षेत्रफल 324 वर्ग से.मी. हो, तब उसकी भुजा की लंबाई कैसे ज्ञात करेंगे? हमें जो पहाड़ा मालूम है उनमें किसी एक संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर गुणन फल 324 तो नहीं होता?

दोनों ने वही प्रश्न अपने शिक्षक से पूछा, 'शिक्षिका ने बताया, 'किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर जो गुणफल मिलता है, उसे गुणा की गई संख्या का वर्ग कहते हैं।

जैसे - $3 \times 3 = 9$; हम कहते हैं कि 9 है 3 का वर्ग।

$4 \times 4 = 16$; अतएव, 16 है 4 का वर्ग।

याद रखो 3 को 9 का वर्गमूल कहते है।

उसी प्रकार 4 को 16 का वर्गमूल कहते हैं।

अतएव, 16 का वर्गमूल = 4 है (क्योंकि 4 और 4 का गुणनफल =16)

अब 324 का वर्गमूल ज्ञात करने की कोशिश कीजिए।

शिक्षिका की चर्चा से सभी अवगत हुए कि जिस संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना चाहेंगे, उसका गुणनखण्ड तय करेंगे। उन्हें दो बराबर भाग में बाँट देंगे, तब संख्या का वर्गमूल मिल जाएगा।

अब सभी 324 का वर्गमूल तय करने में लग गए।

$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 18 \times 18$

324 का वर्गमूल = 18

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

अतएव, जिस संख्या का क्षेत्रफल 324 होगा, उसकी भुजा की लम्बाई (324 का वर्गमूल) मीटर = 18 मीटर

सभी को पता चला :

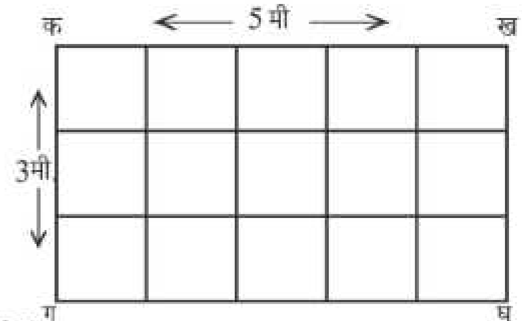
एक वर्ग की भुजा की लम्बाई = इसके क्षेत्रफल के परिमाण का वर्गमूल।

10.3.2.आयत का क्षेत्रफल

बगल की आकृति में कखगघ एक आयत है। इसकी लम्बाई 5 मी और चौड़ाई 3 मी. है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

1 मी. भुजावाले एक कागज का गत्ता लेकर कखगघ आयत के एक कोने से शुरु करके बारंबार रखेंगे।

अब बताइए :



- एक पंक्ति में यह गत्ता कितनी बार रह सकेगा ?
- इस प्रकार कितनी पंक्ति में यह रह सकेगा ?
- कुल कितनी बार रह सका ? $5 \times 3 = 15$ बार
- हर बार गत्ते का वर्ग कितनी जगह घिर गया ?
- कुल कितनी जगह घिर गया ? $15 \times 1 = 15$ बार

अतएव, आयत कखगघ का क्षेत्रफल = 15×1 वर्ग मीटर = 15 वर्ग मीटर

ध्यान दें : इसकी लम्बाई और चौड़ाई का गुणफल = $5 \times 3 = 15$

अतएव, a मी लंबे और b मी. चौड़े आयत का क्षेत्रफल = $(a \times b)$ वर्ग मीटर होगा।

उदाहरण :3

5 मी. लंबे भुजावाले वर्ग के क्षेत्रफल से इससे दुगुनी लंबी भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल कितना अधिक होगा ?

हल :

5 मी लंबे भुजावाले वर्ग का क्षेत्रफल $=5^2$ वर्ग मी. =25 वर्ग

दूसरे वर्ग की भुजा दुगुनी होगी = 5मी × 2 = 10मी

10 मी लंबाई भुजावाले वर्ग का क्षेत्रफल $=10^2$ वर्ग.मी. =100 वर्ग मी

दोनों वर्गों के क्षेत्रफल का अंतर =100 वर्ग मी. –25 वर्ग मी. =75 वर्ग.मी.

उदाहरण :4

100 मी. लंबाई वाले आयत का क्षेत्रफल 2000 वर्ग मी. है। लंबाई बराबर रहकर चौडाई दुगुनी होने पर दूसरे आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

प्रथम आयत की लंबाई = 100 मी.

क्षेत्रफल = 2000 वर्ग मी.

$$\text{चौड़ाई} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}} = \frac{2000}{100} \text{ मी} = 20 \text{ मी}$$

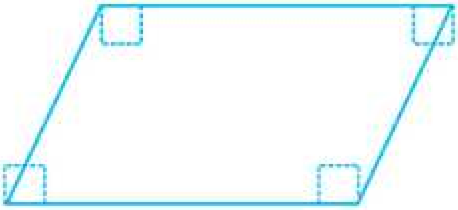
दूसरे आयत की लंबाई = 100 मी.

चौड़ाई = 2×20 मी = 40 मी.

क्षेत्रफल = (100×40) वर्ग मी.

= 4000 वर्ग मी.

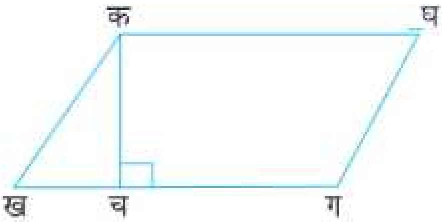
10.4. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल :



कक्षा में वर्ग और आयत की चर्चा जोशफ सुन रहा था। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उसने वर्गाकार कागज गत्ते लेकर समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल मापने की कोशिश की।

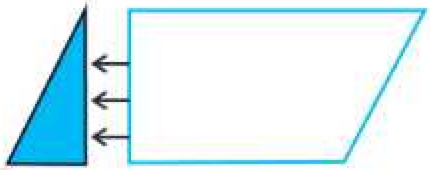
1 से.मी. भुजावाली वर्गाकार कागज गत्ते लेकर समांतर चतुर्भुज के एक किनारे से उस पर रखने की कोशिश की। उसने जो वर्गाकार कागज गत्ता लिया था, उसका कुछ भाव समांतर चतुर्भुज के बाहर रह गया। या संमातर चतुर्भुज का कुछ भाग उसके कागज गत्ते से घिर नहीं सका। क्या करना है, वह कुछ तय नहीं कर सका। उसने अपनी असुबिधा के बारे में शिक्षिका कों बताया।

उसके बाद शिक्षिका ने निम्न गतिविधियाँ करके समझाया।



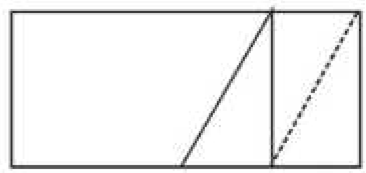
- उन्होंने एक कागज पर एक संमातर चतुर्भुज खींचा। उसका नाम कखगघ दिया।
- सेटस्वेयर का व्यवहार करके 'क' बिन्दु से खग भुजा पर एक लंब खींचा। उसका नाम रखा कच।

- अब संमातर चतुर्भुज को मूल कागज से अलग कर दिया गया।
- कखगघ समांतर चतुर्भुज की भुजाएँ -
- घग = कख = 10 से.मी., कघ = खग =14 से.मी.
- उसके बाद लंब को मापने से कच लंब = 6 से.मी. हुआ



- अब कचख - त्रिभुजाकार आकृति को समांनर चतुर्भुज से काटकर अलग कर दिया गया।
- शेष कचगघ यहाँ दर्शाया गया है।
- उसके बाद कचख त्रिभुजाकार आकृति को दूसरी तरफ लेकर जोडा गया जैसे कि कख और घग संपाती है।

घग और कख के किनारे बराबर हैं। (प्रत्येक 10 से.मी. है।) इसलिए वे दोनों किनारे एक दूसरे से मिल गए। दोनों कागज गत्तों को जोड़ने के बाद बनी नई कागज पह्ही बगल की आकृति में दर्शाई गई है। 'च' शीर्ष को 'छ' के रूप में दर्शाया गया है। दोनों गत्तों को जोड़ने के बाद यह एक आयत बन गया है।



चछ भुजा की लंबाई = चग भुजा की लंबाई + खच भुजा की लंबाई
= पहले की आकृति की खग भुजा की लंबाई
=14 से.मी.

कच भुजा की लंबाई =10 से.मी.

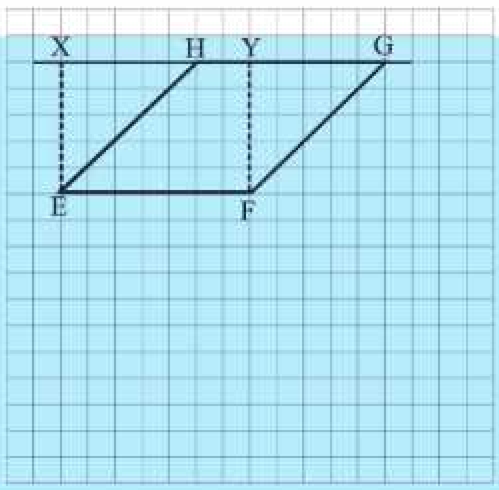
कचछख आयत का क्षेत्रफल = $l \times b = (14 \times 10)$ वर्ग से.मी.

आयत की चौडाई कच समांतर चतुर्भुज कखगघ के क शीर्ष से खग अंकित लंब है। इस लम्ब कच को समांतर चतुर्भुज की खग भुजा के प्रति ऊँचाई कहा जाता है अर्थात् भुजा के समांतर चतुर्भुज का आधार कहा जाता है।

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = (आधार × ऊँचाई) वर्ग इकाई।

शिक्षिका ने जिस गतिविधि द्वारा समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात किया। आप भी उस प्रकार की गतिविधि द्वारा समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

खुद करके देखिए:



- एक ग्राफ कागज पर EF रेखाखण्ड खींचिए।
- EF के बराबर वाला और एक रेखाखण्ड HG खींचिए, जैसे EF और GH ग्राफ कागज के दो समांतर रखा पर रहें। ध्यान दो कि E और H ग्रफ कागज पर ऊपर से नीचे कि ओर किसी एक रेखा पर न रहें।
- अब EH और FG दो रेखाखण्ड खींचो। EFGH अब एक समांतर चतुर्भुज है। इसके भीतर आनेवाले छोटे छोटे वर्गों को गिनकर समांतर चर्तुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(छोटे-छोटे वर्गों को गिनते समय पूरे वर्ग को 1 मानकर 1 वर्ग के आधे से अधिक भाग को 1 गिनेंगे और आधे से कम भाग को छोड़ देंगे।

F बिन्दु से HG रेखाखण्ड के प्रति लंब खींच कर लंब का नाम FY देंगे।

- GH रेखाखण्ड को बाईं ओर बढ़ाएँगे। E बिन्दु के आगे बड़ी रेखा पर एक
- लंब खींचेगे और उसके नाम EX रखेंगे।
  अब XEFY एक आयत का XEFY ग्राफ कागज के छोटे-छोटे वर्गों को
- गिनकर XEFY आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
  अब हम देख सकते हैं कि समांतर चतुर्भुज EFGH और XEFY आयत
- दोनों का क्षेत्रफल बराबर है।

क्या आप जानते हैं?
एक ही आधार पर स्थित और एक ही ऊँचाई वाले समांतर चतुर्भुज और आयत का क्षेत्रफल बराबर होगा।

हम जान सके कि समांतर चतुर्भुज HEFG और आयत दोनों का आधार XEFY हैं दोनों की ऊँचाई बराबर भी है।

फिर भी हमने देखा :

आयत XEFY की चौड़ाई XE और समांतर चतुर्भुज HEFG की ऊँचाइ भी XE है।

पर आयत का क्षेत्रफल $= l \times b = (EF \times EX)$ वर्ग इकाई

अतएव समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= (EF \times FX)$ वर्ग इकाई

अर्थात् समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = (आधार × ऊँचाई) वर्ग इकाई

तब समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र इस प्रकार लिखा जा सकेगा।

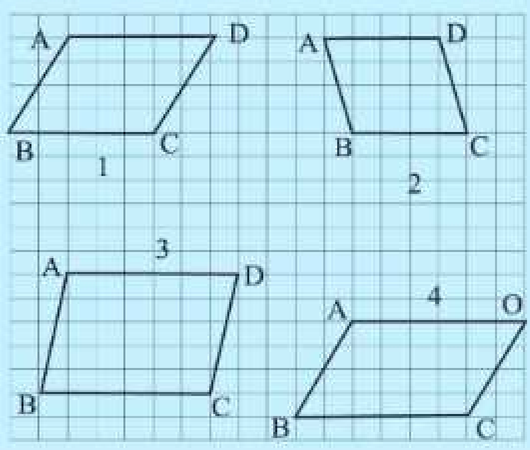
समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = (आधार × ऊँचाई) वर्ग मानक।

बताइए:
समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल और ऊँचाई ज्ञात होने पर आधार की माप कैसे निकाली जाएगी?

सारणी के खाली स्थानों में लिखिए :

ग्राफ कागज के छोटे-छोटे वर्गों को गिनकर समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल सारणी में भरिए :

आकृति	आधार	ऊँचाई	क्षेत्रफल	आधार×ऊँचाई
1				
2				
3				
4				



उदाहरण : 5

एक समांतर चतुर्भुज के आधार की लंबाई 8.2 से.मी. है। एक भुजा पर विपरीत बिन्दु से खींचे गए लंब की माप 2.3 से.मी. है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

समांतर चतुर्भुज का आधार =8.2 से.मी., ऊँचाई =2.3 से.मी.

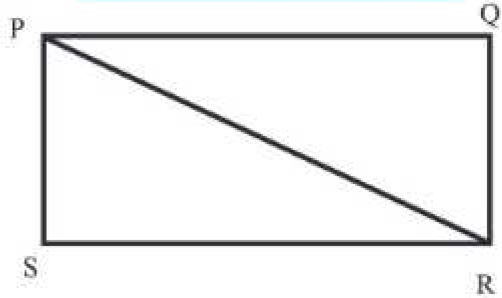
इसका क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

=(8.2 × 2.3) वर्ग से.मी. =18.86 वर्ग. से.मी.

क्या आप जानते हैं?
समांतर चतुर्भुज की किसी भी भुजा को - आधार मान जा सकता है! इस भुजा पर विपरीत शीर्ष बिन्दु से खींचा गया लंब इसकी ऊँचाई है।

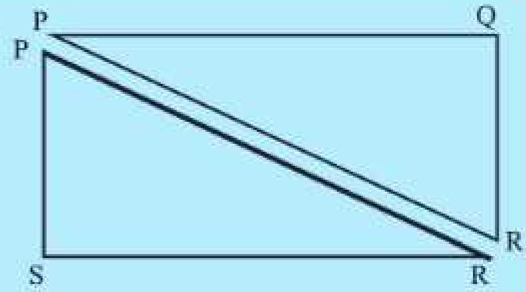
10.5 त्रिभुज का क्षेत्रफल :

आप जानते हैं कि किसी त्रिभुजाकार जमीन के चारों ओर बाड़ लगाने के लिए जो खर्च होता है, वह उसके परिमाप पर निभर रहता है। उसी प्रकार उस जमीन में हल चलाने, घास लगाने या कंकड़ बिछाने के लिए पहले उसका क्षेत्रफल ज्ञात करना पडता है। त्रिभुज का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करते हैं, आइए, देखें :



खुद करके देखिए :

- एक कागज पर एक आयत बनाकर उसका नाम PQR दीजिए।
- इसके PR कर्ण को जोड़कर वह किनारा काट दें।
- अब दो त्रिभुज PRS को PRQ त्रिभुज पर डालकर उनका संबंध ध्यान से देखिए। क्या देखते हैं?
- क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हो जाते हैं?
- अब बताइए - दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल क्या बराबर होगा?



ध्यान दें:

- अब जो समकोण त्रिभुज प्राप्त हुआ, उसके समकोण संलग्न एक भुजा आयत क्षेत्र की लंबाई है और दूसरी भुजा उसकी चौड़ाई है।
- दोनों समकोण त्रिभुज एक दूसरे को घर गए। अत: दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है।
- दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल का योगफल आयत के क्षेत्रफल के साथ बराबर है।

क्या आब जानते हैं?
एक आयत का एक कर्ण इसे सम क्षेत्रफलवाले दो समकोण त्रिभुजो में रूपांतरित करता है।

अतएव, हमें ज्ञात हुआ :

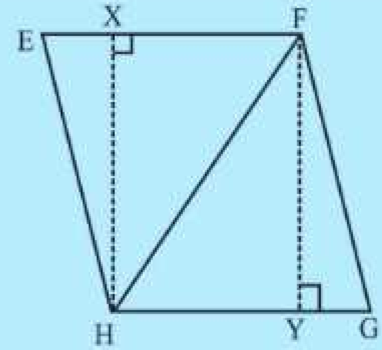
उत्पन्न समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = मूल आयत के क्षेत्रफल का आधा

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आयत का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ (लंबाई × चौडाई) वर्ग इकाई

या $\frac{1}{2} \times$ (समकोण संलग्न भुजाद्वय का गुणनफल) वर्ग।

खुद करके देखिए :



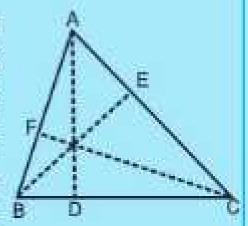
- एक समांतर चतुर्भुज खींचिए। बगल में दी गई आकृति की तरह बनाकर उसका नामकरण कीजिए।
- इसके दोनों विपरीत शीर्ष बिन्दुओं को जोड़कर एक कर्ण खींचिए।
- खींचे गए समांतर चतुर्भुज (EFGH) को उसे एक कर्ण (FH) के किनारे से काटने से जो दो त्रिभुज होंगों। उनको एक दूसरे पर डालकर देखें क्या वे एक दूसरे को पूरा घेर लेते हैं? क्या प्राप्त हुआ?
- नए बने EFH त्रिभुज और GFH त्रिभुज दोनों समान क्षेत्रफल वाले होंगे।
- EFH त्रिभुज का क्षेत्रफल +GFH त्रिभुज का क्षेत्रफल =EFGH समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल है।
- EFH त्रिभुज का क्षेत्रफल =GFH त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल।

या $\frac{1}{2} \times$ (आधार × ऊँचाई) वर्ग इकाई

क्या आप जानते हैं?

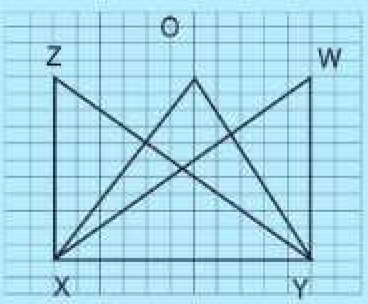
ABC त्रिभुज की BC भुजा को आधार मानने से, AD इसकी ऊँचाई होगी। AC भुजा को आधार मानने से BE ऊँचाई होगी। AB भुजा को आधार मानने से CF ऊँचाई होगी।



$= \frac{1}{2} \times$ (आधार × ऊँचाई) वर्ग इकाई

खुद करके देखिए :

- एक ग्राफ कागज पर एक आधार XY पर 3 त्रिभुज XYZ, OXY और WXY खींचा जैसे कि Z, O और W बिन्दु ग्राफ कागज की एक ही रेखा पर बाईं और दाईं ओर रहेंगे।
- ग्राफ कागज के छोटे-छोटे वर्ग गिनकर त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- तीनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल में क्या संबंध है?



उदाहरण : 6

एक त्रिभुज का आधार 20 से.मी है। ऊँचाई 5.3 से.मी. है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

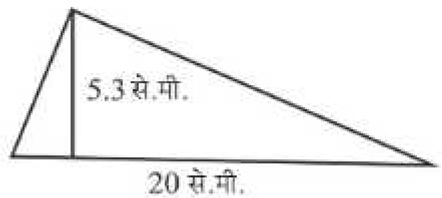
हल :

त्रिभुज का आधार 20 से.मी. ऊँचाई 5.3 से.मी.

$\therefore$ इसका क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई) वर्ग

$= \frac{1}{2} \times (20 \times 5.3)$ वर्ग से.मी.

$= 53$ वर्ग से.मी.



10.6. क्षेत्रफल की माप के लिए प्रयुक्त मानक :

क्षेत्रफल मापने के लिए प्रयुक्त मानक के बारे में हम पहले से जानते हैं।

1 वर्ग.मी =10000 वर्ग से.मी.

इसतरह 1 कि.मी. =1000 मी.

अतएव, 1 वर्ग कि.मी. $=(1000)^2$ वर्ग. मी.

= 1,000,000 वर्ग. मी.

1 से.मी. = 10 मि.मी.

अतएव, 1 वर्ग से.मी. =(10)2 वर्ग मिली. मीटर

=100 वर्ग मि.मी.

बताइए:
1000 वर्ग से.मी. के साथ कितने वर्ग मी. बराबर हैं?

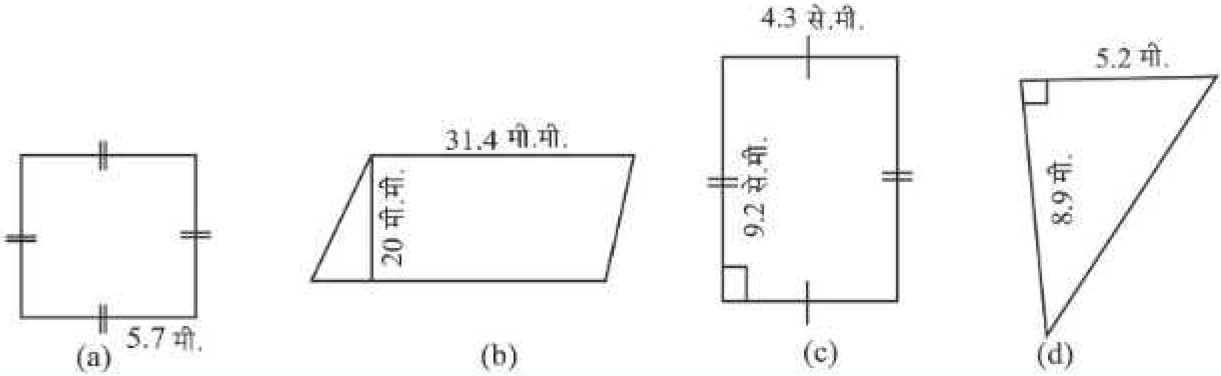
उत्तर लिखिए:

(क) 1000 वर्ग मि. के साथ कितने वर्ग मीटर बराबर है?

(ख) 100 वर्ग मी.के साथ कितने वर्ग से.मी. बराबर है?

अभ्यास 10.3

1. निम्नलिखित आकृतियों की क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



2. खाली स्थानों को भरिए :

क्षेत्र का नाम	क्षेत्रफल	आधार	ऊँचाई
समांतर चतुर्भुज	174	15	?
त्रिभुज	1	?	2.5
समांतर चतुर्भुज	1	?	2000
आयत	15.36	4.8	?
त्रिभुज	64.95	?	15

3. एक आयत का क्षेत्रफल 500 वर्ग मी है। इसकी लंबाई 25 मीटर है, इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए। इस क्षेत्र के चारों ओर बाड़ लगाने के लिए प्रतिमीटर रु 9.50 पर से कितना खर्च होगा ?

4. 15 से.मी. भुजावाले एक वर्ग का क्षेत्रफल 15 से.मी. आधारवाले त्रिभुज के क्षेत्रफल के साथ बराबर है। त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

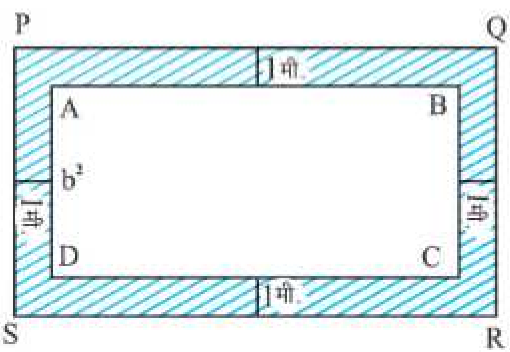
5. त्रिभुजाकार एक जमीन का आधार 60 मी. है और ऊँचाई 20 मी है। वर्ग मीटर जमीन का मूल्य 1500 रुपए है। उस त्रिभुजाकार जमीन का मूल्य कितना होगा, ज्ञात कीजिए।

6. 50 से.मी. ऊँचाईवाले दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल का योगफल 1 वर्गी मीटर है, यदि एक त्रिभुज के आधार की लम्बाई 160 से.मी. है, तो दूसरे त्रिभुज के आकार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

10.7. आयत के भीतर या बाहार किनारे से सटे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करना:

आप देखते हैं कि कुछ मकानों के चारों ओर पैदल चलने का एक रास्ता होता है। आपकी किताब की चारों तरफ भी कुछ खाली जगहें छोड़ दी गई हैं।

आप इस प्रकार के क्षेत्रों के उदाहरण दीजिए:



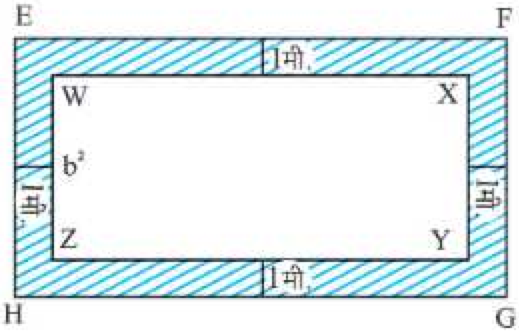
बगल की आकृति में ABCD एक आयत है। इसके बाहर चारों ओर बराबर चौड़ाई वाला एक छायांकित क्षेत्र है। इस छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। छायांकित क्षेत्र की चौड़ाई चारों ओर बराबर होने से PQRS भी एक आयत है। अतएव, छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल =PQRS आयत का क्षेत्रफल - आयत का ABCD क्षेत्रफल।

इस प्रश्न की चर्चा नीचे की गई।

उदाहरण - 7

20 मीटर लंबे और 15 मीटर चौड़े एक आयत के बाहर चारों ओर 1 मीटर चौडा एक रास्ता बनाया गया। इस क्षेत्र कग क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :



मान लीजिए कि WXYZ वही आयत है।

इसकी लंबाई =20 मी.है और चौड़ाई =15 मी. है।

इसका क्षेत्रफल = (20×15) वर्ग मी

= 300 वर्ग. मी.

इसके चारों ओर (छायांकित) 1 मी. एक रास्ता बनाया जाएगा। अर्थात् अब EFGH आयत बन गया।

EFGH आयत की लंबाई EF=20 मी. + 2 मी. = 22मी., चौड़ाई EH= (15 + 2मी.) = 17 मी.

∴ EFGH आयत का क्षेत्रफल = (लंबाई × चौडाई) वर्ग मानक

= (22×17) वर्ग मी.

= 374 वर्ग मी.

रास्ते का क्षेत्रफल =EFGH आयत का क्षेत्रफल −WXYZ आयत का क्षेत्रफल

= 374 वर्ग मी.– 300 वर्ग.मी.

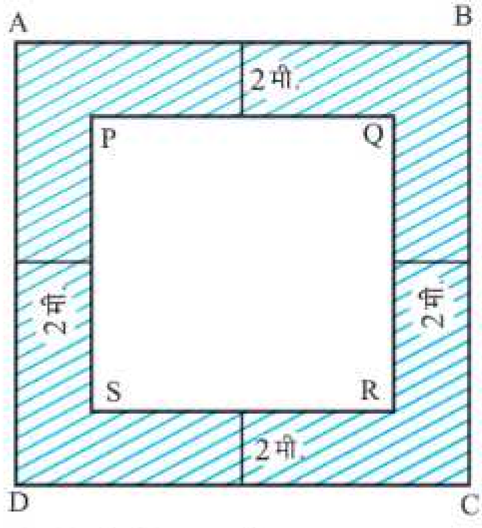
= 74 वर्ग.मी.

∴ रास्ते का क्षेत्रफल 74 वर्ग.मी होगा।

उदाहरण : 8

40 मीटर भुजावाले एक वर्गाकार फर्श के मीटर किनारों के सटे 2 मी. चौडे के स्थान पर रंग पोता जाएगा। रू 2.50 प्रति वर्ग मीटर के हिसाब से कितना खर्च होगा ?

हल :



मान लीजिए ABCD वर्गाकार फर्श है।

इसके मीटर छायांकित स्थान में रंग भरा जाएगा।

ABCD वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= (40×40) वर्ग मीटर

= 1600 वर्ग मीटर

ABCD के भीतर चारों किनारों से सटकर रहे स्थान में रंग भरा जाएगा तब PQRS भी एक वर्ग होगा।

PQRS वर्ग की प्रत्येक भुजा = 40 मी. $-(2\times2)$ मीटर

= 36 वर्ग.मी.

$\therefore$ PQRS वर्ग का क्षेत्रफल $=(36\times36)$ वर्ग.मी.

= 1296 वर्ग.मी

रंग पोते जाने वाले छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = ABCD का क्षेत्रफल − PQRS का क्षेत्रफल

= 1600 वर्ग मी. − 1296 वर्ग मी.

= 304 वर्ग मी.

1 वर्ग मी. का रंग खर्च = रु 2.50

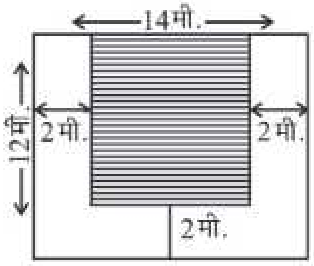
$\therefore$ 304 वर्ग मी. का रंग खर्च = रु 2.50×304

= 760 वर्ग मी.

अभ्यास 10.4

1. 45 मी. लंबे और 20 मी चौड़े एक आयत के भीतर किनारों को सटकर 2.5 मी. चौड़े स्थान पर कंकड़ बिछाए जाएँगे। कंकड़ बिछाने के लिए रु 4 प्रति 1 वर्ग मी. की पर से कुल कितना खर्च होगा ?

2. बगल की आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



3. 60 मी चौड़े और 75 मी लंबे मैदान के चारों और 1.5 मी चौड़े स्थान पर घास बिछाने के लिए रु 3 प्रति वर्ग मी. की दर से कितना खर्च होगा ?

4. एक आयत की लंबाई 40 मी. और चौड़ाई 30 मी. है। इसके भीतर के किनारे से सटकर 1 मी चौड़े क्षेत्र पर मिट्टी बिछाने के लिए रु 8 प्रति वर्ग मीटर की दर से कितना खर्च होगा ?

5. एक विद्यालय का प्रार्थना भवन 20 मी लंब और 12 मी चौड़ा है। इसके भीतर के किनारे से सटाकर 1 मी. चौड़े स्थान पर। मीटर चौड़ी वर्गाकार टाइलें बिछाई जाएँगी। प्रत्येक टाइल की लंबाइ 25 से.मी है। तब कुल कितनी टाइलें बिछाई जाएँगी ?

6. एक वर्गाकार मैदान की प्रत्येक भुजा 40 मी.है। इसके किनारों से बाहर की तरफ बराबर चौड़ेवाला एक रास्ता बनाया गया। रु 10 प्रति वर्ग मीटर को दर से रास्ता बनाने में कुल 1640 रुपए खर्च हुए। तब :

(क) मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(ख) रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(ग) रास्ता और मैदान दोनों को मिलकर उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(घ) इस क्षेत्र का भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

(ङ) रास्ता की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

खुद करके देखिए:

- कागज पर 3 से.मी. त्रिज्यावाला एक वृत्त खींचिए इसे कागज से काटकर अलग कर दीजिए। वृत्ताकार कागज में लाल रंग भरिए।
- उसी प्रकार अलग अलग कागज पर 4 से.मी., 5 से.मी. और 6 से.मी. त्रिज्यावाले वृत्त खींचिए। उनमें रंग भरिए।
- अब प्रत्येक वृत्ताकार कागजों को ऐसे सजाकर रखिए, जैसे कि प्रत्येक का केन्द्रबिन्दु एक स्थान पर रहे। अधिक से कम क्षेत्रफलवाले वृत्ताकार कागज नीचे से ऊपर की ओर रखिए।
- अब वह आकृति कैसे दिखाई पडती है, दर्शाइए।
- प्रत्येक वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

एकादश अध्याय

आँकड़ों का प्रबंधन

11.1 हमें जो ज्ञात है :

पिछली कक्षा में हम ओंकड़ों के प्रबंधन में आँकड़ें, उनका विश्लेषण और आँकड़ों के लिपिबद्ध के संबंध में जान चुके हैं। एक विद्यालय में 246 छात्र-छात्राएँ पढ़ते हैं। उनकी उम्र का आँकड़ा संग्रह करके नीचे की सारणी में लिखा गया है।

उम्र	छात्र-छात्राओं की संख्या
6	30
7	34
8	36
9	40
10	38
11	37
12	31

अब सारणी देखकर नीचे के प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(क) किस उम्र के छात्र-छात्राओं की संख्या सबसे अधिक है ?

(ख) किन दो उम्र के छात्र-छात्राओं की संख्या में अंतर 2 है ?

(ग) 10 साल की उम्र या उससे अधिक उम्र के छात्र-छात्राओं की संख्या कितनी है ?

(घ) सबसे कम उम्र के और सबसे अधिक उम्र के छात्र-छात्राओं का अनुपात कितना है ?

इस कक्षा के आँकड़ों के प्रबंधन के बारे में अब हम अधिक चर्चा करेंगे। किसी घटना के घटने की संभावना और उसके परिणाम के बारे में अब जानेंगे।

11.2 संभावना की अवधारणा :

हमारे दैनंदिन जीवन में घटनेवाली कुछ घटनाओं का विवरण नीचे दिया गया है। आइए, उन्हें ध्यान से देखें:

- आज कोरापुट में अधिक वर्षा होने की संभावना है। (यहाँ बादलों से घिरे आसमान को देखकर ऐसा कहा जा सकता है।)
- पेट्रोल की दर बढ़ जाने की पर्याप्त संभावना है। (पेट्रोल पंप, अखबार या टेलीविजन से इसके बारे में आँकड़ा जानकर ऐसा कहा जा सकता है।)
- वर्षा नहीं होती है, इसलिए सबजियों की दर बढ जाने को बहुत संभावना है। (अब बताइए, कहाँ से आँकड़ा संग्रह करके आप ऐसा कह सकेंगे)
- मुझे संदेह है कि रेमश परीक्षा में पास हो जाएगा। (किसी सूत्र से यह आँकड़ा प्राप्त करके ऐसा बताया जा सकता है?)
- क्रिकेट मैच में आपकी टोली का टस जीतने की संभावना है।

यहाँ दिए गए सारे आँकड़ों का अध्ययन करने से पता चला है कि कई क्षेत्रों में घटना के घटित होने की अधिक संभावना है। दूसरे क्षेत्रों में घटना के घटित होने की संभावना कम है। कुछ क्षेत्रो में घटना के घटित होने की जितनी संभावना है, घटना घटित न होने की उतनी संभावना है।

यदि हम यह कहें कि दो घने पदार्थों में से जिसका आयतन अधिक उसकी भुजा की लंबाई भी अधिक होगी। दो वृत्तों में से जिस वृत्त का क्षेत्रफल अधिक होगा उसकी त्रिज्या की लबाई भी अधिक होगी। दोनों उक्तियाँ सत्य हैं। लेकिन भारत और ऑस्ट्रेलिया दो देशों की टीम के बीच होनेवाले मैच मे भारत के जीतने की संभावना जितनी रहती है, ऑस्ट्रेलिया के जीतने की संभावना भी उतनी रहती है।

संभावना की आशा की जाती है, इस संदेह है, ऐसे शब्दों को गणित में संभावना शब्द के द्वारा प्रकट किया जाता है।

बताइए:

नीचे दी गई तीन परिस्थितियों में से कौन सी निश्चित रूप से घटित होगी, कौन सी कभी घटित नहीं होगी और कौन सी घट भी सकती है, घट नहीं भी सकती।

पहली स्थिति : एक महीने में पूर्णिमा दो बार आ सकती है।

दूसरी स्थिति: अंग्रेजी महीने की पहली तरीख से 08 तारीख के बीच दो सोमवार आएँगे।

तीसरी स्थिति : एक के महीने में अमावास्या एक बार आती है।

✎ **आप अपने दैनंदिन जीवन की घटनाओं को याद करके निश्चित रूप से घटनेवाली तीन घटनाओं के उदाहरण दीजिए। उसी प्रकार कभी भी घट नहीं सकती के लिए तीन स्थितिओं का उल्लेख कीजिए।**

11.3 सिक्के के टस के संबंध में संभावना:

सामान्य जीवन में हम संभावना को कम या अधिक जैसे शब्दों द्वारा प्रकट करते हैं। इससे संभावना का परिमाण निश्चित नहीं हो पाता। यदि संभावना को परिमाण की संख्या द्वारा प्रकट किया जा सके तब असुविधा दूर हो सकती है। अब संभावना को संख्या द्वारा प्रकट करने की कोशिश करेंगे।

H (हेड्)

T (टेल्)

अगर आप एक सिक्का लेकर टस डालोगे तो पहले से क्या बता पाएँगे कि हेड या टेल में से कौन-सा आएगा ?

खुद करके देखिए :

- एक सिक्का लीजिए।
- इसके हेड और टेल को पहचानिए।
- उसी सिक्के के बारी-बारी करके बीस 20 बार टस डालकर हर बार सिक्के का कौन-सा ऊपर रहा, उसे एक सारणी में लिखिए।
- 20 बार में से कितनी बार हेड और कितनी 20 टेल आया - गिनकर लिखिए।

सीला और मीरा ने 14 बार एक सिक्के का टस डाला। हर बार सिक्के का जो पहलू ऊपर रहा, उसे उन्होंने लिखा। सारणी में हेड के लिए H और टल के लिए T का व्यवहार किया गया।

टस की क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
परिणाम	H	H	H	H	T	T	H	H	H	H	T	H	T	T

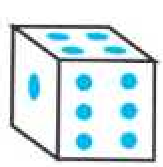
ऊपर दी गई सारणी को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

आप इस सारणी में लिए गए H और T के क्रम में क्या कोई निश्चित संबंध देख सकते हैं?

ध्यान दें, यहाँ कोई निश्चित सूचना नहीं है, आप जब सिक्का लेकर टस डालेंगे उस समय हेड H या T टेल में से कोई एक आएगा। अर्थात् किसी एक टस में आपको हेड मिलेगा या टेल मिलेगा; इसमें कुल संभावना परिणाम की संख्या 2 है।

11.4 लुडू पासा फेंकने की संभावना

आपने लुडू का पासा देखा होगा। इसके कितने पहलू होते हैं? लुडू के 6 पास में 6 पहलू होते हैं। उन पहलूओं पर 1 से 6 तक संख्या सूचित करने के लिए बिन्दु होते हैं। आप जब लुडु का पासा फेंकते हैं उसका कोई एक पहलू ऊपर रहता है, उस पर कितने बिन्दु हैं, उनकी संख्या तय की जाती है। कभी-कभी लुडू खेलते समय खेल में जीतने के लिए एक निश्चित संख्या की आशा की जाती है। क्या आशा के अनुरूप संख्या हर बार नहीं मिल पाती। आपको वह संख्या मिल सकती है, नहीं भी मिल सकती हैं। हम जानते है कि लुडू का पासा फेंकते समय कौन सी संख्या आएगी, उसे निश्चित रूप से पहले से कहना संभव नहीं है।



खुद करके देखिए :

- आप लुडू का एक पासा लीजिए।
- इसे फेंकिए जो संख्या आएगी, उसे नीचे की सारणी में उसी संख्या के सामने टाली चिह्न देकर लिखिए।
- इस प्रकार 30 बार पासा फेंकने के बाद टाली चिह्नों को गिनकर कौन सी संख्या कितनी आई उसकी पूर्त्ति कीजिए।

1		
2		
3		
4		
5		
6		

- आप जो सारणी बनाई है, उसे देखकर नीचे के प्रश्नों के उत्तर दीजिए।:

(क) कौन सी संख्या सबसे अधिक बार ऊपर आई और कितनी बार आई ?

(ख) कौन सी संख्या सबसे कम बार आई और कितनी बार आई ?

लुडू का पासा फेंकते समय हम 1, 2, 3, 4, 5 या 6 में से कोई एक संख्या प्राप्त करते हैं।

अर्थात् यहाँ कुल संख्या परिणाम है।

खुद करके देखिए :

- आप और आपके दोस्त प्रत्येक लुडु का पासा 30 बार फेंकिए।
- कितनी कितनी बार 1, 2, 3, 4, 5 या 6 चिह्नित संख्या आई, उसे सारणी में भरिए क्या परिणाम बराबर आया ?

नाम	कितनी बार संख्याएँ आईं					
	⚀ 1	⚁ 2	⚂ 3	⚃ 4	⚄ 5	⚅ 6
आप						
आपके दोस्त						

अभ्यास 11.1

1. एक लुडू का पासा 40 बार डालकर 1, 2, 3, 4, 5 और 6 संख्याएँ कितनी बार आईं, तय कीजिए। इस आँकड़े को लेकर एक दंड आलेख बनाइए।

2. (क) दो सिक्के एक साथ लेकर टस डालने से क्या परिमाण आने की संभावना है?

(ख) आप एक साथ दो सिक्के लेकर बार टस डालिए। जो परिणाम प्राप्त हुआ, उन्हें निम्न सारणी में लिखिए।

टस कितनी बार	कितनी बार दोनों डाला गया (T T)	कितनी बार एक सिक्के के हेड कितनी बार दोनों सिक्कों में टेल आया		कितनी बार दोनों सिक्कों में हेड आया (H H)
		(H T)	(T H)	
10				

(ग) आपकी सारणी के साथ आपके दोस्त की बनाई सारणी में क्या समानता हुई?

11.5 संभावना (प्रायिकता)

एक सिक्के के दो पहलू होते हैं। उनमें से एक हेड H और L दूसरा टेल है। टस डालते समय दो परिणामें में से कोई एक परिणाम आता है। इस अध्ययन में सिक्के को लेकर हमने जो काम किया था, इससे हमें ज्ञात हुआ कि प्रत्येक टस में या तो हेड आने की संभावना है या टेल आएगा।

सिक्के के दो पहलूओं में से हेड का पहल एक है। टस डालने के समय हम चाहते हैं कि हेड आए। उस क्षेत्र में हेड ऊपर आ जाना एक घटना है। हेड आने की संख्या उस उद्दिष्ट परिणाम की संख्या है। यहाँ उद्दिष्ट परिणाम की संख्या 1 है। सिक्के का टस डालते समय मिलने वाले कुल परिणामों की संख्या 2 है।

इसलिए हम कहते है: हेड H आने की संभावना= $\frac{\text{उद्दिष्ट परिणाम की संख्या}}{\text{कुल परिणाम की संख्या}} = \frac{1}{2}$

उसी प्रकार टेल T आने की संभावना $= \frac{1}{2}$

आइए, और एक उदाहरण देखकर संभावना ज्ञात करें।

लुडू के पासे के कुल पहलु है $= 6$

प्रत्येक पहलू पर 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से किसी एक संख्या सूचित रहती है। अर्थात् यहाँ कुल परिणामों की संख्या है =6

हम यदि 5 चाहते है कि पासा फेंकने से आए, तब हमारी उद्दिष्ट परिणाम की संख्या है 1।

5 आने की संभावना $= \frac{\text{उद्दिष्ट परिणाम की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या।}} = \frac{1}{6}$

✍ उसी प्रकार आने की संभावना ज्ञात कीजिए।

कुछ क्षेत्रों में संभावना का परिणाम:

जो घटना बिलकुल नहीं घटेगी, उसकी संभावना 0 है। इसलिए लुडू का पासा फेंकते समय 7 की संभावना नहीं है क्योंकि पासे में कभी नहीं आएगा।

जो घटना निश्चित रूप से घटेगी उसकी संभावना एक =1 है।

सिक्का टस डालते समय हेड या टेल आने की संभावना =1, क्योंकि सिक्के में हेड और टेल के अलवा और कोई तीसरी पहलू नहीं है। अर्थात् हेड या टेल में से कोई एक जरूर आएगा।

जो घटना घटी सकती है और नहीं भी, उस क्षेत्र में संभावना 0 और 1 के बीच का है।

सिक्का टस डालते समय हेड आने की संभावना $= \frac{1}{2}$ (यह 0, और 1 के बीच की संख्या है।)

पासा फेंकते समय 5 आने की संभावना $= \frac{1}{6}$ (0 और 1 के बीच की संख्या)

बताइए:

ऐसी तीन परिस्थिस्तियों के उदाहरण दें, जहाँ परिणाम की बराबर संभावना नहीं रहती।

अभ्यास 11.2

1. निम्न में से कौन सी घटना अवश्य घटेगी, घटना असंभव है, घटना घट सकती है और नहीं भी, लिखिए।

   (क) पूर्णिमा के दिन सूर्य ग्रहण होगा।

   (ख) 2010 सन् ई की फरवरी के महीने में दिवस संख्या है 29।

   (ग) आठ दिन के बाद बाजार में आलू की दर घटी जाएगी।

   (घ) अगले दिन आसमान में बादल छाए रहेंगे।

2. एक थैले में लाल, काले, सफेद, नीले, हरे और पीले रंग की एक एक गेंद है। आँखें बंद करके थैले से एक गेंद निकालने से:

   (क) सफेद रंग की गेंद निकलने की संभावना कितनी है?

   (ख) थैले में छह गेंद रहते समय नीले रंग की गेंद निकालने की संभावना कितनी है?

   (ग) नीले रंग की गेंद निकाल जाने के बाद हरे रंग की गेंद निकलने की संभावना कितनी है?

3. अपनी कक्षा के लडके के लडकियों के बीच क्रिकेट मैच होगा। लडके या लडकियों में कौन पहले बैटिंग करेंगे, इसका निर्णय टस में हेड आने पर तय होगा। मैच में लड़कियों की बैटिंग करने की संभावना कितनी है?

4. आपको लुडू का एक पासा 20 बार फेंककर जो परिणाम मिला, उसे नीचे की सारणी में लिखिए।

पासा फेंकने का क्रमांक	कौन सी संख्या कितनी बार आई					
	1	2	3	4	5	6
20 बार						

ऊपर की सारणी देखकर कौन सी संख्या कितनी बार आई, बताइए।

अब नीचे के प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(क) आपने 20 बार लुडू का पासा फेंका, उस समय $\frac{\text{4 कितनी बार आने की संख्या}}{\text{पासा फेंकने का कम कुल कितनी बार}}$ = ...

(ख) पासा फेंकते समय 4 आने की संभावना ज्ञात कीजिए। पहले के परिणाम के साथ आपके द्वारा ज्ञात हुई संभावना क्या बराबर हुई ?

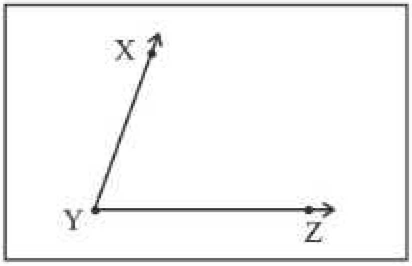
द्वादश अध्याय

ज्यामितीय अंकन

12.1 हमें जो ज्ञात है :

ज्यामितीय अंकन करते समय हम ज्यामितीय बॉक्स के स्केल, चाँद, परकार, सेट्स्वोयर आदि यंत्रों का व्यवहार करते हैं। इसका व्यवहार करके पिछली कक्षा में हमने रेखाखण्ड का समद्विभाजक लंब रेखा अंकन करने की विधि जान चुके है। उसी प्रकार किसी कोण का समद्विभाजक लंब खींचना भी हम सीख चुके हैं। परकार का व्यवहार करके दिए गए कोण के समपरिमाण का दूसरा कोण रचना करना भी जानते हैं, आइए, उन सबका फिर याद करें।

(क) स्केल और परकार का व्यवहार करके किस कोण के सम परिणाम के दूसरे कोण की कैसे रचना की जाती है, उस पर चर्चा करेंगे।



बगल की आकृति में एक कोण दर्शाया गया है।

इस कोण का नाम क्या है?

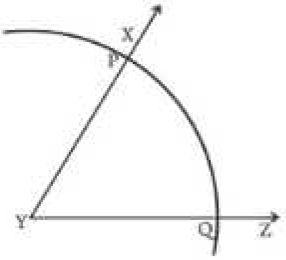
हम इस कोण की समपरिमाण के एक कोण $\angle ABC$ की रचना करेंगे।

$\angle Y$ के आसन्न रश्मि दोनों के नाम क्या है?

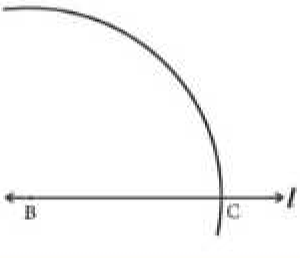
- पहले एक सरल रेखा l की रचना कीजिए।

- l सरलरेखा पर बिन्दु अंकित कीजिए।

  (B बिन्दु पर $\angle Y$ के समपरिमाण के कोण की रचना की जाएगी।)

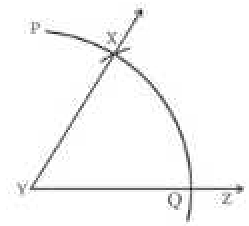


- अब $\angle Y$ के शीर्ष बिन्दु पर परकार का नुकीला भाग रखकर एक चाप अंकन कीजिए, जिसने $\angle Y$ की रचना की होगी। रश्मि $\overrightarrow{YX}$ और $\overrightarrow{YZ}$ को क्रमश: P और Q बिन्दु पर प्रतिच्छेदन करेंगी।

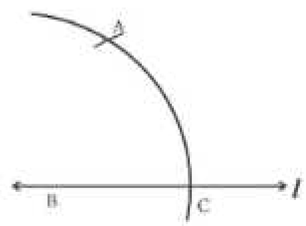


- परकार की माप में कोई बदलाव न करके परकार के नुकीले भाग को l सरल रेखा B के बिन्दु पर रखकर एक चाप की रचना करते, जो l रेखा को C बिन्दु पर प्रतिच्छेदन करेंगी।

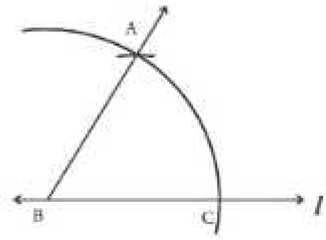
- परकार के नुकीले सिरे और पेंसिल की नोक को ऐसे व्यवस्थित रखिए कि काँटे की नोक Q पर और पेंसिल की नोक P पर रहेगी।



- पहले परकार जिस प्रकार था, उसमें कोई बदलाव न करके परकार के काँटे की नोक *l* को सरलरेखा के C बिन्दु पर रखिए और चाप की रचना कीजिए, जैसे यह पहले की रचित चाप के प्रतिच्छेदन करेगी। प्रतिच्छेदी बिन्दु से A निश्चित् कीजिए।



- अब $\overrightarrow{BA}$ की रचना कीजिए $\angle ABC$ का परिणाम$\angle XYZ$ के परिणाम के साथ बराबर है। अर्थात् $m\angle XYZ = m\angle ABC$



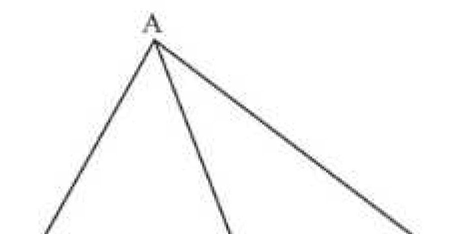
अभ्यास 12.1

1 स्केल और परकार का व्यवहार करके 60° परिमाण के एक कोण की रचना करके उसे समद्विभाजन कीजिए।

2 परकार और स्केल का व्यवहार करके 90° परिमाण के एक कोण की रचना करने के चरणों को लिखिए।

3 8 से.मी लंबी AB रेखाखण्ड की रचना करके उसके समद्विखण्ड लंब की रचना कीजिए। AB के आप बराबर भागों में विभिन्न कर सकेंगे? कैसे कर सकेंगे?

12.2. त्रिभुज की माध्यिका :



बगल की आकृति में ΔABC को ध्यान से देखिए। इसकी भुजा $\overline{BC}$ का मध्य बिन्दु कैसे प्राप्त कर सकेंगे? $\overline{BC}$ के मध्य बिन्दु D के मानिए। $\overline{BC}$ का सम्मुख शीर्ष बिन्दु A है। आकृति में रेखाखण्ड $\overline{AD}$ की रचना की गई है। $\overline{AD}$ की ΔABC एक माध्यिका है। त्रिभुज के किसी शीर्ष बिन्दु से उसके विपरीत भुजा के मध्य बिन्दु को जोड़नेवाली रेखाखण्ड को त्रिभुज की एक माध्यिका कहते हैं।

एक त्रिभुज की रचना कीजिए। उसके नाम XYZ दो इस त्रिभुज की प्रत्येक भुजा उसके सम्मुखीन शीर्ष बिन्दु के नाम लिखिए। इस त्रिभुज में कितनी माध्यिकाओं की रचना की जा सकती है?

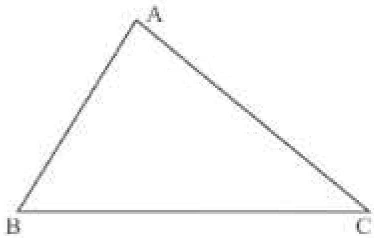
बताइए
एक त्रिभुज की कितनी माध्यिकाएँ होती हैं?

12.2.1. स्केल और परकार का उपयोग करके त्रिभुज की माध्यिका का अंकन :

अब स्केल और परकार का उपयोग करके त्रिभुज की माध्यिका का अंकन होता है, उस पर चर्चा करेंगे।

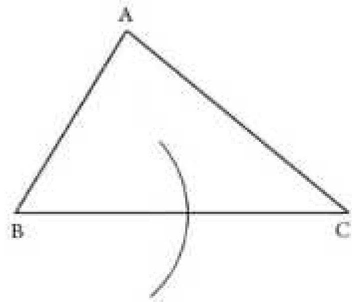
पहला चरण :

जैसे आकृति में दर्शाया गया है, उसी प्रकार अपनी कॉपी में एक त्रिभुज अंकन कीजिए। त्रिभुज का नाम ABC दीजिए।



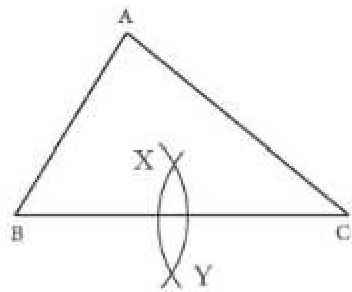
दूसरा चरण :

इसके $\overline{BC}$ को समद्विभाजन करने के लिए B पर परकार के काँटे की नोक रख कर $\overline{BC}$ की माप के आधे से अधिक त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। वह $\overline{BC}$ के दोनों पार्श्व को फैलकर रहे।

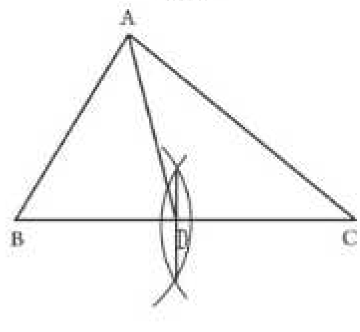


तीसरा चरण :

दूसरे चरण में परकार से जिस चाप की माप की थी, उस में कोई बदलाव न करके परकार के काँटे की नोक को C पर रखकर और एक चाप खींचिए, जो पहले की चाप को प्रतिच्छेद करे। प्रतिच्छेदित बिन्दु दोनों के नाम X और Y दीजिए।



चौथा चरण : X और Y की संयाजक रेखा खींचिए। $\overleftrightarrow{XY}$ का $\overline{BC}$ समद्विविभाजक लंब है। $\overleftrightarrow{XY}$ और $\overline{BC}$ के प्रतिच्छेदित बिन्दु का नाम D दीजिए। D यह $\overline{BC}$ का मध्यबिन्दु है।
अब $\overline{BC}$ के विपरीत शीर्ष बिन्दु A के साथ D को मिलाइए। ABC त्रिभुज की $\overline{AD}$ एक माध्यिका है। यह माध्यिका $\overline{BC}$ की समद्विभाजक माध्यिका है।



✍ आप $\overline{AC}$ का मध्यबिन्दु ज्ञात कीजिए। इसका नाम E दें। $\overline{BE}$ माध्यिका की रचना कीजिए।

बताइए :
ABC त्रिभुज $\overline{AD}$ और $\overline{BE}$ के अलावा तीसरी माध्यिका की रचना करना क्या संभव है? क्यों संभव है?

क्या आप जानते हैं?
त्रिभुज की तीनो माध्यिकाएँ एक बिन्दुगामी है । त्रिभुज की तीनों माध्यिकाओं के प्रतिच्छेदि बिन्दु को उस त्रिभुज का भर केन्द्र कहते है।

अभ्यास -12.2

1. एक एक समकोण, न्यूनकोण और अधिककोण त्रिभुज की रचना कीजिए। प्रत्येक त्रिभुज में तीन तीन माध्यिकाएँ खींचिए।

2. Δ PQR लीजिए।

   (क) इसके $\overline{PQ}$ का मध्यबिन्दु X लीजिए। $\overline{RX}$ माध्यिका खींचिए।

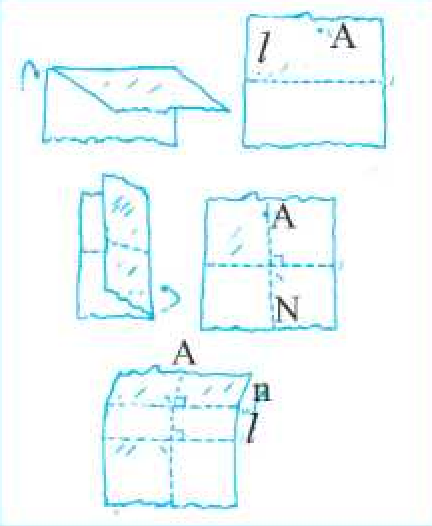
   (ख) $\overline{QR}$ का मध्यबिन्दु Y लीजिए। $\overline{PY}$ माध्यिका की रचना खींचिए।

   (ग) अब $\overline{RP}$ का मध्यबिन्दु ज्ञात न करके आप $\overline{QZ}$ माध्यिका खींच सकेंगे ? कैसे ?

12.3. दी दत्त सरलरेखा के साथ समांतर करके एक सरलरेखा का अंकन:

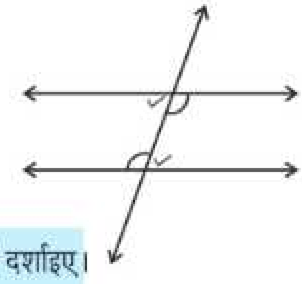
हम समांतर सरल रेखा के संबंध में पहले से चर्चा कर चुके हैं। दी गई सरल रेखा से समांतर करके असंख्य सरल रेखाओं की रचना करना संभव है। लेकिन एक सरल रेखा के बाहर के किसी बिन्दु से होकर उस सरल रेखा से समांतर सरलरेखा केवल एक ही खींचना संभव है। अब कागज को मोड़कर एक सरल रेखा से समांतर करके और एक सरल रेखा की रचना करेंगे।

खुद करके देखिए :



- एक कागज शीट को बीच में मोडकर एक निशान बनाइए। इस निशान को रेखाखण्ड *l* से निरूपित कीजिए।
- कागज को खोलकर रेखाखण्ड के *l* के बाहर एक बिन्दु अंकित कीजिए।
- A बिन्दु से होकर कागज को ऐसे मोड़िए, जैसे कि वह *l* रेखाखण्ड पर लंब जैसे दिखाई पड़े। लंब से निरूपित $\overline{AN}$ कीजिए।
- कागज को मोडकर $\overline{AN}$ बिन्दु से होकर लंब के प्रति और एक लंब रेखा खींचिए, इसको नाम से निरूपित कीजिए। अब $l \parallel m$ है।
- इसका कारण क्या है, दोस्तों के साथ चर्च्चा करके लिखो।

दोनों सरलरेखाएँ किन-किन शर्त पर समांतर होती हैं उसके बारे में हम पहले से जानते हैं। आइए, उन्हें फिर से याद करें।



दो सरलरेखाओं को यदि एक प्रतिच्छेदक प्रतिच्छेद करता हो और प्रतिच्छेद बिन्दु पर बने कोणों की माप बराबर हो, तब वे दोनों सरलरेखाएँ समांतर होंगी।

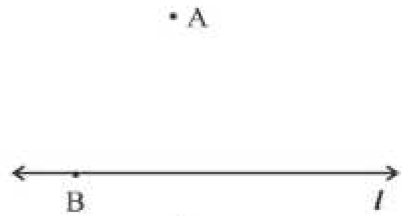
✎ समांतर होने के लिए अन्य शर्तें क्या हैं, आप उन्हें अपनी कॉपी में लिखिए और आकृतियों में दर्शाइए।

इन शर्तों का व्यवहार करके स्केल और परकार की सहायता से हम एक सरलरेखा के प्रति समांतर करके दूसरी सरलरेखा की रचना कर सकेंगे। नीचे दिए गए चरणों के अनुसार आप रचना करने की कोशिश कीजिए।

उदाहरण :1

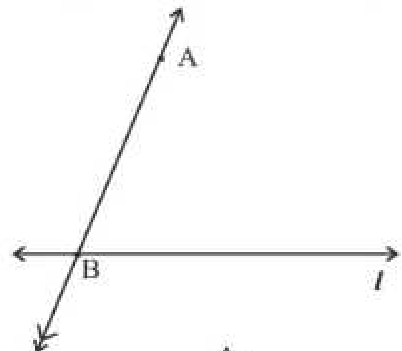
पहला चरण :

एक सरलरेखा *l* लीजिए। इसके बाहर A बिन्दु लीजिए।



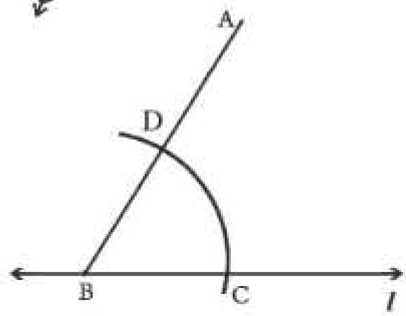
दूसरा चरण :

l पर बिन्दु B लो । $\overleftrightarrow{AB}$ खींचिए।



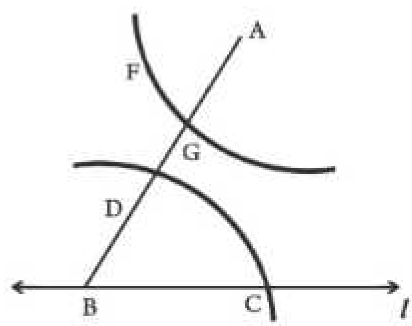
तीसरा चरण :

B को केन्द्र के रूप में लेकर कोई भी त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। जैसे वह चाप *l* को बिन्दु C पर और $\overleftrightarrow{AB}$ को D बिन्दु पर प्रतिच्छेद करेगा।



चौथा चरण :

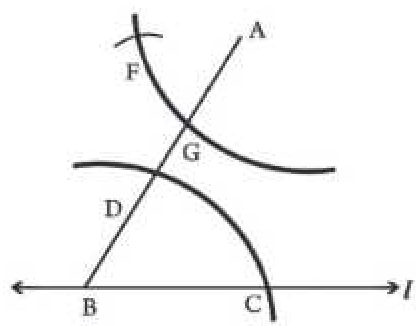
अब A को केन्द्र करके तीसरे सोपान में ली गई त्रिज्या की माप न बदलकर एक चाप खींचिए, जो $\overleftrightarrow{AB}$ को प्रतिच्छेद करेगा। इस चाप के प्रतिच्छेद बिन्दु का नाम G रखिए।



पाँचवाँ चरण :

G को केन्द्र करके C और D के बीच की दूरी को त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए, जो चौथे चरण में अंकित चाप को प्रतिच्छेद करेगा।

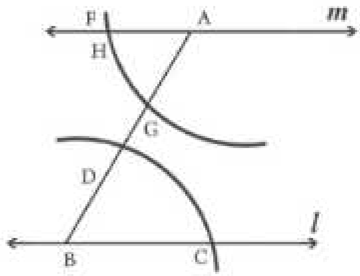
प्रतिच्छेद बिन्दु का नाम F रखिए।



छठा चरण :

अब A और F बिन्दु को मिलाने वाली रेखा $\overleftrightarrow{FA}$ खींचिए। इसका नाम l रखिए।
$\overleftrightarrow{FA} \parallel l$

इसका कारण लिखिए।



✍ ऊपर के उदाहरण में $l \parallel m$ हो तो

- प्रतिच्छेदी रेखाखण्ड का नाम क्या है ?
- यहाँ कितने एकांतर कोण युग्म है ?
- एकांतर कोण युग्मों के नाम बताइए ?
- प्रतिच्छेदक के एक पार्श्वस्थ अंत: कोण का योगफल ज्ञात कीजिए। योगफल कितना हुआ ?

बताइए !

(क) A बिन्दु से होकर l सरलरेखा के साथ समांतर करके m के अलावा और एक सरलरेखा खींचना क्या संभव है ? कारण बताइए।

(ख) उदाहरण-1 मे रचना के दौरान हमें समपरिमाण के एकांतर कोण खींचकर समांतर सरल रेखाएँ मिलीं। इस अंकन में थोड़ा सा परिवर्त्तन करके बिन्दु पर समान परिमाण के संगत कोण खींचकर क्या समांतर सरल रेखा अंकन करना संभव है ? यदि संभव है, तब उसका अंकन कीजिए।

अभ्यास 12.3

1. $\overleftrightarrow{AB}$ खींचिए इसके बहिर्भाग P बिन्दु लीजिए। P बिन्दु से होकर के $\overleftrightarrow{AB}$ साथ समांतर $\overleftrightarrow{CD}$ खींचिए। (इसमें सिर्फ स्केल और परकार का व्यवहार किया जाएगा।)
2. $\overleftrightarrow{PQ}$ खींचो। $\overleftrightarrow{PQ}$ से 4 से.मी की दूरी पर $\overleftrightarrow{CD}$ खींचो, जैसे $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ होगी।

   (सूचना $\overleftrightarrow{PQ}$ के किन्हीं दो बिन्दुओं पर के $\overleftrightarrow{PQ}$ प्रति लंब रेखा खींचकर $\overleftrightarrow{PQ}$ 4 से.मी दूरी पर दो बिन्दु लीजिए।)
3. l नाम की सरल रेखा लीजिए। एक बिन्दु P लीजिए जो l पर न हो। P बिन्दु से होकर l के साथ समांतर करके m सरलरेखा की अंकन कीजिए।
   - अब l पर Q बिन्दु लो। $\overleftrightarrow{PQ}$ खींचिए।
   - m पर R बिन्दु से होकर R से $\overleftrightarrow{PQ}$ सामांतर करके एक सरलरेखा का अंकन कीजिए।
   - यह सरलरेखा l को S बिन्दु पर प्रतिच्छेद कीजिए।
   - इम दो युग्म समांतर सरल रेखाओं द्वारा किस प्रकार की आकृति बन रही है ?

12.4 त्रिभुज अंकन

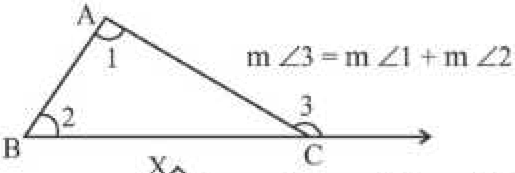
हमें पहले से ज्ञात है कि भुजा की लंबाई और कोणों की माप के अनुसार त्रिभुजों का वर्गीकरण किया जाता है। भुजा की लंबाई के अनुसार त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं, जैसे समबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज और विषमबाहु त्रिभुज।

1. समबाहु त्रिभुज
2. समद्विबाहु त्रिभुज
3. विषमबाहु त्रिभुज

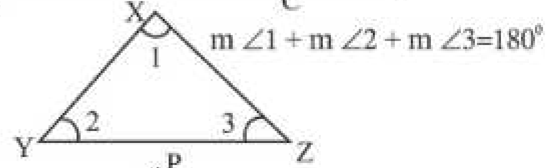
बताइए:
कोणों की माप के अनुसार त्रिभुज कितने प्रकार के होंगे ? वे कौन-कौन से हैं ?

पहले से सप्तम अध्याय में हम त्रिभुज के गुण-धर्म पर चर्चा कर चुके हैं। आइए, उसकी फिर से चर्चा कर लें।

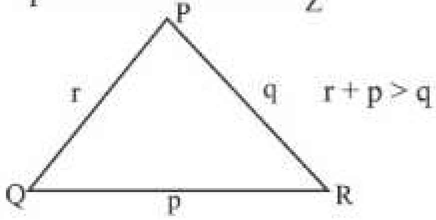
- त्रिभुज के बाह्य कोण की माप उसके दूरस्थ अंत:कोण युग्म कोणों के योगफल के बराबर होता है।



- त्रिभुज के तीनों अन्यकोणों का योग $180°$ होता है।



- त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाइयों का योगफल तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होता है।



उसी प्रकार नवम अध्याय में त्रिभुज की सर्वांगसमता की शर्तों के बारे में चर्चा हुई थी।

नीचे लिखी गई तीनों शर्तों मे से कोई एक शर्त पूरी होने पर त्रिभुज दोनों सर्वांगसम होते हैं;

(क) एक त्रिभुज के तीनों भुजाओं की लंबाई दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई बराबर हो,

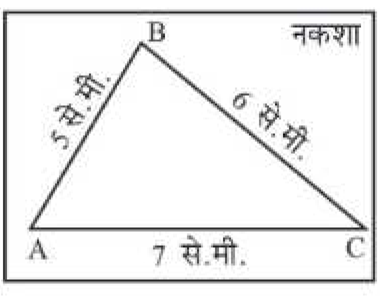
(ख) एक त्रिभुज के दो भुजाओं की लंबाई और उनके बीच का कोण दूसरे त्रिभुज के संगत भुजाओं और कोण से बराबर हो,

(ग) एक त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई और उसके संलग्न दोनों कोणों की माप दूसरे त्रिभुज के संगत भागों के बराबर हो। इन अवधारणाओं का उपयोग करके त्रिभुज की रचना के कौशल से परिवर्त्तन जानेंगे।

12.4.1 तीनों भुजाओं की लंबाई के आधार पर त्रिभुज अंकन

त्रिभुज की तीन भुजाओं की लंबाई ज्ञात हो तो त्रिभुज का अंकन संभव। (किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई का योगफल तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होनी चाहिए।) इसके लिए पहले त्रिभुज का एक नक्शा तैयार करके उसमें इन मापों को दर्शाना होगा। यह नक्शा हमें त्रिभुज का अंकन करने और विभिन्न चरणों को पहचानने में मदद करेगा।

उदाहरण-2



Δ ABC खींचिए, जिसका AB=5 से.मी., BC=6 से.मी और CA=7 से.मी.

अंकन विधि :

पहला चरण :

7 से.मी लंबी $\overline{AC}$ रेखाखण्ड खींचिए।

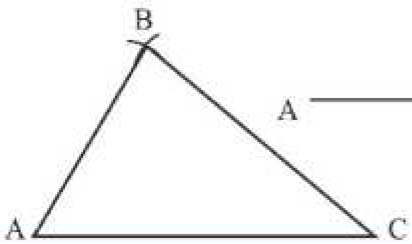
दूसरा चरण:

A को केन्द्र मानकर 5 से.मी. (AB) त्रिज्या का चाप खींचिए।

तीसरा चरण :

C को केन्द्र मानकर 6 से.मी. BC त्रिज्या का माप खींचिए। यह पहले के चाप को प्रतिच्छेद करेगा। इस प्रतिच्छेदित बिन्दु का नाम B दीजिए।

चौथा चरण :



$\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ को जोड़िए।

अब बनाकर Δ ABC तैयार है।

एक पारदर्शी कागज पर ΔPQR खींचिए। उसका QR=7 से.मी, PQ=5 से.मी. और PR=6 से.मी होगी। इस ΔPQR को ΔABC पर रखिए। जैसे ΔPQR का P बिन्दु और Q बिन्दु क्रमश: ΔABC के B बिन्दु और A बिन्दु पर रहेंगे। अब आप क्या देख रहे हैं?

ΔPQR और ΔBAC के बीच क्या संबंध है?

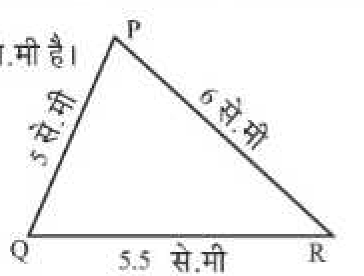
अभ्यास 12.4

1. ΔXYZ खींचिए, जिसकी XY=4.8 से.मी. YZ=5.3 से.मी ZX=5.6 से.मी होगी। इसके शीर्ष बिन्दु X के $\overline{YZ}$ प्रति लंब की रचना करके उसे मापिए।

2. (क) एक समबाहू त्रिभुज का अंकन कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा 5.5 से.मी. होगी। इसके प्रत्येक कोण की माप ज्ञात कीजिए।

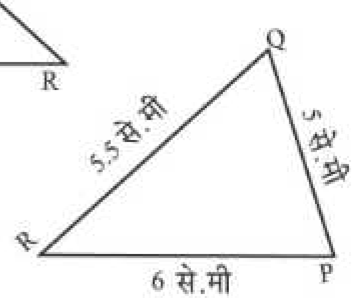
   (ख) 6 से.मी. भुजावाली एक समबाहु त्रिभुज का अंकन कीजिए, और प्रत्येक कोण की माप ज्ञात कीजिए।

3. Δ PQR की PQ=5 से.मी.QR=5.5 से.मी और RP=6 से.मी है।



   (क) आकृति 'क' के नक्शे का उपयोग करके ΔPQR त्रिभुज का अंकन कीजिए।

   (ख) आकृति 'ख' के नक्शे के अनुसार ΔPQR अंकन कीजिए।



क्या दोनों के अंकन में बराबर आकार के त्रिभुज मिले? कारण दर्शाइए।

4. उमेश ने BC = 5 से.मी. CA=3 से.मी. और AB=8.5 से.मी माप लेकर ABC त्रिभुज बनाने की कोशिश की।

आप भी इस माप को लेकर ΔABC अंकन करने की कोशिश कीजिए। क्या त्रिभुज अंकन करना संभव हुआ ? अपने उत्तर के पक्ष में कारण दर्शाइए।

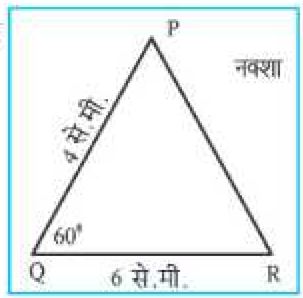
12.4.2 एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके बीच का (मध्या) कोण की माप ज्ञात हो तो त्रिभुज का अंकन (भु-कोभु शर्त -)

यहाँ हम एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई और उनके बीच के कोणों की माप दी गई हो तो त्रिभुज का अंकन केसे की जाती है। उस पर चर्चा करेंगे। नीचे सोपान में रचना प्रणाली की सूचना दी गई है। आप उसी प्रकार त्रिभुज की रचना करने की कोशिश कीजिए।

उदाहरण-3

- ΔPQR का अंकन करना है। इसकी PQ=4 से.मी., QR=6 से.मी और है $m\angle PQR = 60^{\circ}$

ΔPQR हम रचना करेंगे। यहाँ रचना की प्रणाली तय करने के लिए पहले इस त्रिभुज का नक्शा तैयार करेंगे। बगल में दी गई आकृति को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दें :



- त्रिभुज की किन-किन भुजाओं की लंबाई दी गई है ?
- जिस कोण की माप दी गई है, क्या वह दी गई दोनों भुजाओं के बीच का कोण है ?
- पहले कौन सी माप लेकर त्रिभुज की रचना करना आसान होगा ?

अंकन विधि

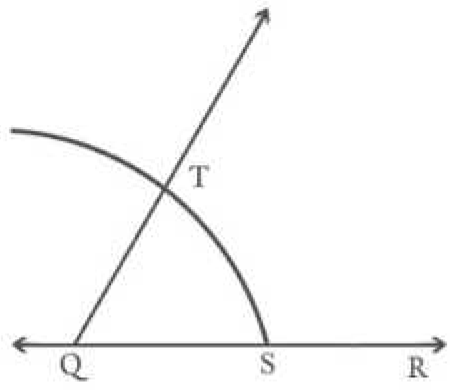
प्रथम चरण :

QR=6 से.मी खींचिए।

दूसरा चरण :

$\overline{QR}$ के Q बिन्दु पर 60° की माप का एक कोण बनाइए। इसके लिए परकार के काँटे की नोक को Q पर रखिए। कोई भी त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। वह $\overleftrightarrow{QR}$ को प्रतिच्छेद करें। प्रतिच्छेदित बिन्दु का नाम S दें। उस त्रिज्या को न बदलकर S को केन्द्र मानकर और एक चाप खींचिए, जो पहले के बनाए चाप को प्रतिच्छेद करेगा। इस प्रतिच्छेदित बिन्दु का नाम T दिजिए।

$\overrightarrow{QT}$ को मिलाइए।

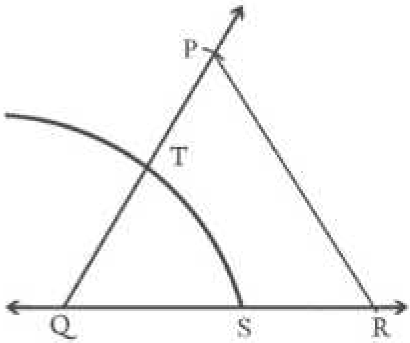


तीसरा चरण :

Q को केन्द्र करके 4 से.मी. की त्रिज्या लेकर एक चाम खींचिए। यह $\overrightarrow{QT}$ की प्रतिच्छेद करें। प्रतिच्छेदित बिन्दु का नाम P दें।

चौथा चरण :

$\overline{PR}$ को जोड़िए।



खुद करके देखिए:

उदाहरण-3 में जो त्रिभुज बानाया गया था, उसकी दो भुजाओं की लंबाई और उनके बीच के कोण की माप दी गई थी।

कार्य-कलाप-1

ΔABC मे $AB=4$ से.मी, $AC=5$ से.मी., $m\angle C=30^0$ क्या हम यह त्रिभुज बना सकेंगे? कोशिश करके देखिए।

हम $AC=5$ से.मी और $m\angle C=30^0$ लेकर अंकन कर सकेंगे ΔABC के दोनों शीर्ष A और C प्राप्त हुए। अब B शीर्ष मिलना आवश्यक है। BA=4 से.मी है। अर्थात् A बिन्दु से B की दूरी 4 से.मी है. अतएव, A बिन्दु पर परकार 4 cm. का नुकीला काँटा रखकर हम त्रिज्यावाला चाप खींच सकेंगे। यह चाप LC के AC को छोड़कर दूसरी भुजा को प्रतिच्छेद कर रहा है या नहीं, उसे देखिए। अब बनाइए क्या आप ΔABC का अंकन कर सके?

कार्य-कलाप -2

उसी प्रकार ΔABC में $AB=3$ से.मी, $AC=5$ से.मी और $m\angle B=30^0$ इस त्रिभुज का अंकन करने की कोशिश कीजिए। क्या मिला?

एक निश्चित ABC का अंकन करना क्या संभव हुआ? क्यों?

अर्थात् हमें ज्ञात हुआ कि एक निश्चित त्रिभुज का अंकन करने के लिए इसकी दो भुजाओं की लंबाई और इन दो भुजाओं के बीच के कोण की माप ज्ञात होनी चाहिए।

अभ्यास 12.5

1. ΔDEF की रचना कीजिए, जिसकी $DE=5$ से.मी, $DF=3$ से.मी और $m\angle EDF=90^0$ । होंगे। इस त्रिभुज की अन्य भुजाओं और कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

   उसी प्रकार एक पारदर्शी कागज पर ΔXYZ का अंकन कीजिए, जिसकी XY=5 से.मी. XZ=3 से.मी और mYXZ=90° होंगे। ΔXYZ को ΔDEF पर ऐसे रखिए कि ΔDEF के D और E बिन्दु क्रमशः ΔXYZ, X और Y बिन्दु पूर्णतया पर रहेगा।

   क्या देख रहे हैं?

   ΔDEF और ΔXYZ में क्या संबंध है? कारण क्या है?

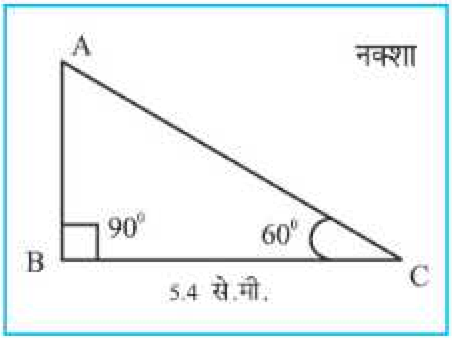
2. ΔABC का अंकन कीजिए, जिसकी BC=7.5 से.मी, AC=5 से.मी, $m\angle C=60^0$ हो।

12.4.3. दो कोणों और उनके बीच की भुजा के आधार पर त्रिभुज का अंकन (को.भु.शर्त)

उदाहरण-4

हमें का ΔABC खींचना है, जिसकी BC=5.4 से.मी. और हों

m∠ABC = 90^0 m∠BCA = 60^0 ।



हल :

ΔABC अंकन करने के लिए पहले उसे त्रिभुज का एक नक्शा तैयार करना है।

अब यह नक्शा देखकर बताइए:

- त्रिभुज अंकन करने के लिए कितनी मापें दी गई है?
- किस भुजा की लंबाई दी गई है?
- किन किन कोणों की माप दी गई है?
- जिन दो कोणों की माप दी गई है वे भुजा.($\overline{BC}$) के क्या संलग्न कोण है?

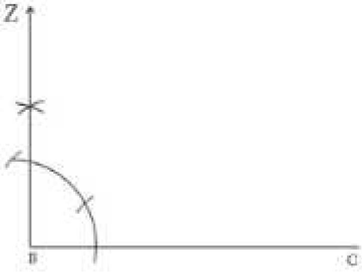
अंकन विधि

पहला चरण :

BC=5.4 खींचिए।

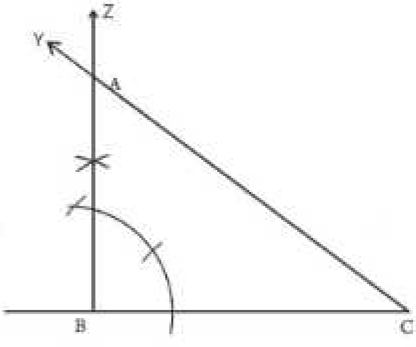
दूसरा चरण :

$\overline{BC}$ के B बिन्दु पर 90° माप का कोण बताइए। अब $\overrightarrow{BZ}$ प्राप्त हुई।



तीसरा चरण :

C बिन्दु से $\overline{CB}$ पर की 60° माप का कोण बनाइए। आकृति में जैसे दर्शाया गया है वेसै रश्मि $\overrightarrow{CY}$ का नामकरण कीजिए।$\overrightarrow{BZ}$और$\overrightarrow{CY}$ जिस बिन्दु पर परस्पर को प्रतिच्छेद करती है, उसका नाम A दें। अब आवश्यक ABC त्रिभुज प्राप्त हुआ।



बताइए :

पहले एक सरलरेखा खींचकर इस पर B और C बिन्दु दोनों को ऐसे दर्शाइए जैसे C की दाईं ओर रहेगा। अब दीई गए मापों को लेकर ΔABC अंकन करना क्या संभव है ?

उदाहरण : 4 में दीए गए अंकन में एक भुजा और उसके संलग्न कोण दोनों की माप दी गई है। यदि हमें ΔPQR का अंकन करना है, जिसकी $PR=6$ से.मी , $m\angle P=60^0$ और $m\angle Q=45^0$ है। क्या आप इस त्रिभुज का अंकन कर सकेंगे ? कैसे ?

अभ्यास 12.6

1. $EF=7.2$ से.मी , $m\angle E=90^0$, $m\angle F=90^0$ हो तो क्या ΔEFG का अंकन संभव है ? अपने उत्तर के पक्ष में कारण दर्शाईए।

2. ΔXYZ का अंकन कीजिए, जिसके $m\angle X=60^0$, $m\angle Y=30^0$ और $XY=6.2$ से.मी. हो।

3. ΔKLM का अंकन कीजिए, जिसके $LM=5.4$ से.मी हो $m\angle L=45^0$, $m\angle M=90^0$ हो।

   (क) इस त्रिभुज के अन्य दो भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

   (ख) इसके $\angle N$ की माप कितनी है ?

   (ग) भुजाओं की लंबाई के अनुसार यह किस प्रकार का त्रिभुज है ?

   (घ) कोणों की माप के अनुसार यह किस प्रकार का त्रिभुज है ?

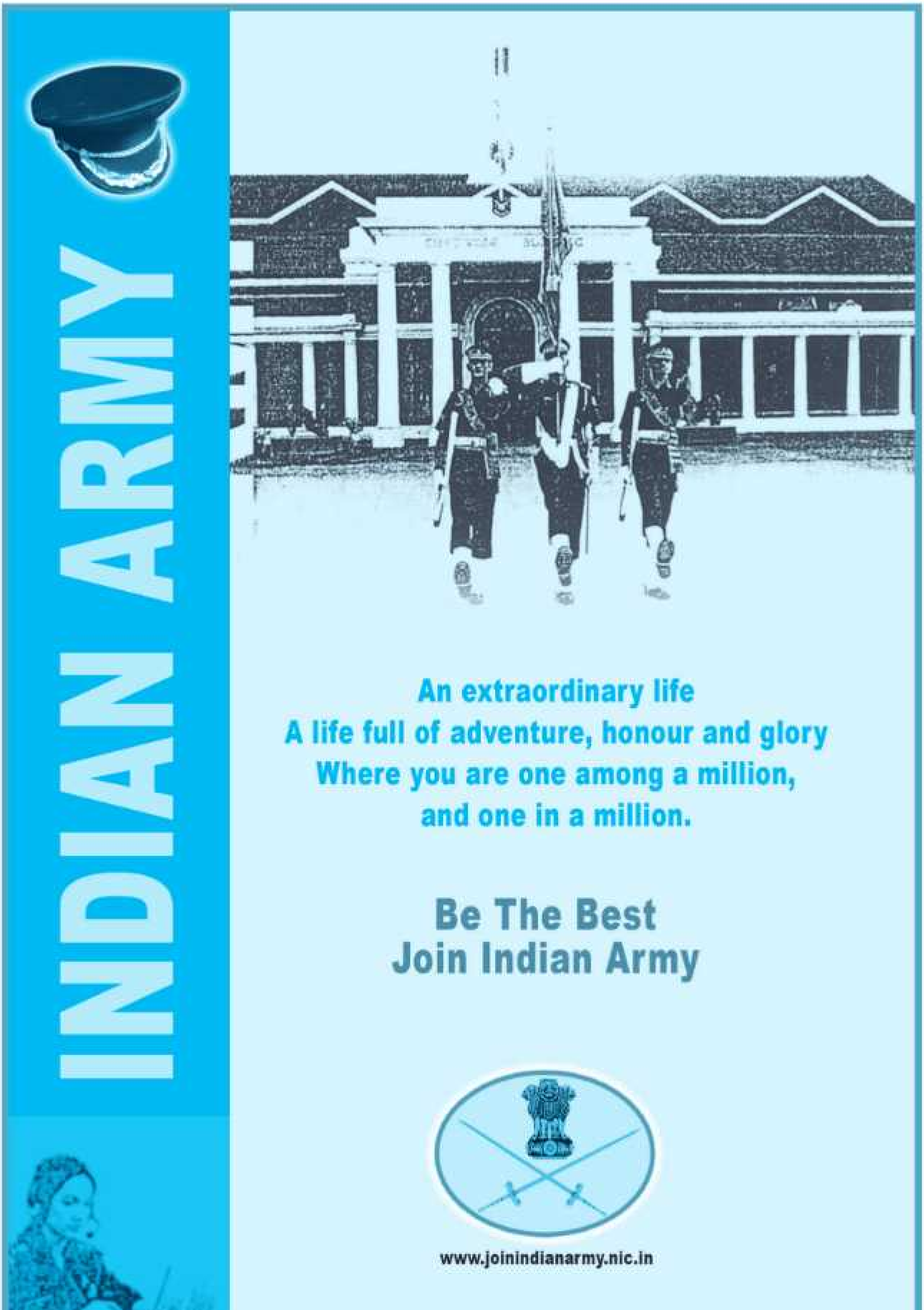
   अब एक पारदर्शी कागज पर ΔPQR का अंकन कीजिए, जिसकी $PR= 5.4$ से.मी और $m\angle P=45^0$, $m\angle R=45^0$ हों।

   PQR त्रिभुज को लेकर ΔLMN पर रखिए, जैसे ΔPQR के P बिन्दु और Q बिन्दु क्रमशः ΔLMN के L और M बिन्दु पर रहे।

   ΔPQR और ΔLMN के बीच क्या संबंध है ? इसका कारण दर्शाइए।

4. $ABC\Delta$ त्रिभुज का अंकन कीजिए, जिसकी $BC=5.3$ से.मी. और $m\angle B=45^0$ $m\angle A=75^0$ हो।

   इस त्रिभुज के चरणों को लिखिए।


INDIAN ARMY
An extraordinary life
A life full of adventure, honour and glory
Where you are one among a million,
and one in a million.
Be The Best
Join Indian Army
www.joinindianarmy.nic.in