గణితం

ఆరవ తరగతి

విద్యా హక్కు

సర్వశిక్ష అభిజాన్

ఉపాధ్యాయ విద్య నిర్దేశాలయం మరియు
రాష్ట్ర, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ
ఒడిషా, భువనేశ్వర్

ఒడిషా ప్రాథమిక అధికారము
భువనేశ్వరం

గణిత

6వ తరగతి

సంపాదకయ మండలి

ప్రొఫెసర్ దయానిధి పొరిడ

డా. నొళినీకాంతొ మిశ్రొ

శ్రీ. నగేంద్ర కుమార్ మిశ్ర

శ్రీ. తాపొస్ కుమార్ నాయక్

శ్రీ. ప్రసన్న కుమార్ సాహు

శ్రీ. చతుర్భుజ ప్రొధాన్

సంజోజాన

డా. ప్రీతిలతా జెన్నా

డా. తిలోత్తమ సెనాపతి

డా. సబిత సాహు

సమీక్ష మండలి

శ్రీ. మదన్ మోహన్ మహాంతి

శ్రీ. తాపస్ కుమార్ నాయక్

డా. వామదెవ త్రిపాఠి

అనువాదము మండలి :

UKDV ప్రసాద్ రావు

K. రామరావు

R. మధుకుమర్ (పున్వరక్షిక)

K. రామినాయుడు

Y. ధర్మరావు

S. సుగుణకుమారి

సంజోజాన :

డా. సబిత సాహు

ప్రచురణ : విద్యలయ మరియు గణశిక్షా విభాగము, ఒడిషా ప్రభుత్వం

ముద్రణ సంవత్సరము : 2022

ప్రస్తుతి : ఉపాధ్యాయ శిక్షా నిర్దేశాలయం మరియు రాష్ట్ర విద్య పరిశోధన మరియు శిక్షణ పరిషత్ ఒడిషా, భువనేశ్వర్ మరియు ఒడిషా రాష్ట్ర పాఠ్య పుస్తక తయారీ మరియు ముద్రణాలయ సంస్థ, భువనేశ్వర్

ముద్రణ : పాఠ్య పుస్తక ఉత్పాదన మరియు విక్రయం, ఒడిషా, భువనేశ్వర్

అందరు చదవండి, అందరు ఎదగండి జగన్మాత యొక్క చరణాలపై ఇప్పటి వరకు ఏమేమి సమర్పిస్తున్నానో, వాటిలో మౌళిక శిక్ష నాకు అన్నిటి కంటే అధిక విప్లవాత్మకమైనది మరియు మహోన్నత మైనది. వీటి కన్నా అధిక మహోన్నతము మరియు అధిక విలువైన నా యొక్క సమర్పన జగత్తులో ఉంచగలుగుతానో దీని కంటె ప్రత్యయం మరిలేదు. ఇదియే నా సమగ్ర రచనాత్మక కార్యక్రమమునకు ప్రయోగాత్మకంగా చేయు తాళం చెవి. ఏ నూతన ప్రపంచము గూర్చి నేను పరితపిస్తున్నానో, అది దీని నుండియే ఉద్భవించును. ఇది నా ఆఖరి అభిలాష అని చెప్పవచ్చును.

మహాత్మా గాంధీ

మన జాతీయ గీతం

"జన-గణ-మన అధినాయక జయ హె
భారత-భాగ్య-విధాతా
పంజాబ్-సింధు-గుజరాట్-మరాఠా
ద్రావిడ ఉత్కళ గంగ
వింధ్యై-హిమాచల-యమునా-గంగ
ఉచ్ఛళ జళధి తరంగ
తబ శుభ ఆశిష మాగె
గాహె తబ జయ గాథా
"జనగణ-మంగళ దాయక జయ హె,
భారత భాగ్య విధాతా
జయ హె జయ హె జయ హె,
జయ జయ జయ జయ హె

భారత రాజ్యాంగం

ప్రవేశిక స్వరూపం

భారత ప్రజలమైన మేము ఈ భారతదేశాన్ని సార్వభౌమ, సామ్యవాద, లౌకిక, (ప్రజాస్వామ్య, గణతంత్ర) రాజ్యంగా రూపొందించడానికి భారత పౌరులందరికి సాంఘిక, ఆర్థిక రాజకీయ న్యాయాన్ని, ఆలోచనలోనూ, భావ ప్రకటనలోనూ, మత విశ్వాసంలోనూ, అరాధనలోనూ, స్వేచ్ఛను జీవిత అవకాశాలలో సామాజిక విషయాలలోనూ సమానత్వాన్ని, వ్యక్తి గౌరవాన్ని, జాతీయ ఐక్యతను, సమగ్రతను పెంపొందించుకోవడానికి విధంగా సౌభ్రాతృత్వాన్ని కల్పించి ఈ రాజ్యాంగ పరిషత్తులో చర్చించి, తీర్మానించి, పరిగ్రహించి చిట్టరూపంలో మాకు మేము **26** నవంబరు **1949** నాడు సమర్పించుకుంటున్నాము.

విషయ సూచిక

అధ్యాయం	విషయము	పుట సంఖ్య
1	సంఖ్యలను తెలుసుకుందాం !	1
2	సంఖ్యలకు సంబంధించిన మరింత ఆలోచన	12
3	జ్యామితిలో ప్రాథమిక భావనలు	34
4	సహజ సంఖ్యలు	57
5	భిన్నాలు	86
6	దశాంశ సంఖ్యలు	109
7	వ్యవహారిక గణితం	121
8	పూర్ణసంఖ్యలు	138
9	సమతలంపై గల జ్యామితిక ఆకృతులు	158
10	భీజ గణిత పరిచయం	177
11	క్షేత్ర గణితం	197
12	విషయాల నిర్వహణ - సంరచన	209
13	ప్రాయోగిక జ్యామితి	220

మొదటి అధ్యాయం

సంఖ్యలను తెలుసుకుందాం !

1.1 పరిచయం :

సంఖ్యల గూర్చి ముందుగా మనకు తెలుసు. వస్తువులను లెక్కించుటలో మనం సంఖ్యలను వాడుతుంటాం. అదే విధంగా రెండు బేసిన్లలో గల వస్తువులలో ఏది ఎక్కువ మరియు ఏది తక్కువ అని తెలుసుకొనుటకు కూడా మనం సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తుంటాం. మీరు ఏఏ సందర్భాలలో సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తారో రెండు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

అధిక సంఖ్యలో వస్తువులను లెక్కించునపుడు సాధారణంగా మనం పెద్ద సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తుంటాం. ఉదాహరణకు ఇంటిని నినిర్మించుటకు అవసరమైన ఇటుకలను లెక్కించుటకు, ఒక ట్రక్కులో లోడు చేసిన కమలాల సంఖ్య, మీ బ్లాకు మరియు జిల్లాలో గల జనసంఖ్య మొదలైనవి. రండి వాటిని గుర్తు తెచ్చుకుందాం.

- క్రింది ఇవ్వబడిన ఉదాహరణలను చూడండి.

ఐదుగురు వ్యక్తుల బ్యాంకు అకౌంట్లలో ఉన్న డబ్బుల వివరాలు క్రింద ఇవ్వడమైనది.

మహేష్	సుఖబిందర్	సరిత	రంగనాథ్	జమీల్
100000	**456347**	**280593**	**350000**	**187532**

ఇప్పుడు క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

- ఎవరి వద్ద ఎంత సొమ్ము ఉన్నది చెప్పండి ? ప్రతి ఒక్కరి వద్ద గల సొమ్మును కామాలు పెట్టి రాయండి.

ఉదా.: **1,00,000**

- ఎవరి వద్ద తక్కువ సొమ్ము ఉన్నది ?
- ఎవరి వద్ద తక్కువ సొమ్ము ఉన్నది ?
- ఐదుగురు వద్ద గల సొమ్మును ఎక్కువ నుండి తక్కువ క్రమములో రాయండి.

మనకు తెలుసు,

1 లక్ష = 100 వేలు.

1.2 : ఒక కోటి వరకు సంఖ్యలతో పరిచయం :

పరిశీలించండి :

- నాలుగు అంకెల గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య = **9999**

  9999+1=10,000

  9999కు **1** కలిపినచో ఆ మొత్తము ఐదు అంకెల గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య అగును.

- అదే విధంగా ఐదు అంకెల గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యకు **1** కలిపిన ఆ మొత్తము ఎంత అగును ?

  99999+1=1,00,000 (ఆరంకెల గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య)

స్వయంగా చేసి చూడండి

ఆరంకెల గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యకు **1** కలిపినచో ఆ మొత్తం ఎంత అగునో చెప్పండి ? వచ్చిన సంఖ్య ఏడంకెల గల చిన్న సంఖ్య అగునా ?

ఈ క్రింది విధంగా మీ నోట్‌బుక్‌లో రాసి ఖాళీలను పూరించండి.

ఒక అంకె గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య (9)	+ 1	= 10	(రెండంకెల గల మిక్కిలి చిన్నసంఖ్య)
రెండంకెల గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య (99)	+ 1	= 100	(మూడంకెల గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య)
మూడంకెల గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య (999)	+ 1	= 1000	(నాలుగంకెల గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య)
నాలుగంకెల గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య (9999)	+ 1	= _____	(ఐదంకెల గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య)
ఐదంకెల గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య (_____)	+ 1	= _____	(ఆరంకెల గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య)
ఆరంకెల గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య (_____)	+ 1	= _____	(ఏడంకెల గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య)
ఏడంకెల గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య (_____)	+ 1	= 10000000	(ఎనిమిది అంకెల గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య)

కామాను ఉపయోగించి ఒక కోటి (**10000000**) ను **1,00,00,000**గా రాయాలి

వివిధ సంధర్భాలలో మనం ఒక కోటితో సంఖ్య పేరు చదువునపుడు ఉపయోగించే ఇతర యూనిట్ల గూర్చి ఇవ్వడమైనది. పరిశీలించండి.

1 వంద = **10** పదులు
1 వేయి = **10** వందలు లేక **100** పదులు
1 లక్ష = **100** వేలు లేక **1000** వందలు
1 కోటి = **100** లక్షలు లేక **10,000** వేలు

చెప్పండి చూద్దాం :
1కి కుడి ప్రక్కన ఏడు సున్నాలు పెడితే కోటి అవుతుంది. ఎనిమిది సున్నాలు పెడితే ఏ సంఖ్య వస్తుంది.

అభ్యాసం 1.1

1. ఎనిమిది అంకెల గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య మరియు తరువాత వచ్చే ఐదు సంఖ్యలను సరియైన స్థానాలలో కామాలను ఉపయోగించి రాయండి మరియు చదవండి.

2.

1	0	2
5	6	3
7	4	8

ప్రక్కనివ్వబడిన అంకెలను తీసుకొని ఐదు ఎనిమిదంకెల గల సంఖ్యలను రాసి వాటి పేర్లు అక్షరాలలో రాయండి.

(సూచన : **15** సంఖ్య పేరు పదిహేను)

3. ఎనిమిది అంకెలు గల సంఖ్యను రాయండి. అందులో అన్ని అంకెలు సమానంగా ఉండవలెను. ఈ విధంగా ఎన్ని సంఖ్యలు ఏర్పడునో వాటిని రాయండి.

4.క) కేవలం రెండు అంకెలను ఉపయోగించి ఎనిమిది అంకెలు గల సంఖ్య రాయండి. దాని అంకెలను తిరగేసి రాసినచో వచ్చు సంఖ్య మొదటి సంఖ్యతో సమానంగా ఉండవలెను.

ఖ) మూడు అంకెలను ఉపయోగించి ఎనిమిది అంకెల గల సంఖ్యను రాయండి. దాని అంకెల మొత్తం **8** అగును.

1.3. పెద్ద సంఖ్యల స్థాన విలువలు

సకిన పెద్ద సంఖ్యలను రాయుట మరియు చదువుట కొరకు ఒక మార్గాన్ని కనుగొనెను. **253**ను రాయుటకు అతడు ఒకట్లు, పదులు మరియు వందలు ఉపయోగించి ఎలా రాసాడో ఈ క్రింద ఇవ్వబడినది. పరిశీలించండి.

వ	ప	ఒ
2	5	3

విస్తరణ రూపంలో ఎలా రాయబడిందో చూడండి.

$2 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1$

అదే విధంగా, **3904** సంఖ్యను ఎలా రాయగలం ?

వే	వ	ప	ఒ
3	9	0	4

విస్తరణ రూపంలో

$3 \times 1000 + 9 \times 100 + 0 \times 10 + 4$

అదే విధంగా ఆరంకెలు గల సంఖ్యలను రాయుట కొరకు ఏ విధమైన పట్టికను ఉపయోగించగలమో ఉదాహరణ-**1**లో చూపించదమైనది.

ఉదాహరణ-1 :

370659 నకు విస్తరణ రూపంలో రాయండి.

సమాధానం :

లక్షలు	పదివేలు	వేలు	వందలు	పదులు	ఒకట్లు
3	**7**	**0**	**6**	**5**	**9**

పై సంఖ్యనకు విస్తరణ రూపంలో క్రింది విధంగా రాయవచ్చును.

$3\times100000 + 7\times10000 + 0\times1000 + 6\times100 + 5\times10 + 9\times1$

ఉదాహరణ-2 :

43513078 నకు విస్తరణ రూపంలో రాయండి.

సమాధానం :

మొదట **43513098** కు స్థానిక విలువల ఆధారంగా రాయాలి.

కోట్లు	పది లక్షలు	లక్షలు	పదివేలు	వేలు	వందలు	పదులు	ఒకట్లు
4	**3**	**5**	**1**	**3**	**0**	**9**	**8**

దీనిని విస్తరణ రూపంలో క్రింది విధంగా రాయవచ్చు.

$4\times10000000+3\times1000000+5\times100000+1\times10000+3\times1000+0\times100+9\times10+8\times1$

పరిశీలించండి :

43513098 సంఖ్యలో కోట్ల స్థానంలో **4** గలదు, కనుక **4** యొక్క స్థానిక విలువ **4** కోట్లు

పది లక్షల స్థానంలో **3** గలదు, కనుక **3** యొక్క స్థానిక విలువ **30** లక్షలు.

లక్షల స్థానంలో **5** గలదు, కనుక **5** యొక్క స్థానిక విలువ **5** లక్షలు

అదే విధంగా **1** యొక్క స్థానిక విలువ **10** వేలు

3 యొక్క స్థానిక విలువ **3** వేలు

0 యొక్క స్థానిక విలువ **00** వందలు

9 యొక్క స్థానిక విలువ **9** పదులు

8 యొక్క స్థానిక విలువ **8** ఒకట్లు

> మీకు తెలుసా ?
> **43513098**లో
> ఒకట్ల స్థానంలో **8**
> పదుల స్థానంలో **9**
> వందల స్థానంలో **0**

సంఖ్యలను చదువుట మరియు రాయుటలో కామా వినియోగం :

పెద్ద సంఖ్యలను రాయునపుడు కామాలను ఉపయోగించి రాయడం మీరు పరిశీలించి ఉంటారు. కామాలను ఉపయోగించి మనం పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలను చదవగలం మరియు రాయగలం. భారతీయ సంఖ్యల రాత పద్ధతిలో వేలు, లక్షల మరియు కోట్లు స్థానాలను సూచించుటకు కామాలను ఉపయోగించడం జరుగుచున్నది. పరిశీలించండి.

32579864 సంఖ్యకు కామాలను ఉపయోగించి **3,25,79,864** రూపంలో రాయవచ్చును. ఇచ్చట మొదట కామా మూడు అంకెల తరువాత ఉపయోగించడం జరిగింది. అదే విధంగా రెండవ కామా ఇంకో రెండు అంకెలను విడిచి ఉపయోగించడమైనది. మూడవ కామా పది లక్షల తరువాత ఉపయోగించడమైనది. ఇది కోట్లను సూచిస్తుంది. ఉదాహరణకుఅ : **4,08,01,592** సంఖ్యకు **4** కోట్ల **8** లక్షల **1** వేయి **592**గా చదవాలి.

✍ మీరు ఈ విధంగా ఐదు ఎనిమిది అంకెలు గల సంఖ్యలను రాసి చదువుటకు ప్రయత్నించండి.

కాని అంతర్జాతీయ సంఖ్యల రాత పద్ధతిలో వేలు మరియు పది లక్షల స్థానాల తరువాత కామాలను ఉపయోగించడం జరుగుతుంది. ఉదా.: **50801792** నకు కామాలను ఉపయోగించి అంతర్జాతీయ సంఖ్యల రాత పద్ధతిలో **50,801,782**గా రాయుదురు. కాని భారతీయ సంఖ్యల రాత పద్ధతిలో **5,08,01,792**గా రాయుదురు. ఈ తరగతిలో గల సంఖ్యలకు సంబందించిన అన్ని విషయాలు భారతీయ సంఖ్యల పద్ధతిలో ఉపయోగించడం జరిగింది.

అభ్యాసం 1.2

1. తగిన స్థానంలో కామాలను ఉపయోగించి క్రింది సంఖ్యలను రాయండి మరియు సంఖ్యల పేర్లు రాయండి.

320418, 7538425, 13247819, 10702000, 53214803

2. మీరు కేవలం **3,4,0** మరియు **7** అంకెలను ఉపయోగించి ఆరు అంకెల గల మరియు ఎనిమిది అంకెలు గల ఐదేసి సంఖ్యలను రాయండి.

క) ప్రతీ సంఖ్యకు సులువుగా చదువుటకు కామాను ఉపయోగించండి.

ఖ) సంఖ్యలను పెద్ద నుండి చిన్న క్రమంలో రాయండి.

3. కేవలం **1,0,8** మరియు **4**ను ఉపయోగించి ఎనిమిది అంకెల గల పెద్ద సంఖ్య మరియు ఎనిమిది అంకెల గల చిన్న సంఖ్య రాయండి. (ప్రతీ సంఖ్యలో ఇవ్వబడిన నాలుగు అంకెలను ఉపయోగించాలి.) మీరు రాసిన సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో రాయండి.

4. ఒక బ్యాంకులో ఒక వారంలో ఏ రోజు ఎంత సొమ్ము డిపాజిట్ అయ్యిందో ఈ ప్రక్కన ఇవ్వడమైనది. దానిని చూసి ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

సోమవారం	మంగళవారం
1,23,64,072	86,92,945
బుధవారం	గురువారం
89,80,001	1,08,72,666
శుక్రవారం	శనివారం
90,72,709	60,12,010

క) ఏ రోజు ఎంత సొమ్ము డిపాజిట్ అయ్యిందో అక్షరాలలో రాయండి.

ఖ) ఏ రోజు అత్యధిక సొమ్ము డిపాజిట్ అయ్యింది ?

గ) ఏ రోజు అన్నిటికంటె తక్కువ సొమ్ము డిపాజిట్ అయ్యింది ?

ఘ) ఏఏ రోజులలో **90** లక్షల కంటె ఎక్కువ సొమ్ము డిపాజిట్ అయ్యింది.

5.క) ఒక సంఖ్య యొక్క లక్షల స్థానంలో **4**, పదివేల స్థానంలో **7**, వేల స్థానంలో **2**, వందల స్థానంలో **0**, పదుల స్థానంలో **8** మరియు ఒకట్ల స్థానంలో **5** గలదు. ఆ సంఖ్యను రాయండి.

ఖ) సబిత ఒక పేపరులో ఒక సంఖ్యను రాసింది. ఆ సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో **5**, వేల స్థానంలో **2**, వందల స్థానంలో **2**, లక్షల స్థానంలో **5**, పదివేల స్థానంలో **3**, కోట్ల స్థానంలో **1**, పదిలక్షల స్థానంలో **7** మరియు పదుల స్థానంలో **4** గలదు. సబిత ఏ సంఖ్యను రాసింది ?

గ) జోషప్ ఒక ఎనిమిది అంకెల గల సంఖ్యను రాసెను. దీని యొక్క వేల స్థానంలో **7**, పదుల మరియు ఒకట్ల స్థానంలో **4** మరియు ఇతర స్థానములలో **0**ను రాసెను. అతను ఏ సంఖ్యను రాసెను ? దానిని తిప్పి రాసినచో ఏ సంఖ్య లభించును ?

6.క) **32759084**లో **2,9,8,4** యొక్క స్థానిక విలువలను రాయండి ?

ఖ) **375248**లో ప్రతి అంకె యొక్క స్థానిక విలువలను రాయండి. ఈ సంఖ్యను తిప్పి రాసి ఏ సంఖ్య వచ్చునో దాని ప్రతీ అంకె యొక్క స్థానిక విలువలను రాయండి.

గ) మీకు తెలిసిన ఒక ఎనిమిది అంకెల గల సంఖ్యను రాయండి. ఆ సంఖ్య యొక్క ప్రతి అంకె యొక్క స్థానిక విలువలను రాయండి.

ఘ) ఎనిమిది అంకెల గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య మరియు పెద్ద సంఖ్య రాయండి.

> **11111111** సంఖ్యలో అంకెల మొత్తం **8**,
> **22222222** సంఖ్యలో అంకెల మొత్తం **16**,
> **33333333** సంఖ్యలో అంకెల మొత్తం **24**,
> **44444444** సంఖ్యలో అంకెల మొత్తం **32**,
> **55555555** సంఖ్యలో అంకెల మొత్తం **40**,
> క్రింది ఇవ్వబడిన సంఖ్యల యొక్క అంకెల మొత్తం ఎంత అగునో కలపకుండా చూసి చెప్పండి.
> **66666666, 77777777, 88888888,**

1.4 ఏది ముందు ? ఏది వెనుక ?

ఉపాధ్యాయుడు తరువాత పేజిలో గల సంఖ్యలను నల్లబల్లపై రాసెను. రాసిన సంఖ్యల మధ్యలో మూడు సంఖ్యలను ఎంచి ఒక వరుసలో రాయుటకు చెప్పెను. తరువాత ప్రతీ వరుసలో గల 3 సంఖ్యలను చిన్న నుండి పెద్ద క్రమంలో రాయవలెను.

532121	421968	6355971	800001
6355970	421970	481717	800000
481716	532122	799999	6355972
532123	421971	481715	

- ఉపాధ్యాయుని యొక్క సూచన ప్రకారంగా సంఖ్యలను అమర్చండి.
- ఉపాధ్యాయుడు ఎన్ని సంఖ్యలను రాసెను ?
- మీరు ఆ సంఖ్యలను ఎన్ని వరుసలలో రాసిరి ?
- మీరు తప్పని సరిగా ఒక వరుసలో **532121, 532122, 532123** సంఖ్యలను రాసి ఉంటారు. ఈ సంఖ్యల వరుసలో మధ్యలో గల సంఖ్య ఎంత ? దాని యొక్క ముందు, వెనుక వచ్చే సంఖ్యలేవి ?
- మీరు ప్రతీ వరుసలో రాసిన సంఖ్యలలో మధ్య సంఖ్యను గుర్తించండి. ఆ సంఖ్య యొక్క సరిగ్గా ముందు, వెనుక వచ్చే సంఖ్యలను రాయండి.

మనం తెలుసుకున్నాం :-

ఏదైనా ఒక సంఖ్యకు 1 కలిపినచో దాని తరువాత సంఖ్య లభిస్తుంది మరియు ఏదైనా సంఖ్య నుండి 1 తీసిన దాని ముందు సంఖ్య లభిస్తుంది.

స్వయంగా చేసి చూడండి

123456 మరియు **123460**ల మధ్య సంఖ్యలు **123458, 123459**

9876539 మరియు **9876549** ల మధ్య సంఖ్యలు ....

4689432 మరియు **4689437** ల మధ్య సంఖ్యలు ....

8004315 మరియు **8004320** ల మధ్య సంఖ్యలు ....

7655458 మరియు **7655463** ల మధ్య సంఖ్యలు ....

7999998 మరియు **8000003** ల మధ్య సంఖ్యలు ....

అభ్యాసం 1.3

1. ఉదాహరణలో చూపించిన విధంగా ప్రతీ వరుస మధ్య సంఖ్య యొక్క ముందు మరియు తరువత సంఖ్యలను రాయండి.

ముందు సంఖ్య	సంఖ్య	తరువాత సంఖ్య
9999	10,000	10,001
	10090	
	29999	
	586452	
	358610	
	555555	
	708000	
	999999	

2.క) ఏదైనా సంఖ్య యొక్క తరువాత సంఖ్య మరియు ముందు సంఖ్యల మధ్య గల భేధమెంత ?

ఖ) ఏదైనా సరిసంఖ్య యొక్క తరువాత మరియు ముందు సంఖ్యలు సరిసంఖ్యలు అగునా ? ఒక ఉదాహరణ తీసుకొని పరీక్షించండి.

గ) ఒక కోటి యొక్క ముందు మరియు తరువాత సంఖ్యలను రాయండి.

ఘ) మీకు తెలిసిన ఎనిమిది అంకెలు గల ఐదు సంఖ్యలను రాయండి. ఆ సంఖ్యల యొక్క ముందు మరియు తరువాత సంఖ్యలను రాయండి.

3. ఒక మూడు అంకెలు గల సంఖ్యను తీసుకోండి. ఆ సంఖ్య యొక్క తరువాత మరియు ముందు సంఖ్యలను రాయండి. ముందు మరియు (వెనుక) తరువాత సంఖ్యలను (కలిపి) కూడిక చేసి వచ్చిన దానిని రెండు (భాగాలు చేయండి) చే భాగించండి. ఏమి లభించింది ? అదే విధంగా ఒక ఆరు అంకెలు గల సంఖ్యను తీసుకొని ఈ విధంగా చేయండి.

1.5 : ఎవరు ఎక్కువ, ఎవరు తక్కువ

ఐదు పట్టణాలలో గల జనసంఖ్య వరుసగా **89392, 72503, 124250, 120878, 210940.** ఈ పట్టణాల యొక్క జనసంఖ్యను పెద్ద నుండి చిన్న సంఖ్యల క్రమంలో రాయండి.

- రండి ముందుగా రెండు పట్టణాలు జనసంఖ్యలను పరిశీలిద్దాం

మొదటి పట్టణం యొక్క జనసంఖ్య = **89392**

రెండవ పట్టణం యొక్క జనసంఖ్య = **72503**

ఇచ్చట రెండు కూడా ఐదు అంకెల గల సంఖ్యలు. మొదటి సంఖ్య యొక్క పదివేల స్థానంలో గల అంకె మరియు రెండవ సంఖ్య యొక్క పదివేల స్థానంలో గల అంకెలను పరిశీలించండి. **8 > 7**

అందువలన **89392 > 72503**

- ఇప్పుడు **89392** మరియు **124250** సంఖ్యలను పరిశీలించండి.

ఇచ్చట **1242507 > 89392** (ఎందుకు ?)

మనం చూసాం, **124250 > 89392** మరియు **89392 > 72503**

ఒకవేల మూడువ సంఖ్య ముందు లభించిన పెద్దసంఖ్య కంటె చిన్న అయిన దానిని ముందు లభించిన చిన్నసంఖ్యతో పోల్చి చూడండి. మూడు సంఖ్యలు (**89392, 72503** మరియు **124250**) చిన్న సంఖ్య నుండి పెద్ద సంఖ్యల క్రమంలో రాసిన ఈ విధంగా అగును. **72503 < 89392 > 124250**

వీటిని పెద్ద నుండి చిన్న సంఖ్యల క్రమంలో రాసినచో ఈ విధంగా అగును. **124250 89392 72503.**

✎ అదే విధంగా ముందు ఇవ్వబడిన సంఖ్యలలో రెండేసి సంఖ్యలను తీసుకొని పరిశీలించండి మరియు ఆ సంఖ్యలను పెద్ద నుండి చిన్న క్రమంలో అమర్చి రాయండి.

అభ్యాసం 1.4

1. >, < మరియు = గుర్తులలో సరియైన దానిని ఎంచి ఈ క్రింది బాక్సులలో రాయండి.

క) 34587 [ ] 10000	ఙ) 965842 [ ] 965742
ఖ) 100000 [ ] 99999	చ) 1278942 [ ] 999985-2
గ) 548421+2 [ ] 548121	ఛ) 468007+2 [ ] 478010-1
ఘ) 875600 [ ] 915840	జ) 488007 [ ] 4880002

2. రెండు సంఖ్యలలో పెద్ద మరియు చిన్న సంఖ్యలను గుర్తించుటకు ఈ క్రింది వాటిలో ఏది సరియైనది ?

క) రెండు సంఖ్యలలో అంకెల సంఖ్యలు సమానం కానిచో వాటిలో ఏ సంఖ్య యొక్క అంకెలు అధికమో ఆ సంఖ్య పెద్దది అగును.

ఖ) ఒకవేల రెండు సంఖ్యలలో గల అంకెల సంఖ్యలు సమానం. అయిన ఏ సంఖ్య యొక్క ఎడమ ప్రక్కన గల అంకె పెద్ద అగునో ఆ సంఖ్య పెద్దది అగును.

గ) ఒకవేల రెండు సంఖ్యలలో గల అంకెల సంఖ్యల సమానం అయిన కేవలం కుడిప్రక్కన గల అంకెలు రెండు సరిపోల్చి పెద్ద మరియు చిన్న సంఖ్యలను రాయవచ్చును.

ఘ) రెండు సంఖ్యల యొక్క అంకెల సంఖ్యలు సమానం కానిచో కేవలం కుడి ప్రక్కన గల అంకెలను సరిపోల్చి పెద్ద సంఖ్య మరియు చిన్న సంఖ్యలను రాయగలం.

3. కేవలం **1** మరియు **0** లను ఉపయోగించి ఐదు, ఎనిమిది అంకెలు గల సంఖ్యలను రాయండి. వాటిని పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్య క్రమంలో రాయండి.

1.6 : పెద్ద సంఖ్యల యొక్క వివిధ గణిత ప్రక్రియలు :

ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ - 1 :

2001 సంవత్సరంలో చేసిన జనగణన ప్రకారం ఒడిషాలో జనసంఖ్య వివరాలను ఈ క్రింద ఇవ్వడమైనది.

ఒడిషాలో మొత్తం జనసంఖ్య	=	**3,68,04,660**
పురుషులు	=	**1,86,60,570**
స్త్రీలు	=	**1,81,44,090**
హరిజనులు (S.C)	=	**60,82,063**
గిరిజనులు (S.T.)	=	**81,45,081**
పట్టణాలలో నివసిస్తున్న జనసంఖ్య	=	**55,17,238**
గ్రామాలలో నివసిస్తున్న జనసంఖ్య	=	**3,12,87,422**

క) **2001** జనాభా లెక్కల ప్రకారం పురుషుల సంఖ్య స్త్రీల సంఖ్య కంటె ఎంత అధికం ?

జవాబు : పురుషుల సంఖ్య = **1,86,60,570**

స్త్రీల సంఖ్య = **1,81,44,090**

భేదం = **1,86,60,570 - 1,81,44,090 = 5,16,480**

∴ **2001** జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఒడిషాలో పురుషుల సంఖ్య స్త్రీల సంఖ్య కంటె **5,16,480** అధికం.

ఖ) ఒడిషాలో పట్టణాలలో గ్రామాల కంటె ఎంత తక్కువ గలరు ?

జవాబు : ఒడిషాలో పట్టణాలలో గల జనసంఖ్య = **55,17,238**

గ్రామాల్లో గల జనసంఖ్య = **3,12,87,422**

భేదం : **3,12,87,422 - 55,17,238 = 2,57,70,184**

∴ ఒడిషాలో పట్టణాలలో గ్రామాల కంటె **2,57,70,184** ప్రజలు తక్కువగా ఉన్నారు.

ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

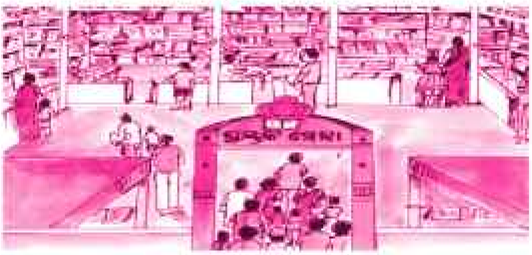
క) **2001** సంవత్సర జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఒడిషాలో గల జనసంఖ్య నాలుగు కోట్లు కంటె ఎంత తక్కువ ?

ఖ) **2001** సంవత్సర జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఒడిషాలో గల హరిజనుల (SC) మరియు గిరిజనులు (ST) మధ్యలో ఎవరు తక్కువ ?

అభ్యాసం 1.5

1. పుస్తక మేళాలో ఐదు రోజులలో ఎన్ని రూపాయల పుస్తకాలు అమ్మబడెనో వాటిని ఈ క్రింది ఇవ్వడమైనది.

మొదటి దినం	**47,22,780** రూ.లు
రెండవ దినం	**41,01,524** రూ.లు
మూడవ దినం	**72,24,218** రూ.లు
నాల్గవ దినం	**76,55,320** రూ.లు
ఐదవ దినం	**92,70,148** రూ.లు



క) ఏ దినం ఎక్కువ రూపాయల పుస్తకాలు మరియు ఏ దినం తక్కువ రూపాయల పుస్తకాలు అమ్మబడెను ?

ఖ) నాల్గవ దినం కంటె ఐదవ దినం ఎన్ని రూపాయలు అధిక పుస్తకాలు అమ్మడం జరిగెను ?

గ) పుస్తక మేళాలో మొత్తం ఎన్ని రూపాయల పుస్తకాలు అమ్మబడెను ?

ఘ) మొదటి మరియు చివరి దినములలో ఏ దినం తక్కువ రూపాయల పుస్తకాలు అమ్మబడెను ? ఎంత తక్కువ అమ్మబడెను ?

2. ఒక లోకసభకు జరిగిన ఎన్నికలలో ఒక గెలిచిన వ్యక్తి **5,45,2000** ఓట్లు పొంది అతని యొక్క ప్రత్యర్థినకు **1,78,298** ఓట్లతో ఓడించెను. అతని యొక్క ప్రత్యర్థి ఎన్ని ఓట్లు పొందెను ?

3. మహేష్‌నకు **22721** సంఖ్యకు **18**చే గుణించుటకు చెప్పడమైనది. కాని అతను **22721**కు **81** చే గుణించెను. ఇప్పుడు అతను పొందిన సంఖ్య మరియు పొందవలసిన సంఖ్యకు ఎంత ఎక్కువ లేక తక్కువ చెప్పండి.

4. ఒక మేకుల కర్మాగారంలో దినంనకు **62,736** మేకులు తయారు చేయబడును.

క) ఆ కర్మాగారంలో ఒక వారంలో ఎన్ని మేకులు తయారు చేయబడును ? (ఆదివారం సెలవు)

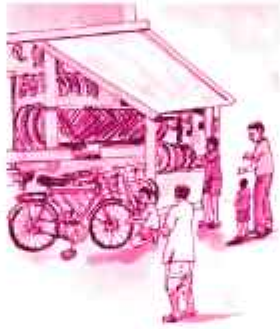
ఖ) జులాయి నెలలో ఆ కర్మాగారంలో ఎన్ని మేకులు తయారు చేయబడును ? (జులై నెలలో నాలుగు ఆదివారములు)

గ) **24** మేకులను ఒక ప్యాకెట్ చేసి బయటకు పంపించడం జరిగింది. అయిన ఒక వారంలో తయారైన మేకులను ఎన్ని ప్యాకెట్‌లలో ఉంచబడును ?

రెండవ అధ్యాయం

సంఖ్యలకు సంబంధించి మరింత ఆలోచన

మొదటి అధ్యాయంలో మనం పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలను చదువుట మరియు రాయుట గూర్చి తెలుసు. సంఖ్యల మధ్యలో వివిధ ప్రక్రియలు (కలుపుట, తీసివేయుట, గుణించుట మరియు భాగించుట) లను ఉపయోగించి గణిత సమస్యలను సమాధానం చేసాం. ఈ అధ్యాయంలో సంఖ్యలకు సంబంధించి మరింత ఆలోచన చేద్దాం.



2.1 : బ్రాకెట్ల ప్రయోగం.

ఒక సైకిల్ దుఖాణంలో **15** సైకిళ్ళు గలవు. మూడు దినములలో వరుసగా **3,2** మరియు **4** సైకిళ్ళు అమ్మడం జరిగింది. అయిన అతని వద్ద ఇంకెన్ని సైకిళ్ళు ఉందును ?

దీని యొక్క సమాధానం రెండు పద్ధతులలో చేయడమైనది.

మొదటి పద్ధతి	రెండవ పద్ధతి
◆ దుఖాణంలో ఎన్ని సైకిళ్ళు గలవు ?	◆ దుఖాణంలో ఎన్ని సైకిళ్ళు ఉండెను ?
◆ మొదటి దినం తరువాత ఎన్ని సైకిళ్ళు ఉండెను ?	◆ ఏ దినం ఎన్ని సైకిళ్ళు అమ్మబడెను ?
◆ రెండవ దినం తరువాత గల సైకిళ్ళు ఎన్ని ?	◆ మూడు దినములు మొత్తం ఎన్ని సైకిళ్ళు అమ్మబడెను ?
◆ మూడువ దినం తరువాత గల సైకిళ్ళు ఎన్ని ?	◆ మూడు దినముల తరువాత ఇంకెన్ని సైకిళ్ళు గలవు ?

ఈ రెండు పద్ధతుల మధ్య గల భేదమేమి ?

పరిశీలించండి, మొదటి పద్ధతిలో మొత్తం సైకిళ్ళ సంఖ్య నుండి మొదటి దినం అమ్మిన సైకిళ్ళ సంఖ్య తీసివేయబడింది. వచ్చిన సంఖ్య నుండి రెండవ దినం అమ్మిన సైకిళ్ళ సంఖ్య తీసివేయబడింది. అలాగే మిగిలిన దాని నుండి మూడవ దినం అమ్మిన సైకిళ్ళను తీసివేయడం జరిగింది.

కాని, రెండవ పద్ధతిలో మూడు దినములు అమ్మబడిన మొత్తం సైకిళ్ళ సంఖ్య తెచ్చి దాని నుండి దుకాణంలో గల సైకిళ్ళ సంఖ్య తీసివేయడం జరిగింది.

రండి చూద్దాం, రెండు పద్ధతులలో దీనిని ఏ విధంగా సమాధానం చేసారో ఈ క్రింది ఇవ్వడమైనది.

మొదటి పద్ధతి

మొదటి దినం తరువాత మిగిలిన సైకిళ్ళ సంఖ్య = 15-3 = 12
రెండవ దినం తరువాత మిగిలిన సైకిళ్ళ సంఖ్య = 12-2 = 10
మూడవ దినం తరువాత మిగిలిన సైకిళ్ళ సంఖ్య = 10-4 = 6

రెండవ పద్ధతి

మూడు రోజుల్లో అమ్మిన మొత్తం సైకిళ్ళ సంఖ్య = 3+2+4 = 9
మూడు దినముల తరువాత మిగిలిన సైకిళ్ళ సంఖ్య = 15-9 = 6

రెండవ పద్ధతిలో మూడు దినములు అమ్మిన మొత్తం సైకిళ్ళ సంఖ్య వచ్చిన తరువాత ముందు గల మొత్తం సైకిళ్ళ సంఖ్య నుండి తీసివేయడం జరిగింది.

మిగిలిన సైకిళ్ళ సంఖ్యను ఈ విధంగా 15-(3+2+4) రూపంలో రాయవచ్చును.

ఇచ్చట 3,2 మరియు 4 లను ఒక్కటిగా చేయుటకు "బ్రాకెట్" ( ) చిహ్నంను ఉపయోగించడం జరిగింది.

ఇప్పుడు మరొక ఉదాహరణకు పరిశీలిద్దాం :

ఒక నోట్‌బుక్ వెల 10 రూ.లు ప్రకారం గీత దుకాణం నుండి 7 నోట్‌బుక్‌లను కొనెను. ఆమె తమ్ముడు శోభన్ అలాంటి 5 నోట్‌బుక్‌లను కొనెను. వాళ్ళ ఇద్దరు దుఖాణదారుడికి ఎంత సొమ్ము ఇచ్చెదరు ? ఈ ప్రశ్న యొక్క సమాధానం కొరకు సరోజ్ మరియు మీన ఈ క్రింది ఉపాయాలతో సమాధానం చేసిరి.

సరోజ్ సమాధానం	మీన సమాధానం
మొత్తం ఇచ్చిన సొమ్ము=7×10+5×10	ఇద్దరు కొన్న మొత్తం నోట్‌బుక్‌లు = 7+5=12
=70+50=120 రూ.లు	మొత్తం ఇచ్చిన సొమ్ము = 12×10=120 రూ.లు

సరోజ్ మరియు మీన ల సమాధానాన్ని పరిశీలించండి. ఇద్దరి సమాధానం సమానము

లిప్పి చెప్పెను - నా సమాధానం చూడండి. 7+5×10=7+50=57 రూ.లు

నా సమాధానం - వాళ్ల సమాధానంతో సమానంగా లేదు.

అందరూ ఆలోచనలో పడ్డారు. అయితే సరియైన సమాధానం ఏది ?

సరోజ్ మరియు మీన చేసిన సమాధానం సరియైన సమాధానం.

> చెప్పండి చూద్దాం :
> లిప్పి సమాధానం ఎందుకు తప్పయినది

ఈ విధమైన పరిస్థితులలో బ్రాకెట్లను ఉపయోగించినచో సమాధానం సరిగ్గా మరియు సులువుగా లభించును. 7 మరియు 5 లను ఒక బ్రాకెట్‌లో ఉంచి ఒక సంఖ్యగా తీసుకోవాలి. ఇది కొన్న మొత్తం నోట్‌బుక్‌లను తెలుపును. ఈ సంఖ్యకు 10 చే గుణించడం జరిగింది. దీనిని ఈ క్రింది విధంగా రాయవచ్చును.

ఇచ్చిన మొత్తం = (7+5)×10 రూ.లు = 12×10 రూ.లు = 120 రూ.లు

మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం ?

మొదట బ్రాకెట్‌లో గల సంఖ్యలను సమాధానం చేయవలెను. తరువాత బ్రాకెట్ బయట గల సంఖ్యను సమాధానం చేయవలెను.

రండి, ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన ప్రతీ వాక్యాన్ని బ్రాకెట్లను ఉపయోగించి చుద్దాం.

క) **27** నుండి **2,5** మరియు **4**ల మొత్తాన్ని తీసివేయుట.

ఖ) **15** మరియు **3**ల మొత్తంనకు **6** చే గుణించుట.

గ) పదిలో మూడు తీసి వచ్చిన సంఖ్యను ఆరుచే గుణించుట

ఘ) అరవైకు నాలుగు మరియు మూడుల మొత్తం యొక్క రెండు వంతులచే భాగించుట

- క్రింది మూడు సంఖ్యలను పరిశీలించండి.

  (3+4)×7

బ్రాకెట్‌లో మూడుకు నాలుగు కలపడం జరిగింది మరియు మొత్తంనకు ఏడు చే గుణించుట జరిగింది. మన నిత్య జీవితంలో జరిగిన విషయాలలో వీటిని ఆలోచిద్దాం.

- రీత ఉదయం మూడు గంటలు మరియు రాత్రి నాలుగు గంటలు చదువును. అయిన తను ఏడు దినములలో మొత్తం ఎన్ని గంటలు చదువును ?
- ఒక గదిలో **3** బస్తాల బియ్యం మరియు **4** బస్తాల ధాన్యం గలవు. అదే విధంగా ఏడు గదులలో గల మొత్తం బస్తాలు ఎన్ని ?

7×(8-3)ను ఉపయోగించి రెండు ఉదాహరణలను రాయండి. అనగా మీ రెండు ఉదాహరణలతో **7×(8--3)**ను ఉపయోగించవలెను.

2.1.1 నాలుగు మౌళిక ప్రక్రియలు గల సమస్య సమాధానం

ఈ క్రింది నీయబడిన వివిధ ప్రక్రియలు గల సమస్య సమాధాన పద్ధతిని చూడండి.

ఉదాహరణ - **1** :

$$15\times10\div2+9-3 = 15\times5+9-3$$
$$= 75++9-3$$
$$= 84-3$$
$$= 81$$

పై గల ఉదాహరణను పరిశీలించి ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానం చెప్పండి.

- ఇచ్చట ఏ గణత ఉక్తిని సమాధానం చేయుటకు చెప్పడమైనది ?
- ఆ గణిత ఉక్తిలో ఏఏ సంఖ్యలు మరియు గణిత ప్రక్రియలు గలవు ?
- మొదట ఏ గణిత ప్రక్రియను సమాధానం చేయడమైనది ?

- రెండవ సోపానంలో ఏ గణిత ప్రక్రియను సమాధానం చేయబడినది.
- గుణించుట ప్రక్రియ తరువాత ఏ ప్రక్రియను చేయడమైనది ?
- చివరిగా ఏ ప్రక్రియను చేయడమైనది మరియు జవాబు ఎంత లభించెను ?

దీని వలన మనకు తెలిసినది ఏమనగా, ఒకటి కంటె ఎక్కువ ప్రక్రియల గల ఉక్తిని సమాధానం చేయనపుడు వరుసగా భాగించుట, గుణించుట, కలుపుట మరియు తీసివేత చేయవలెను.

మీరు స్వయంగా చేయండి

క) **$14-4\div2\times3$** ఖ) **$81\div9\times3+4-2$**

కాని ఏదైనా సమాధాన ప్రక్రియలో బ్రాకెట్ ఉపయోగించి నట్లైతే దాని లోపల ప్రక్రియను మొదట చేయవలెను.

సాధించండి.

క) **$15+(10\div5)\times3-3$** ఖ) **$12\div(4\div2)\times3$**

గ) **$18\div3-(4-2)$** ఘ) **$(6\times3)-9+(2\times3)$**

బ్రాకెట్లు నాలుగు రకాలు :

అవి : 1) రేఖా బ్రాకెట్ ———

2) చంద్ర బ్రాకెట్ ( )

3) బైన్ బ్రాకెట్ { }

4) స్క్వేర్ బ్రాకెట్ [ ]

> తెలుసా ?
> కొన్ని సంఖ్యల ఉక్తిలో ఒకటి కన్నా ఎక్కువ బ్రాకెట్ల ఉపయోగం జరిగినచో మొదట అన్నిటి కంటె లోపల గల బ్రాకెట్‌లో గల సంఖ్యల సమాధానం చేసి వరుసగా అన్ని బ్రాకెట్లను తీయడం జరుగును.

సాధారణంగా బ్రాకెట్ల ఈ క్రింది విధంగా ఇవ్వబడును.

[{(———)}]

- ఏ ఉక్తిలో ఒక బ్రాకెట్ అవసరమో అచ్చట చంద్ర బ్రాకెట్ ఉపయోగించబడును.
- రెండు బ్రాకెట్ల అవసరమున్నచో చంద్ర మరియు బైన్ బ్రాకెట్లలో ఉపయోగించబడును.
- మూడు బ్రాకెట్ల అవసరమున్నచో చంద్ర, బైన్ మరియు స్క్వేర్ బ్రాకెట్లు ఉపయోగించబడును.
- నాలుగు బ్రాకెట్ల అవసరమున్నచో రేఖా బ్రాకెట్, చంద్ర బ్రాకెట్, బైన్ బ్రాకెట్ మరియు స్క్వేర్ బ్రాకెట్ ఉపయోగించబడును.

రండి, ఈ క్రింది ఉదాహారణలలో గల బ్రాకెట్ల ఉపయోగం తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ :

$72 \div \{19-(3+7)\}$

క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి

- ఇచ్చట ఏఏ బ్రాకెట్లను ఉపయోగించడం జరిగింది ?
- అన్నిటి కంటె లోపల ఏ బ్రాకెట్ గలదు ?
- ఈ బ్రాకెట్‌లో ఏ గణిత ప్రక్రియ గలదు మరియు దాని విలువ ఎంత అగును ?

$72 \div \{19-(3+7)\} = 72 \div \{19-10\}$

- తరువాత సమీకరణంలో ఏ బ్రాకెట్ గలదు ?
- ప్రస్తుతం బ్రాకెట్ మధ్యలో గల 19-10 కు సాధించండి.

$$72 \div \{19-10\} = 72 \div 9$$
$$= 8$$

ఉదాహరణ -2 :

సాధించండి : $20-[13-\{7 \div 7 \times 5-(2-1)\}]$

సమాధానం : $20-[13-\{7 \div 7 \times 5-(2-1)\}] = 20-[13-\{7 \div 7 \times 5-1\}]$

$$= 20-[13-\{1 \times 5-1\}]$$
$$= 20-[13-\{5-1\}]$$
$$= 20-[13-4]$$
$$= 20-9$$
$$= 11$$

అభ్యాసం 1.1

1. **బ్రాకెట్లను ఉపయోగించి రాయండి.**

క) 5 మరియు 7 ల మొత్తమునకు 12 ద్వారా భాగించుట.

ఖ) 12 నకు 5 మరియు 3 ల మొత్తం ద్వారా భాగించుట.

గ) 15 నుండి 12ను తీసివేసి దానిలో 1 కలిపిన వచ్చు సంఖ్యను 20 చే గుణించుట.

ఘ) 133 నకు 4 మరియు 5 ల గుణఫలం నుండి 1 తక్కువగా ఉన్న సంఖ్య ద్వారా భాగించుట.

2. **తప్పులున్నచో సరిదిద్ది రాయండి.**

క) 12÷4-1 నకు సమాధానం చేయునపుడు మొదట 12 నకు 4 ద్వారా భాగించ వలెను.

ఖ) (6-3)X2 నకు సమాధానం చేయునపుడు మొదట 6-3 ల తీసివేత చేయవలెను.

గ) $12 - \{8 \div (3 - 1)\}$ నకు సమాధానం చేయునపుడు మొదట 12 నుండి 8 ని తీసివేయవలెను .

ఘ) $20 \times \{6 \div (3 - 2)\}$ నకు సమాధానం చేయునపుడు మొదట $6 \div 3$ లను సాధించాలి.

3. సాధించండి.

క) $[9 \times \{7 - (2 + 3)\}]$

ఖ) $1 - [1 - \{1 - (1 - \overline{1 - 1})\}]$

గ) $5 - [5 - \{5 - (5 - \overline{5 - 5})\}]$

ఘ) $[\{3 \times 2 - (2 \times \overline{6 - 3})\} - \{(15 \div \overline{8 - 3}) + (12 \div \overline{4 - 2})\}]$

2.2 భాగఫల నియమాలు (భాజనీయతా సూత్రాలు) :

మనకు ముందుగా తెలుసు, ఒక సంఖ్యను మరొక చిన్న సంఖ్య ద్వారా భాగించిన భాగఫలం లభించును మరియు భాగశేషం ఉండును లేదా భాగశేషం ఉండదు. క్రింది రెండు ఉదాహరణలను ఇవ్వడమైనది.

$124 \div 2 = 62$ $\quad\quad\quad$ $83 \div 10 =$

మొదటి భాగక్రియలో భాగశేషం లేదు లేక సున్నా. కాని రెండవ భాగక్రియలో భాగశేషం 3, మనం చెప్పగలం 124, 2 ద్వారా భాగింపబడును.

భాగించుట వలన ఏదైనా సంఖ్య 2 లేక 3 ద్వారా పూర్తిగా భాగింపబడునో లేదా తెలుసుకోగలం. కాని పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలు 2 లేక 3 చే భాగించి అవి పూర్తిగా భాగింపబడునో లేదో తెలుసుకొనుటకు అధిక సమయం పట్టును. అందువలన ఏదైనా సంఖ్య 2,3,4,5,6,8,9,10 మరియు 11 ద్వారా భాగింపబడునో లేదో తెలుసుకొనుటకు కొన్ని సూత్రాలు గలవు. రండి వాటిని గూర్చి తెలుసుకుందాం.

క) 2 యొక్క భాజనీయలో సూత్రం :

ఈ క్రింది సంఖ్యలను 2 చే భాగించబడి, ఏ సంఖ్యలు 2 చే భాగింపబడునో వాటిని రాయండి.

20, 32, 33, 44, 55, 59, 76, 48, 91, 37, 95

ఏ సంఖ్యలు 2చే భాగింపబడెనో వాటి యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో ఏఏ అంకెలు గలవో చెప్పండి.

మనం తెలుసుకున్నాం :

ఏ సంఖ్యల యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 0,2,4,6 లేక 8 ఉండునో అవి 2 చే భాగింపబడును.

> **తెలుసా ?**
>
> ఏ పూర్ణ సంఖ్యలు 2 ద్వారా భాగింవబడునో వాటిని సరిసంఖ్యలు మరియు ఏ సంఖ్యలు 2 ద్వారా ద్వారా భాగింపబడవో వాటిని బేసి సంఖ్యలు అందురు.

స్వయంగా చేసి చూడండి :

- మీ నోట్‌బుక్‌లో ఈ క్రింది నీయబడిన సంఖ్యలను రెండు వరుసలలో ఇచ్చినట్లు రాయండి.

11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,
21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,	30

- ఏ సంఖ్యలు 2 చే భాగింపబడునో వాటి చుట్టు వృత్తం గీయండి.
- 2 ద్వారా భాగించిన సంఖ్య మరియు దాని తరువాత గల 2 చే భాగించిన సంఖ్య మధ్య భేధమును చూడండి.
- 5 మరియు 6 అంకెలు గల సరిసంఖ్యలను తీసుకొని పైన ఇచ్చిన నియమం సరిపోతుందో లేదో పరీక్షించండి.

ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

1. భాగక్రియ చేయకుండా ఈ క్రింది వాక్యాలలో ఏది సరిసంఖ్య అవుతుందో రాయండి.
   120, 497, 6179, 1429, 1689, 18179, 24492, 2988,
   20000, 92723, 4872, 579871, 94700, 4444, 654324

2.క) ఆరంకెల గల సంఖ్యల ఐదు రాయండి. అవి 2 ద్వారా భాగింపబడును.

ఖ) 2 ద్వారా భాగింపబడని ఆరంకెల గల సంఖ్యలు ఐదు రాయండి.

ఖ) 3 యొక్క భాజనీయతా సూత్రం :-

ఈ క్రింద నీయబడిన ప్రతీ సంఖ్యను 3 ద్వారా భాగించండి.

24, 30, 32, 65, 70, 72, 10.213, 21.219, 300

ఏ సంఖ్యలు 3 చే భాగించిన తరువాత భాగశేషం ఉండదో వాటిని రాయండి.

3 ద్వారా భాగింపబడని సంఖ్యల అంకెల మొత్తంను కనుగొనండి.

ఇప్పుడు చెప్పండి భాగక్రియ చేయకుండా 3 ద్వారా భాగించిన సంఖ్యలను ఎలా తెలుసుకోగలం.
మనం తెలుసుకున్నాం : **ఏ సంఖ్యల యొక్క అంకెల మొత్తం 3 ద్వారా భాగింపబడునో ఆ సంఖ్యలు 3 చే భాగింపబడును.**

ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

3.క) 15342, 21304, 30000, 12401లలో ఏవి 3 ద్వారా భాగింపబడునో భాగించకుండా చెప్పండి.

ఖ) 135✱278 సంఖ్యలలో చుక్క గుర్తు స్థానంలో ఏ అంకెను రాసిన అది 3 ద్వారా భాగింపబడును ?

గ) 357024 సంఖ్యలో గల సున్నా బదులుగా ఏ అంకెను రాసిన ఆ సంఖ్య 3 చే భాగింపబడును ?

ఘ) 3, ఎనిమిది అంకెలు గల సంఖ్యలను రాయండి, అవి 3 ద్వారా భాగింపబడును.

ఙ) 3, ఎనిమిది అంకెలు గల సంఖ్యలను రాయండి, అవి 3 ద్వారా భాగింపబడవు.

చ) ముందు గల (గ) మరియు (ఘ) ప్రశ్నలకు ఎన్ని సమాధానాలు వచ్చునో రాయండి.

గ) 4 యొక్క భాజనీయతా సూత్రం :

120, 125, 310, 312, 318, 410, 416, 515, 600, 620

పైన ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను 4 చే భాగించండి.

ఏఏ సంఖ్యలు 4 ద్వారా భాగంపబడెను ? ఏఏ సంఖ్యలు 4 ద్వారా భాగించబడలేదు ?

4 ద్వారా భాగింపబడిన సంఖ్యల పదులు మరియు ఒకట్ల స్థానంలో గల అంకెలతో ఏర్పడిన సంఖ్యలు పట్టిక తయారు చేయండి.

4 ద్వారా భాగింపబడని సంఖ్యల పదులు మరియు ఒకట్ల స్థానంలో గల అంకెలతో ఏర్పడిన సంఖ్యలను రాయండి.

పరిశీలించండి :

ఏ సంఖ్య యొక్క పదులు మరియు ఒకట్ల స్థానంలో గల అంకెలతో ఏర్పడిన సంఖ్య 4చే భాగింపబడునో ఆ సంఖ్య 4 ద్వారా భాగింపబడును.

212లో పదుల స్థానంలో 1 మరియు ఒకట్ల స్థానంలో 2 గలదు. వీటి స్థానాల ద్వారా ఏర్పడిన సంఖ్య 12. 12, 4 ద్వారా భాగించును. అందువలన 212 కూడా 4 ద్వారా భాగింపబడును.

క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

4.క) మీరు స్వయంగా నాలుగు నాలుగంకెల గల సంఖ్యలు రాయండి. అవి 4 ద్వారా భాగింపబడును.

ఖ) ఖాళీ స్థానాలలో ఏ అంకెను రాసిన అవి 4 ద్వారా భాగింపబడును.

3142—2, 21343—4, 40036—, 2458342—

ఘ) 5 యొక్క భాజనీయతా సూత్రం :

లుడ్డుపిక్క ఆటలో ఒక పిల్లడు లుడ్డుపిక్కను వేసినపుడు ఎనిమిది సార్లు కేవలం 5 వచ్చింది. ఒకవేల దానా 0 పై ఉన్నచో ప్రతిసారి లుడ్డుపిక్క వేసిన తరువాత దానా ఏఏ సంఖ్యల మీదుగా వెల్లును మరియు చివరకు ఎక్కడకు చేరును ?

ఆ సంఖ్యల 5 ద్వారా భాగింపబడునా ?

ఈ సంఖ్యల ఒకట్ల స్థానంలో ఏఏ అంకెలు గలవు ? ఒకట్ల స్థానంలో 0 మరియు 5 లేని కొన్ని రెండు లేక మూడ అంకెలు గల సంఖ్యలను తీసుకొని 5 ద్వారా భాగించండి. అవి 5 ద్వారా భాగించబడ్డాయా ఏదైనా సంఖ్య 5 ద్వారా భాగింపబడునని ఏ విధంగా తెలుసును ?

ఏ సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 0 లేక 5 ఉండునో ఆ సంఖ్యలు 5 ద్వారా భాగింపబడును.

పరిశీలించండి : 5 x 1 = 5
5 x 2 = 10
5 x 3 = 15
5 x 4 = 20 మొదలైనవి

తెలుసునా ?

ఏదైనా సంఖ్యను 5చే గుణించిన గుణఫలంలో గల సంఖ్య ఒకట్ల స్థానంలో 5 లేక 0 వచ్చును.

ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

5.క) 5 ద్వారా భాగింపబడిన నాలుగు ఐదు అంకెల గల సంఖ్యలు రాయండి.

ఖ) 5 ద్వారా భాగింపబడిన మూడు సంఖ్యలను రాయండి. ఆ సంఖ్యలను తిరగవేసి రాసిన ఏర్పడిన సంఖ్య కూడా 5 ద్వారా భాగింపబడును. (ఉదాహరణకు 5386450)

ఙ) 6 యొక్క భాజనీయతా సూత్రం :

స్వయంగా చేసి చూడండి.

- 2 మరియు 3 చే భాగింపబడిన ఐదు మూడంకెల గల సంఖ్యలను రాయండి. ప్రతీ సంఖ్యను 6 ద్వారా భాగించండి మరియు అవి 6 ద్వారా భాగింప్డబడెనో లేదో చూడండి.
- మూడు మూడంకెల గల సంఖ్యను రాయండి. ఆ సంఖ్యలు 2 ద్వారా భాగింపబడును కాని 3 ద్వారా భాగింపబడవు.
- మూడు మూడంకెల గల సంఖ్యలను రాయండి. ఆ సంఖ్యలు 3 ద్వారా భాగింపబడును కాని 2 ద్వారా భాగింపబడవు.
- ఈ క్రింది పట్టికను మీ నోట్‌బుక్‌లో రాయండి. మీరు పైన రాసిన సంఖ్యలను పట్టిక ఎడమ ప్రక్క గదులలో క్రింద రాసి మిగిలిన ఖాళీలను పూరించండి.

సంఖ్య	2 ద్వారా భాగించునా ?	3 ద్వారా భాగించునా ?	6 ద్వారా భాగించునా ?

మనం తెలుసుకున్నాం,

ఏ సంఖ్య 2 మరియు 3 ద్వారా భాగింపబడునో ఆ సంఖ్య 6 ద్వారా భాగింపబడును.

చూచి చెప్పండి.
6 ద్వారా భాగింపబడిన ఒక సంఖ్య యొక్క ఏదైనా స్థానంలో 6 రాసిన ఏ సంఖ్య ఏర్పడునో అది 6 ద్వారా భాగించునా ?

ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

6. రెండు అంకెలు గల సంఖ్యలను రాయండి. అవి 6 ద్వారా భాగింపబడును.

చ) 8 యొక్క భాజనీయతా సూత్రం :

1808, 3104, 3424 సంఖ్యలు 8 ద్వారా భాగించునా ? ప్రతీ సంఖ్యకు 8 ద్వారా భాగించిన తరువాత మీరు తెలుసుకొనెదురు. ప్రతి సంఖ్య 8 ద్వారా భాగింపబడును. రండి ఈ సంఖ్యలలో గల ప్రాముఖ్యతను వెతికి తీద్దాం.

ఈ సంఖ్యలలో వందలు, పదులు మరియు ఒకట్ల స్థానాలలో గల అంకెల ద్వారా ఏర్పడిన సంఖ్యలను పరిశీలించండి. అవి 808, 104 మరియు 424. ఈ సంఖ్యలు కూడా 8 ద్వారా భాగింపబడును.

ఇప్పుడు మీరు రెండు సంఖ్యలను రాయండి, ఏ సంఖ్యల వందలు, పదులు మరియు ఒకట్ల స్థానాలలో గల అంకెలతో ఏర్పడినన సంఖ్యలు 8 ద్వారా భాగింపబడును. ఆ సంఖ్యలు రెండు 8 ద్వారా భాగించునా లేదా పరీక్షించి చూడండి. అవి కూడా 8 ద్వారా భాగించుట చూడగలరు.

> తెలుసునా ?
> ఒకటి, రెండు మరియు మూడు అంకెల సంఖ్యలను 8 ద్వారా భాగించునా లేదా తెలుసు కొనుటకు భాగక్రియను ఉపయోగించబడును.

ఏదైనా నాలుగంకెలు లేదా దాని కంటె ఎక్కువ అంకెలు గల సంఖ్య యొక్క వందలు, పదులు మరియు ఒకట్ల స్థానంలో గల అంకెల ద్వారా ఏర్పడిన సంఖ్య 8 ద్వారా భాగించిన ఆ సంఖ్య 8 ద్వారా భాగించును.

ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

7.క) 572, 8 ద్వారా భాగించును. దీని యొక్క ఎడమ ప్రక్కన మరి రెండు అంకెలను రాసి ఏ క్రొత్త సంఖ్య ఏర్పడునో అది 8 ద్వారా భాగించునో లేదో పరీక్షించి చూడండి.

ఖ) మూడు నాలుగంకెల గల సంఖ్యలను రాయండి. అవి 8 ద్వారా భాగింపబడును.

ఛ) 9 యొక్క భాజనీయతా సూత్రం :

9 యొక్క గుణాంకాలు 9,18,27,36,45,54,63 ..... మొదలైన అదే విధంగా 5211, 31014, 2232 సంఖ్యలు కూడా 9 ద్వారా భాగింపబడును. (పరీక్షించి చూడండి)

పైన గల ప్రతీ సంఖ్యల అంకెల మొత్తంను చూడండి.

1+8=9, 2+7=9, 3+6=9, 4+5=9, 5+4=9, 6+3=9

ప్రతీ సంఖ్య యొక్క అంకెల మొత్తం 9 ద్వారా భాగింపబడును.

ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

8.క) నాలుగు ఐదంకెలు గల సంఖ్యలను రాయండి. అవి 9 ద్వారా భాగింపబడును.

ఖ) రెండు నాలుగంకెల గల సంఖ్యలు రాయండి. అవి 6 మరియు 9 చే భాగింపబడును.

9. వేరు వేరు సంఖ్యలను తీసుకొని పరీక్షించి చూడండి.

9 ద్వారా భాగింపబడిన ఏదైన సంఖ్య 3 ద్వారా భాగింపబడవా ?

3 ద్వారా భాగింపబడిన ప్రతి సంఖ్య 9 ద్వారా భాగింపబడవా ?

జ) 11 యొక్క భాజనీయతా సూత్రం :

121, 308, 1331, 61809, 257130 లను 11చే భాగించండి. ఇవి 11చే భాగించును. ఈ క్రింది నీయబడిన పట్టికలో సంఖ్యలు యొక్క అంకెల మధ్యలో గల సంబంధము చూద్దాం. మరియు వాటిలో గల ముఖ్య విషయాలు తెలుసుకుందాం.

సంఖ్య	కుడివైపు నుండి బేసి స్థానంలో గల అంకెల మొత్తం	కుడివైపు నుండి సరి స్థానంలో గల అంకెల మొత్తం	రెండింటి యొక్క భేదం
121	1+1= 2	2	2-2=0
308	8+3=11	0	11-0=11
1331	1+3=4	3+1=4	4-4=0
61809	9+8+6=23	0+1=1	23-1=22
251130	0+1+5=6	3+1+2=6	6-6=0

మనం చూసాం, ఇచ్చట భేదం 0 లేక 11 యొక్క గుణాంకం వచ్చింది. ఈ సంఖ్యలన్ని 11 ద్వారా భాగింపబడును.

ఇప్పుడు 89244ను తీసుకుందాం. ఈ సంఖ్య యొక్క కుడివైపు నుండి ఎడమవైపుకు వెళ్లినచో మొదటి, మూడవ మరియు ఐదవ స్థానాలలో గల అంకెలు వరుసగా 4,2 మరియు 8. వాటి మొత్తం 4+2+8=14. అదే విధంగా రెండవ మరియు నాల్గవ స్థానాలలో గల అంకెలు రెండు 4 మరియు 9. వాటి మొత్తం 4+9=13.

ఇచ్చట భేదం 14-13=1. ఈ సంఖ్య 11 ద్వారా భాగించునో లేదో పరీక్షించి చూడండి.

మనం తెలుసుకున్నాం -

ఏ సంఖ్య యొక్క కుడివైపు నుండి బేసి స్థాన అంకెల మొత్తం మరియు సరి స్థాన అంకెల మొత్తముల భేదం 0 లేక 11 యొక్క గుణాంకంతో సమానం అగునో అవి 11 ద్వారా భాగించును.

అభ్యాసం 2.2

1. భాజనీయతా సూత్రాలను ఉపయోగించి ఈ క్రింద నీయబడిన సంఖ్యలు 2 ద్వారా, 3 ద్వారా, 4 ద్వారా, 5 ద్వారా, 6 ద్వారా, 8 ద్వారా, 9 ద్వారా, 11 ద్వారా భాగించునో లేదో పరీక్షించండి మరియు ఏ సంఖ్య ద్వారా భాగించునో ఆ సంఖ్య క్రింద గల ఖాళీ నందు (✓) గుర్తు పెట్టండి.

సంఖ్య	దేని ద్వారా భాగింపబడును ?							
	2	3	4	5	6	8	9	11
990								
1586								
400								
6666								
639210								
429714								
2856								
900000								
999999								

2.3 గుణిజాలు మరియు గుణంకాలు :

మీరు గుణిజాలు మరియు గుణాంకాల గూర్చి ముందు తరగతిలో తెలుసుకున్నారు. రండి వాటిని గుర్తు చేసుకుందాం.

- 12 నకు రెండు సంఖ్యల గుణఫలం రూపంలో రాయగలం.

ఏ విధంగా అనగా 12 = 1 x 12

= 2 x 6

= 3 x 4

12 యొక్క గుణిజాలు = 1,2,3,4,6 మరియు 12 అదే విధంగా 18 యొక్క గుణిజాలు = 1,2,3,,6,9 మరియు 18.

ఇప్పుడు చెప్పండి ఏవి 12 మరియు 18 యొక్క సాధారణ గుణిజాలు.

- ఇప్పుడు 8 మరియు 9 యొక్క సాధారణ గుణిజాలను కనుగొందాం.

8 యొక్క గుణిజాలు = 1,2,4 మరియు 8 అదే విధంగా

9 యొక్క గుణిజాలు = 1,3, మరియు 9

ఇప్పుడు 8 మరియు 9 యొక్క సాధారణ గుణిజం ఏది ?

ఇప్పుడు కేవలం '1' 8 మరియు 9 యొక్క సాధారణ గుణిజం.

ఈ విధమైన జోడు సంఖ్యలను పరస్పర మౌళిక సంఖ్యలని అందురు. అందువలన 8 మరియు 9 రెండు పరస్పర మౌళిక సంఖ్యలు అగును.

చెప్పండి చూద్దాం :
మీరు రెండు జతల పరస్పరం మౌళిక సంఖ్యల ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

- కొన్ని సంఖ్యలు గలవు, వాటికి కేవలం రెండు మాత్రమే గుణిజాలు గలవు.

అవి కొన్ని, 7 యొక్క గుణిజాలు = 1, 7 11 యొక్క గుణిజాలు = 1,11

– ఈ విధంగా కేవలం రెండు గుణిజాలు గల సంఖ్యలను మౌళిక సంఖ్యలు అందురు. అదే విధంగా మీరు మరో ఐదు మౌళిక సంఖ్యలను ఉదాహరణ లివ్వండి.

– ఏ సంఖ్యలకు రెండు కంటె ఎక్కువ గుణిజాలు ఉండునో వాటిని జౌగిక సంఖ్యలని అందురు.

15 యొక్క గుణిజాలు 1,3,5,15 కనుక 15 ఒక జౌగిక సంఖ్య అగును. ఈ విధంగా మీరు నాలుగు మౌళిక సంఖ్యలను చెప్పండి.

- 4 x 1 = 4, 4 x 2 = 8, 4 x 3 = 12, 4 x 4 = 16.......

ఇక్కడ 4,8,12,16 .... మొదలైనవి 4 యొక్క గుణాంకాలు.

అదే విధంగా 6 యొక్క గుణాంకాలను నిర్ణయించగలం. 6 యొక్క గుణాంకాలు 6,12,18,24 ....

చెప్పండి చుద్దాం :

ఒక సంఖ్యను ఎన్ని గుణాంకాలు ఉండును ?

ఒక సంఖ్య యొక్క అన్నిటి కంటె చిన్న గుణాంకం ఏది ?

ఒక సంఖ్య యొక్క అన్నిటి కంటె పెద్ద గుణాంకం ఏది ?

- 3 యొక్క గుణంకాలు - 3,6,9,12,15,18,21,24 ......

  4 యొక్క గుణంకాలు - 4,8,12,16,20,24,28,32 ....

  3 మరియు 4 యొక్క సాధారణ గుణాంకాలు - 12,24 .... మొదలైనవి

స్వయంగా చేసి చూడండి :

- 6 యొక్క గుణిజాలను రాయండి.
- 6 యొక్క అన్ని గుణిజాల మొత్తం ఎంత ?
- 6 యొక్క రెండు వంతులు ఎంత అగును ?
- 6 యొక్క అన్ని గుణిజాల మొత్తం మరియు 6 యొక్క రెండు వంతుల మధ్యలో ఏ సంపర్కం చూసారు ?

ఏ సంఖ్య యొక్క గుణిజాల మొత్తం, 9 సంఖ్య యొక్క రెండు వంతులతో సమానం అగునో దానిని సంపూర్ణ సంఖ్య అందురు.

1 నుండి 30 మధ్యలో గల సంఖ్యలను తీసుకొని పరీక్షించండి మరియు వేరే ఏ సంఖ్య సంపూర్ణ సంఖ్య అగునో నిర్ణయించండి.

గోల్డ్‌బాక్ మాట

4 నుండి పెద్ద ప్రతీ సరి సంఖ్యనకు రెండు మౌళిక సంఖ్యల మొత్తముగా చూపించగలం.

ఉదా: 6=3+3

18=7+11 మొదలైనవి.

గోల్డ్‌బాక్ అనే పేరు గల ఒక గణిత శాస్త్రవేత్త మొదట దానిని కనుగొనెను.

అభ్యాసం 2.3

చెప్పండి చూద్దాం !
1 నుండి 20 మధ్యలో ఎన్ని మౌళిక సంఖ్యలు గలవు ?

1. 10 మరియు 20 మధ్యలో గల మౌళిక సంఖ్యలను రాయండి.
2. 3,4 మరియు 5ల మూడు సాధారణ గుణాంకాలు రాయండి.
3. 60 మరియు 75ల యొక్క సాధారణ గుణిజాలను రాయండి.
4. ఈ క్రింది నీయబడిన ప్రతీ వాక్యాన్ని చదివి అది తప్పా లేక ఒప్పా చెప్పండి.
   (సరియైన కారణం చూపించి మీ సమాధానం సరి చూడండి)

క) ఏదైనా సంఖ్యకు ఆ సంఖ్య గుణిజాలు ఉండును.

ఖ) 4 మరియు 9 పరస్పర మౌళిక సంఖ్యలు అగును.

గ) ఏదైనా సంఖ్య ఆ సంఖ్య యొక్క చిన్న గుణిజము.

ఘ) 9 మరియు 13 లందు సాధారణ గుణిజం లేదు.

ఙ) ఏదైనా సంఖ్యకు నిర్దిష్ట సంఖ్య గల గుణిజాలు ఉండును.

చ) 12 ఒక సంపూర్ణ సంఖ్య అగును.

2.4. మౌళిక గుణిజాలు :

ఏదైనా సంయుక్త సంఖ్యకు అనేక రకాలుగా గుణిజాల గుణఫలం రూపంలో చూపించగలం. ఉదాహరణకు 60 యొక్క గుణిజాలను ఈ విధంగా రాయగలం.

క) 2 x 30   ఖ) 3 x 20   గ) 4 x 15

ఘ) 5 x 12   ఙ) 6 x 10   చ) 2 x 2 x 3 x 5

ఈ గుణిజాలు వేరు వేరుగా గలవు. మొదటి, రెండు మరియు నాల్గవ విషయాలలో ప్రతీ దానిలో ఒక గుణిజం మౌళిక మరియు వేరొకటి సంయుక్త సంఖ్యలు కాని మూడువ మరియు ఐదవ విషయాలలో గల రెండు గుణిజాలు సంయుక్త గుణిజాలు. కాని ఆరవ విషయంలో గుణిజాలలో ప్రతీ గుణిజ మౌళిక సంఖ్యలు.

ఏదైనా గుణిజం కంటె మౌళిక గుణిజాల ప్రాముఖ్యత మరియు ఏదైనా సంఖ్య యొక్క గుణిజాలు నిర్ణయించునపుడు సంయుక్త గుణిజాలు వేరు వేరుగా వచ్చును. కాని ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క మౌళిక గుణిజాలు ఒకే రకంగా ఉండును. గుణిజాలు క్రమం మారవచ్చు. కాని గుణిజాలను మార్పు ఉండదు. ఈ క్రింది ఉదాహరణ చూడండి.

$$6 = 2 \times 3 \quad 25 = 5 \times 5$$

దీనిని సంఖ్య యొక్క అనేక ఉత్పాదకకరణం అందురు.

ఉదాహరణ-1 : 420 సంఖ్యను మౌళిక గుణిజాల రూపంలో రాయండి.

సమాధానం : 420 సంఖ్య, 2 ద్వారా భాగించును మరియు 2 అన్నిటి కంటె చిన్న మౌళిక సంఖ్య అగును.

అందువలన $420 = 2 \times 210$

$210 = 2 \times 105$

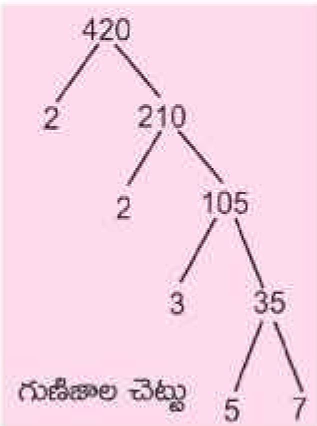
$\therefore 420 = 2 \times 2 \times 105$

105 ఒక సంయుక్త సంఖ్య ఇది 3 ద్వారా భాగింపబడును. $105 = 3 \times 35$

$\therefore 420 = 2 \times 2 \times 3 \times 35$

35 కూడా సంయుక్త సంఖ్య దీనిని 7×5 గా రాయగలం.

అందువలన, $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$



గుణిజాల చెట్టు

ఇచ్చట గుణిజాలు మౌళిక సంఖ్యలు కనుక మనం 420కు మౌలిక గుణిజాలు రూపంలో రాశాం, పైన గల పద్ధతిని ఈ క్రింది విధంగా చూపించగలం.

భాజకం కారణాంకం

2	420
2	210
3	105
5	35
	7

420 = 2 x 2 x 3 x 5 x7

సమాధానాలు రాయండి :

క) ఐదు అంకెలు గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్యను రాయండి మరియు దీనిని మౌళిక రూపంలో రాయండి.

ఖ) నాలుగంకెల గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యను రాయండి మరియు దీనిని మౌళిక రూపంలో రాయండి.

గ) 1729 యొక్క మౌళిక కారణాంకాలు రాయండి మరియు వాటిని ఉర్ధ క్రమంలో అమర్చండి. వీటిలో మధ్య సంబంధంను తెలియ జేయండి.

2.5. గరిష్ట సాధారణ భాజకము (గ.సా.భా.)

రెండు లేక రెండు కంటె ఎక్కువ సంఖ్యల గరిష్ట సాధారణ భాజకం లేక గ.సా.భా. ఒక అద్వితీయ సంఖ్య.

- అది ప్రతీ సంఖ్య యొక్క కారణాంకం అనగా ఇది అన్ని సంఖ్యల సాధారణ కారణాంకం అగును.
- అన్ని సాధారణ గుణిజాల మధ్యలో అన్నిటి కంటె పెద్దది అగును.

ఉదాహరణకు : రండి సంఖ్యలు 12 మరియు 16 గూర్చి ఆలోచన చేద్దాం.

12 యొక్క కారణాంకాలు : 1,2,3,4,6,12

18 యొక్క కారణాంకాలు : 1,2,4,8,16

ఇచ్చట సాధారణ కారణాంకాలు 1,2,4 దీనిలో 4 అన్నిటి కంటె పెద్ద సాధారణ గుణిజం కనుక 12 మరియు 16లు గ.సా.భా. 4 అగును.

రెండు లేక ఎక్కువ సంఖ్యల గ.సా.గు. తెలుసుకొనుటకు సాధారణంగా ఏఏ పద్ధతులను ఉపయోగించుదుమో అవి - మౌళిక కారణాంకాలు విశ్లేషణ పద్ధతి, సాధారణ భాగక్రియ పద్ధతి మరియు నిరంతర భాగక్రియ పద్ధతి. ఇప్పుడు మనం ఈ పద్ధతుల గూర్చి ఆలోచన చేద్దాం.

2.5.1. మౌళిక కారణాంకాల విశ్లేషణ పద్ధతి :

ఈ పద్ధతి మూడు సోపానాలతో జరుగును.

1వ సోపానం : ఇచ్చిన సంఖ్యలలో ప్రతీ సంఖ్యను మౌళిక కారణాంకాలలో విశ్లేషణ చేయండి.

2వ సోపానం : అన్ని కారణాంకాలలో గల సాధారణ మౌళిక కారణాంకాని రాయండి.

3వ సోపానం : మీకు లభించిన సాధారణ కారణాంకాలను గుణించిన గ.సా.భా. లభించును.

ఉదాహరణ-1 : సంఖ్యలు 24 మరియు 40ల గ.సా.గు. నిర్ణయించండి.

సమాధానం : సోపానం 1 : 24 = 2 x 2 x2x3

40=2 x 2 x2 x 5

సోపానం 2 : సాధారణ మౌళిక కారణాంకాలు 2,2 మరియు 2

సోపానం 3 : గ.సా.భా. = 2 x 2 x2=8

ఉదాహరణ-2 : 144, 180, 192 ల గ.సా.గు. కనుగొనుము.

సమాధానం : సోపానం 1 : 144=2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3

180=2x 2 x3 x3 x5

192=2 x 2 x2x2 x 2 x2x 3

సోపానం 2 : సాధారణ మౌళిక కారణాంకాల 2 మరియు 3

సోపానం 3 : గ.సా.భా. = 2 x2x 3=12

ఉదాహరణ-3 : 27 మరియు 80ల గ.సా.గు కనుగొనుము.

సమాధానం : సోపానం 1 : 27= 3 x 3 x3

80=2x2x2x2x5

సోపానం 2 : ఇచ్చట ఎటువంటి సాధారణ గుణిజాలు లేవు. కనుక గ.సా.భా. 1 అగును.

2.5.2. సాధారణ భాగక్రియ పద్ధతి :

సాధారణ భాగక్రియ పద్ధతిలో 24 మరియు 40ల గ.సా.గు. ఈ క్రింది విధంగా నిర్ణయించబడును.

2	24,	40
2	12,	20
2	6,	10
2	3,	5

రెండు సంఖ్యలు ఏ మౌళిక సంఖ్య ద్వారా భాగించునో ఆ సంఖ్య ద్వారా రెండు సంఖ్యలను భాగించడమైనది.

∴ గ.సా.భా. = 2x2x2=8

పైన గల రెండు పద్ధతుల ద్వారా గా.సా.గు తెలుసుకొనుటకు మనం ప్రతీ సంఖ్యకు మౌళిక కారణాంకాలు విశ్లేషణ చేయవలెను. చిన్న చిన్న సంఖ్యలు విషయంలో ఈ ప్రక్రియ సులువుగా జరుగును కాని పెద్ద పెద్ద సంఖ్యల విషయంలో ఈ ప్రక్రియ అనగా మౌళిక గుణిజాల విశ్లేషణ చేయుట అంత సులభం కాదు. ఈ పరిస్థితులలో గా.సా.గు. తెలుసుకొనుటకు ఒక వికల్ప పద్ధతి, **నిరంతర భాగక్రియ** పద్ధతిని ఉపయోగించి వచ్చును.

2.5.3 : నిరంతర భాగక్రియ పద్ధతి :

ఈ పద్ధతి ద్వారా మనం రెండు సంఖ్యల గా.సా.గు.ను క్రింది సూపానాలలో పొందగలం.

సోపానం 1 : పెద్ద సంఖ్యను చిన్న సంఖ్యచే భాగించి భాగశేషమును నిర్ణయించండి.

సోపానం 2 : ఒకవేల భాగశేషం 0 అయిన చిన్న సంఖ్య గ.సా.భా. అగును. ఒక వేల భాగశేషం 0 కానిచో చిన్న సంఖ్యను ముందు వచ్చిన భాగశేషం ద్వారా భాగించి క్రొత్త భాగశేషంను నిర్ణయించండి.

సోపానం 3 : ఒకవేల క్రొత్త భాగశేషం 0 అయిన ముందు భాజకం గా.సా.గు అగును. ఒక వేల భాగశేషం 0 కానిచో ముందు భాజకంను ఈ భాగశేషం ద్వారా భాగించండి. ఈ పద్ధతిని ఈ విధంగా చేసుకుంటూ వెల్లండి. ఎచ్చట భాగశేషం 0 అగునో అచ్చట ప్రక్రియ పూర్తి అగును. భాగశేషం 0 అయిన చివరి భాజకం గా.సా.భా. అగును.

ఉదాహరణ-4 : 24 మరియు 40ల గ.సా.భా. కనుగొనుము.

సమాధానం : సోపానం 1 : 24)40(1
24
―――

సూపానం 2 : 16)24(1
16
―――

సోపానం 3 : 8)16(2
16
―――
0

అందువలన 24 మరియు 40ల గ.సా.భా 8 అగును.

ఒక వేల రెండు కంటె ఎక్కువ సంఖ్యలునచనచో మొదట మనం ఏవైనా రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా. నిర్ణయించవలెను. తరువాత మిగిలిన సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్య మరియు ముందు గా.సా.గు ల గ.సా.భా.ను నిర్ణయించ వలెను. అన్ని సంఖ్యల గూర్చి ఆలోచన కానంత వరకు ఈ ప్రక్రియ ప్రతిసారి చేసుకొని వెల్లవలెను చివరి గ.సా.భా. మనకు అవసరమైన గ.సా.భా. అగును. ఈ చివరి గ.సా.భా. సంఖ్యల వరుసపై ఆధారపడి ఉండును. కాని ఒకవేల మనం సంఖ్యలను ఊర్ధ్వక్రమంలో తీసుకున్నచో అప్పుడు ఈ ప్రక్రియ సులభం అగును.

ఉదాహరణ-5 : 144, 180 మరియు 192 ల గ.సా.భా. నిర్ణయించండి.

సమాధానం : 144)180(1
144
36)144(4
144
0

144 మరియు 180ల గా.సా.గు. 36 అగును. ఇప్పుడు మనం 36 మరియు 192 ల గ.సా.భా.ను కనుగొందాం

36)192(1
180
12)36(3
36
0

∴ 144, 180 మరియు 192 ల గ.సా.భా. 12 అగును.

అభ్యాసం 2.4

1. 65610 సంఖ్య 27 ద్వారా భాగించును. 65610 యొక్క దగ్గరగా గల రెండు సంఖ్యలను తీసుకొనుము అవి 27 ద్వారా భాగించును.
2. రెండు వరుస సంఖ్యల గ.సా.భా. ను కనుగొనుము.
3. ఏ మిక్కిలి పెద్దసంఖ్య ద్వారా 245 మరియు 1029 లకు భాగించిన ప్రతీ సంఖ్యలో భాగశేషము 5 వచ్చును.
4. రెండు ట్యాంకులలో వరుసగా 850 లీటర్లు మరియు 680 లీటర్లు పెట్రోలు గలదు. (మీరు పెట్రోలు కొలిచే పాత్రను తీసుకొండి, దేనితో ప్రతీ ట్యాంకులో పెట్రోలును పూర్తిగా కొలగలము.) మీరు ఏ పాత్రను తీసుకొంటే ప్రతీ ట్యాంకులో గల పెట్రోలును పూర్తిగా కొలగలం.
5. ఏ మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య ద్వారా 398, 436 మరియు 542లను భాగించిన వరుసగా 7,11 మరియు 15 భాగశేషాలు వచ్చును ?
(సూచన- 398-7, 436-11, 542-15 ల గ.సా.భా. కనుగొనుము.
6. ఒక గది యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తుల వరుసగా 5 మీ. 25 సెం.మీ., 6 మీ. 75 సెం.మీ. మరియు 4 మీ. 50 సెం.మీ. అయిన మీరు ఏ పెద్ద కర్రను తీసుకొన్నచో గది యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులను పూర్తిగా కొలగలము.
7. ఉదాహరణలను తీసుకొని ప్రతీది నిజమా కాదా పరీక్షించండి. (ప్రతీ దానికి మూడు ఉదాహరణలను తీసుకొండి.)

క) రెండు వేరు వేరు మౌళిక సంఖ్యల గ.సా.భా. 1 అగును.
ఖ) రెండు పరస్పర మౌళిక సంఖ్యల గ.సా.భా. 1 అగును.
గ) ఒక సరిసంఖ్య మరియు ఒక బేసి సంఖ్యల గ.సా.భా. ఒక సరిసంఖ్య అగును.
ఘ) రెండు వరుస సరిసంఖ్యల గ.సా.భా. 2.
ఙ) రెండు వరుస బేసి సంఖ్యల గ.సా.భా. 2.

2.6. కనిష్ట సాధారణ గుణిజం (క.సా.గు.)

రెండు లేక అంతకంటె అధిక సంఖ్యల కనిష్ట సాధారణ గుణిజం (క.సా.గు.) ఆ సంఖ్య అగును. అనగా-

- ఈ అన్ని సంఖ్యల ఒక గుణిజం.
- అన్ని సాధారణ గుణిజాల మధ్యలో అన్నిటి కంటె చిన్నది అగును.

> **చెప్పండి చూద్దాం !**
> రెండు సంఖ్యల సాధారణ గుణిజాల మధ్యలో పెద్ద గుణిజాన్ని నిర్ణయించగలమా ? ఎందుకు ?

ఉదాహరణకు : 8 యొక్క గుణిజాలు = 8,16,24 ......

మరియు 12 యొక్క గుణిజాలు = 12,24,36 ....

ఇచ్చట సాధరణ గుణిజం : 24, 48 ...... వీటిలో అన్నిటికంటె చిన్న లేక కనిష్ట సంఖ్య 24. అందువలన 8 మరియు 12 ల క.సా.గు. నిర్ణయించుము. సాధారణంగా రెండు పద్ధతుల ఉపయోగించ వచ్చును. ఈ పద్ధతుల ఏమనగా మౌళిక కారణాంకాల పద్ధతి మరియు సాధారణ భాగక్రియ పద్ధతి.

2.6.1. మౌళిక లేక ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిలో క.సా.గు. లబ్ధం రూపంలో రాయగలం. ఇచ్చిన సంఖ్యలలో గల ప్రధాన కారణాంకాలను సరిచూసి వాటి మధ్యలో గల ప్రతీ కారణాంకాలు అత్యధికంగా ఎన్ని సార్లు ఉండునో అన్ని సార్లు తీసుకొవలెను మరియు వాటి లబ్ధంను కనుగొనుము. ఈ లబ్ధాన్ని క.సా.గు. అందురు. ఈ క్రింది ఉదాహరణలను చూడండి.

ఉదాహరణ-1 : క.సా.గును కనుగొనండి.

(క) 24 మరియు 40 (ఖ) 40, 48 మరియు 75

సాధన : (క) $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

ఇచ్చట ప్రధాన కారణాంకాలు 2,3 మరియు 5 అగును. కారణాంకం 2 అత్యధికంగా 3 సార్లు, 3 అత్యధికంగా 1 సారి, 5 అత్యధికంగా 1 సారి వచ్చెను.

అందువలన క.సా.గు

ఖ) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$75 = 3 \times 5 \times 5$

ఇచ్చట ప్రధాన కారణాంకాలు 2,3 మరియు 5 అగును.

అందువలన క.సా.గు $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 1200$

2.6.2 భాగహార పద్ధతిలో క.సా.గు.

ఈ పద్ధతిలో మనం క్రింది విధంగా క.సా.గు.ను నిర్ణయించ గలం.

- అన్ని సంఖ్యలను వేరు వేరుగా చేసి ఒక వరుసలో రాయవలెను.
- మనం ఒక మౌళిక లేక ప్రధాన సంఖ్యను నిర్ణయించవలెను. దాని ద్వారా వరుసలో గల సంఖ్యలలో తక్కువగా ఒక సంఖ్య భాగింపబడ వలెను.
- ఈ ప్రధాన సంఖ్య ద్వారా భాగింపబడిన తరువాత భాగఫలంను ఆ సంఖ్య క్రింద రెండవ వరుసలో రాయవలెను. ఏ సంఖ్య ఈ ప్రధాన సంఖ్యచే భాగింపబడలేదో వాటిని రెండవ వరుసలో అలానే రాయవలెను.
- ఇచ్చట మరియు తరువాత సోపానాలలో 2వ మరియు 3వ సోపానాల ప్రక్రియను ఉపయోగించి తరువాత వరుసను రాయవలెను. అన్ని స్థానాలలో 1 వచ్చును. అప్పుడు ఈ ప్రక్రియ పూర్తి అగును.
- ఈ విధంగా లభించిన అన్ని ప్రధాన భాజకాల లబ్దంను క.సా.గు. అందురు.

ఉదాహరణ-2 : 20,25,30 మరియు 40ల క.సా.గు. కనుగొనండి.

సాధన :

2	20,	25,	30,	40,
2	10,	25,	15,	20,
2	5,	25,	15,	10,
3	5,	25,	15,	5,
5	5,	25,	5,	5,
5	1,	5,	1,	1,
	1,	1,	1,	1,

తెలుసా ?
ప్రధాన భాజకాలను నిర్ణయించు-నపుడు వాటిని చిన్న నుండి పెద్దగా తీసుకున్నచో ప్రక్రియ సులువు అగును.

క.సా.గు $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 600$

ఉదాహరణ-3 : ఏ చిన్న సంఖ్యను 12,16,24 మరియు 36 ద్వారా వేరు వేరుగా భాగించిన భాగశేషం ప్రతీ సారి 7 వచ్చును.

సాధన : ఏ చిన్న సంఖ్యను 12,16,24 మరియు 36 ద్వారా భాగించిన ప్రతీ సారి భాగశేషం 0 వచ్చునో అది ఈ సంఖ్యల క.సా.గు. అగును. కనుక ఆ చిన్న సంఖ్య క.సా.గు కంటె 7 అధికం అగును.

12,16,24 మరియు 36 ల క.సా.గు. ఎంత అగును ? నిర్ణయించి చెప్పండి.

మీరు తప్పని సరిగా క.సా.గు. 144 పొందెదరు.

అందువలన ఆ చిన్న సంఖ్య = 144+7=151 అగును.

2.7. గ.సా.భా. మరియు క.సా.గు ల ధర్మాలు

- ఏవైనా సంఖ్యల యొక్క గ.సా.భా. ఆ సంఖ్యల మధ్యలో అన్నిటి కంటె చిన్న సంఖ్యతో సమానం లేక దాని కంటె తక్కువ అగును.
- ఏవైనా సంఖ్యల యొక్క క.సా.గు. ఆ సంఖ్యల మధ్యలో అన్నిటి కంటె పెద్ద సంఖ్యతో సమానం లేక దాని కంటె ఎక్కువ అగును.
- రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా. ద్వారా వాటి క.సా.గు. భాగింపబడును. అనగా సంఖ్యల క.సా.గు వాటి గ.సా.భాల గుణిజం అగును.
- ఒకవేల రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా. ఆ రెండు సంఖ్యల మధ్యలో ఏదైనా ఒక దానితో సమానం అయిన ఆ సంఖ్యల క.సా.గు. రెండవ సంఖ్యతో సమానం అగును.
- రెండు ప్రధాన సంఖ్యల క.సా.గు. ఆ రెండు సంఖ్యల లబ్దంతో సమానం.

పైన గల ప్రతీ ధర్మాన్ని ఋజువు చేయుటకు రెండేసి సంఖ్యలను తీసుకొని వాటి గ.సా.భా. మరియు క.సా.గు నిర్ణయించి పరీక్షించండి.

స్వయంగా చేసి చూడండి :

- ఏవైనా రెండు సంఖ్యలను తీసుకొని వాటిని మీ నోట్‌బుక్‌లో రాయండి.
- మీరు తీసుకున్న 2 సంఖ్యల యొక్క గ.సా.భా. నిర్ణయించండి.
- మీరు తీసుకున్న 2 సంఖ్యల యొక్క క.సా.గు. నిర్ణయించండి.
- మీకు లభించిన గ.సా.భా. మరియు క.సా.గు.ల లబ్దంను కనుగొనండి.
- ఇప్పుడు మీరు తీసుకున్న రెండు సంఖ్యల లబ్దం ఎంత అగునో నిర్ణయించండి.
- రెండు సంఖ్యల లబ్దంతో క.సా.గు. మరియు గ.సా.భా.ల లబ్దంనకు ఏ సంపర్కం గలదు ?
- అదే విధంగా మరి రెండు సంఖ్యలను తీసుకొని పై గల సోపానాలను రాయండి.

పై ప్రక్రియ ద్వారా మీరు తప్పని సరిగా తెలుసుకొనగలరు ఏమనగా -

క.సా.గు. x గ.సా.భా. = రెండు సంఖ్యల లబ్దం

చెప్పండి చూద్దాం :

- రెండు సంఖ్యల లబ్దం మరియు వాటి యొక్క క.సా.గు. ఇచ్చినచో రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా. నిర్ణయించ గలరా ? ఎలా ?

ఉదాహరణ-1 : రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా. 5 మరియు క.సా.గు. 280. ఒకవేల ఒక సంఖ్య 35 అయిన రెండవ సంఖ్య ఎంత ?

సాధన : క.సా.గు. X గ.సా.భా = 280X5=1400

∴ మొదటి సంఖ్య X రెండవ సంఖ్య = 1400

మొదటి సంఖ్య 35

∴ 35 X రెండవ సంఖ్య = 1400

అందువలన రెండవ సంఖ్య = 1400 ÷ 35 = 40

చెప్పండి చూద్దాం :
రెండు పరస్పర మౌళిక సంఖ్యల లబ్ధం 21 అయిన 2 సంఖ్యల క.సా.గు. ఎంత ?

ఉదాహరణ-2 : రెండు సంఖ్యల గుణఫలం 3000. ఒకవేల రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా. 10 అయిన క.సా.గు. నిర్ణయించండి.

సాధన : క.సా.గు X గ.సా.భా. = రెండు సంఖ్యల లబ్ధం

రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా. = 10, రెండు సంఖ్యల లబ్ధం = 300

∴ 10 x క.సా.గు = 3000

అందువలన క.సా.గు. = 3000 ÷ 10 = 300

అభ్యాసం 2.5

1. రెండు సంఖ్యల క.సా.గు 16 మరియు ఆ రెండు సంఖ్యల లబ్ధం 64 అయిన వాటి గ.సా.భా.ను కనుగొనండి.
2. మూడు సంఖ్యల లబ్ధం ఎల్లప్పుడు వాటి గ.సా.భా. మరియు క.సా.గుల లబ్ధంతో సమానం అగునా ?
3. రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా. మరియు క.సా.గు వరుసగా 13 మరియు 1989. అందులో ఒక సంఖ్య 117 అయిన రెండువ సంఖ్య ఎంత ?
4. రెండు సంఖ్యల గ.సా.భా. 14 మరియు క.సా.గు 204 అవుతుందా ? కారణంతో సహ సమాధానం రాయండి.
5. ఒక విద్యాలయంలో ఆరవ తరగతిలో రెండు సెక్షన్‌లు గలవు. ఆ రెండు A మరియు B. A సెక్షన్‌లో విద్యార్థులు ప్రతీ 22 దినముల కొకసారరి పోటీలు నిర్వహించెదరుఅ. B సెక్షన్‌లో గల విద్యార్థులు ఈ పోటీలను 36 దినముల కొకసారి నిర్వహించెదరు. రెండు సెక్షన్లు సంవత్స ఆరంభంలో మొదటి దినం పోటీలను నిర్వహించెదరు. ఇచ్చట అతి తక్కువ దినములను నిర్ణయించండి, ఎన్ని దినముల తరువాత రెండు సెక్షన్లు పోటీలను ఒకే దినం జరుగును.
6. 10,000లకు దగ్గరగా గల రెండు సంఖ్యలను తీసుకొనుము. అవి 2,3,4,5,6 మరియు 7 ప్రతి సంఖ్యతో సంపూర్ణంగా భాగింపబడును.

మూడవ అధ్యాయం

జ్యామితిలో ప్రాథమిక భావనలు

3.1 పరిచయం

మనం ముందు తరగతిలో అనేక రకాలయిన (సమతల వస్తువులు) లేక ద్విమాత్రిక బొమ్మలుతో పరిచయం అయ్యాం. త్రిభుజం దీర్ఘచతురస్రం మరియు సమచతురస్రం వంటి సమతల బొమ్మల శీర్షబిందువు, భుజము మరియు కోణము మొదలైన వాటి గూర్చి తెలుసుకున్నాం. కొన్ని రకాలైన త్రిమాత్రిక ఆకృతుల వరుసగా సమఘనం మరియు దీర్ఘఘనంలతో పరిచయం అయ్యాం.

వృత్తం వంటి వక్రరేఖ ద్వారా ఏర్పడిన బొమ్మలతో సహ పరిచయంతో పాటు దీని కేంద్రం, వ్యాసార్థం మరియు వ్యాసంలను గూర్చి తెలుసుకున్నాం.

వివిధ కొలత గల కోణాల వర్గీకరణ మరియు త్రిభుజంల వర్గీకరణ గూర్చి కూడా తెలుసుకున్నాం. రండి వాటిని గూర్చి తెలుసుకుందాం.

అభ్యాసం 3.1

1. ఒక త్రిభుజంను నిర్మించి పేరు పెట్టండి. దాని యొక్క శీర్షబింధువు, కోణం మరియు భుజముల పేర్లు రాయండి.
2. వృత్తంలో దాని వ్యాసార్థం మరియు కేంద్రంను చూపించండి.
3. క్రింది కొలతల ననుసరించి కోణాలను సూక్ష్మకోణం, పరుకోణం మరియు స్థూలకోణాలుగా వేరు చేసి రాయండి.
   $30^0, 175^0, 90^0, 45^0, 89^0, 115^0, 95^0, 20^0$

3.2 జ్యామితిలో కొన్ని ప్రాథమిక భావనలు.

అధునిక యుగంలో చేయబడుతున్న నిర్మాణ పనులు అనగా ఆనకట్ల నిర్మాణం, కర్మాగారాల నిర్మాణం, శిల్పాగారాల నిర్మాణం మొదలైన వాటితో పాటు భూమి కొలత మరియు వేరే త్రిమాత్రిక వస్తువుల వైశాల్యం కూడా జ్యామితితో కూడి ఉన్నది. వీటి కోసం జ్యామితిని విస్తృతం చేయబడింది.

తెలుసా ?
జ్యామితి గణిత శాస్త్రంలో ఒక ముఖ్యభాగం. జ్యామితి అనగా జ్యా మరియు మితి అనే రెండు పదాల ద్వారా ఏర్పడినది. జ్యా అనగా భూమి మరియు మితి అనగా వైశాల్యం (కొలత) దీని వలన తెలిసినది ఏమనగా భూకొలత సంబంధించిన ఆలోచన నుండి జ్యామితి ఏర్పడినది.

దైనందిన జీవితంలో మనం ఉపయోగించే ఇల్లు, బట్టలు, వస్తువులు లేక అన్ని నిర్మాణాల విషయంలో జ్యామితికి సంబంధించిన జ్ఞానం మనకు సహాయం చేయును. పిల్లలకు జ్యామితికి విషయాల భావనలు తెలుపుటకు ఎల్లప్పుడు స్థూల వస్తువుల భావనలు నుండి ఆరంభించి సూక్ష్మ జ్యామితికి విషయాల భావనలు తెలుపుటకు ప్రయత్నం జరిగింది.

3.2.1. బిందువు :

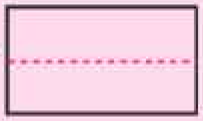
పెన్ లేక పెన్సిల్ చివరి సహాయంతో కాగిత తలంపై ఒక చుక్కను పెట్టండి. దానిని మనం ఒక బిందువు అని అందుము. మైదానంలో గోల్‌పొష్టను పాతుటకు ఆటల ఉపాధ్యాయుడు ఏ గుర్తు పెట్టునో దానిని ఒక బిందువు అందుమా లేక కాదో ఆలోచించండి. తోటలో (చెట్టును) మొక్కను ఎక్కడ పాతవలెనో ఆ స్థానము గుర్తించుటకు ఏ గుర్తును పెట్టెదమో దాని బిందువు అందుమా లేక కాదో ఆలోచించండి.

సుద్దముక్కతో ఉపాధ్యాయుడు బ్లాక్ బోర్డుపై ఏ ఆకారం చుక్క పెట్టి బిందువు అని చెప్పునో, మీ నోట్‌బుక్‌లో మీరె ఆ ఆకారంలో బిందువును చూపించినచో ఉపాధ్యాయుడు దాని ఇష్టపడడు ఎందుకు ? (అడిగి తెలుసుకోండి)

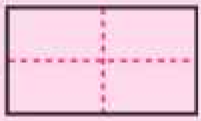
జ్యామితీయ భావనలు ఆలోచన చేయుటకు ఒక బిందువు ఆకారం ఎంత పెద్దదో ఆ విషయం గూర్చి తెలుసుకొనుట అవసరం లేదు. బిందువు గూర్చి ఏ తెలుసునో దాని గూర్చి జ్యామితిలో ఏ విధంగా ఉపయోగించగలమో దానిని తరువాత తెలుసుకుందాం.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- ఒక కాగితంను తీసుకొని బొమ్మలో చూపినట్లుగా నిలువుగా మడత పెట్టండి.



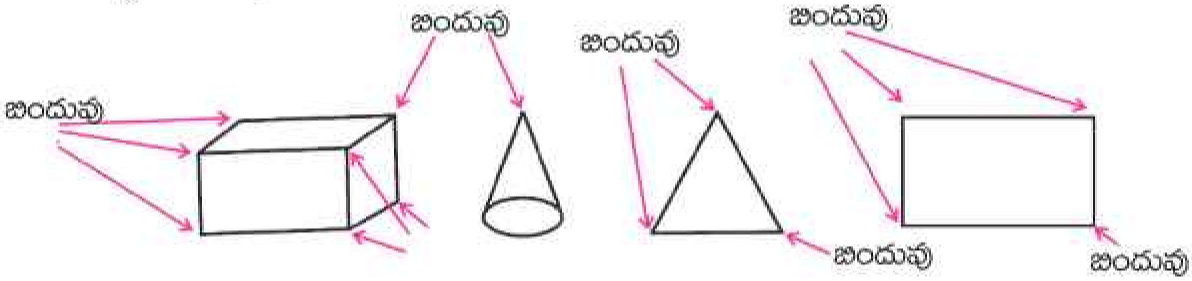
- దీనిని తరువాత అడ్డంగా మడత పెట్టండి.
- మడత పెట్టిన రెండు భాగాలు పరస్పరం ఎక్కడ ఖండించునో ఆ స్థానం ఒక బింధువును చూపించును. ప్రతీ మడత ఒక సరళరేఖ వలె కనిపించును.



- దీని వలన మనం తెలుసుకున్నాం,

రెండు సరళ రేఖల ఖండన బిందువును ఒక బిందువు అందురు.

మనం ఎచ్చట బిందువులను చూడగలం ?

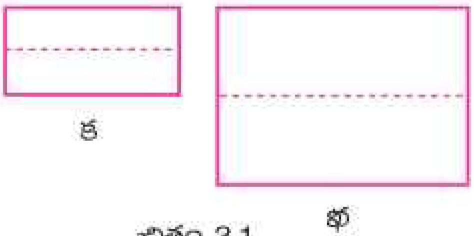


ఒక దీర్ఘఘనంలో ప్రతీ శీర్షం ఒక బిందువు అగును. ఒక కోన్‌లో ఒక శీర్షం ఒక బిందువు అగును. ఒక త్రిభుజం లేక ఒక దీర్ఘచతురస్రంలో ప్రతీ శీర్షం కూడా ఒకొక్క బిందువు అగును.

మీ చుట్టుప్రక్కల ఎచ్చటెచ్చట బిందువులను చూస్తున్నారో రాయండి.

3.2.2. సరళరేఖ

ప్రక్కన గల చిత్రం 3.1 (క)లో ఒక చిన్న కాగితంను మడతపెట్టి దానిపై ఒక గుర్తును పెట్టడమైనది. అదే విధంగా చిత్రం 3.1 (ఖ)లో ఒక పెద్ద కాగితంపై కూడా ఒక గుర్తును ఉంచడమైనది. దీనివలన తెలిసినది ఏమనగా కాగితం ఎంత పెద్దగా ఉండునో దానిపై గుర్తు కూడా అంత పెద్దది అగును.



చిత్రం 3.1

అనుకుందాం, ఒక పెద్ద కాగితం గలదు. దాని పొడవును మనం కొలవలేం. ఆ కాగితం మడత పెట్టినచో దానివలన ఏర్పడిన గుర్తును మనం ఎక్కడ అంతం అగునో చెప్పలేం. అటువంటి గుర్తును ఈ క్రింది బిందువుగా చూపించగలం.

చిత్రం 3.2

ఇచ్చట గల ప్రతీ బిందువు గుర్తు చిత్రం యొక్క అనంత పొడవునకు చూపిస్తుంది. చిత్రం 3.2లో చూపించిన చిత్రంను మనం ఒక సరళరేఖ అని చెప్పగలం.

3.2.3. సరళరేఖ మరియు బిందువుల మధ్య సంబంధము

అ సంఖ్య బిందువుల సమూహంతో ఒక సరళరేఖ ఏర్పడునని మనం తెలుసుకున్నాం. రెండు బిందువులను ఉపయోగించి ఒక సరళరేఖకు పేరు పెట్టగలం. చిత్రం 3.3లో గల సరళరేఖపై గల రెండు బిందువులు A మరియు B గా పేరు పెట్టడం జరిగింది. ఇచ్చట సరళరేఖకు AB సరళరేఖ అని పేరు పెట్టగలం. సరళరేఖ AB కు గుర్తుగా $\overleftrightarrow{AB}$ అని రాయవచ్చును.

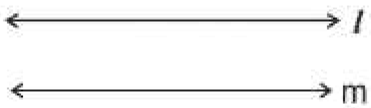
చిత్రం 3.3

చిత్రం 3.4

చిత్రం 3.4లో గల సరళరేఖపై మూడు బిందువులకు A,B,C లుగా రాయడం జరిగింది. మరియు ఈ విషయంలో సరళరేఖకు AB సరళరేఖ లేక $\overleftrightarrow{AB}$ ఇంకా AC సరళరేఖ లేక $\overleftrightarrow{AC}$ ఇంకా BC సరళరేఖ లేక $\overleftrightarrow{BC}$ గా రాయవచ్చును.

సరళరేఖ రెండు వైపుల అనంతంగా ఉండుటచే దానిని సూచించుటకు దీని రెండు వైపుల బాణం గుర్తులను పెట్టడం జరుగును. అనేక సమయాలలో ఆంగ్లేయ చిన్న అక్షరాలను రాసి కూడా ఒక సరళరేఖను పేరు పెట్టడం జరుగును.

ఆ విధంగా చిత్రం 3.5లో చూపించడమైనది. చిత్రములలో ఒక దానిని l రేఖ మరియు వేరే దానిని m రేఖగా పేరు పెట్టడం జరిగింది.

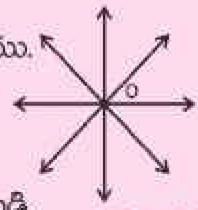


తెలుసునా ?

సరళరేఖను మనం రేఖ అని కూడా అంటాం. సరళ లేక తిన్నగా లేని రేఖను వక్రరేఖ అందురు. వక్రరేఖ యొక్క కొన్ని నమూనాలు ఈ క్రింద చూపించడమైనది.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- మీ నోట్‌బుక్‌లో ఒక పేపరుపై ఒక బిందువును గుర్తించి దాని పేరు '0' పెట్టుము.
- 0 బిందువు నుంచి ఒక సరళరేఖను నిర్మించుము.
- 0 బిందువు గుండా వేరొక సరళరేఖను నిర్మించగలమా ?
- ఒకవేల నిర్మించగలిగినచో 0 బిందువు గుండా వేరొక సరళరేఖను నిర్మించండి.
- 0 బిందువు గుండా రెండు సరళరేఖలను నిర్మించిన తరువాత ఆ బిందువు నుండి ఒకవేల మరికొన్ని సరళరేఖలు నిర్మించ గలగినచో నిర్మించండి. ఇప్పుడు మీరు చిత్రం 3.6 వంటి చిత్రంను పొందగలరు.
- ఇప్పుడు చెప్పండి, ఒక బిందువు గూండా ఎన్ని సరళరేఖలను నిర్మించగలం ?



చిత్రం 3.6

ఈ పని వలన మనం ఏం తెలుసుకున్నాం ?

- **ఒక బిందువు గూండా అసంఖ్య సరళరేఖలను నిర్మించగలం.**
- **ఒక బిందువు గూండా మూడు లేక అధిక సరళరేఖలు నిర్మించిన వాటిని ఒకే బిందు సరళరేఖలు అందురు.**

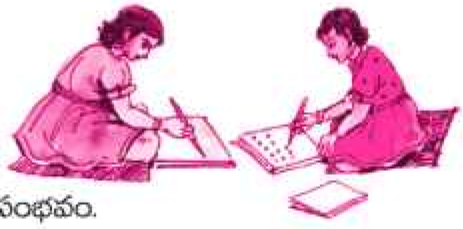
స్వయంగా చేసి చూడండి

- మీ నోట్‌బుక్‌లో A మరియు B రెండు వేరు వేరు బిందువులను పెట్టుము. A బిందువు మధ్య నుండి కొన్ని సరళరేఖలను నిర్మించుము.
- A బిందువు గూండా నిర్మించిన సరళరేఖల మధ్యలో ఏదైనా రేఖ B గూండా నిర్మించ గలిగారా ?
- రెండు వేరు వేరు బిందువుల గూండా ఎన్ని సరళరేఖలను నిర్మించగలం ?

మనం తెలుసుకున్నాం, ఒక సమతలంపై గల రెండు వేరు వేరు బిందువుల గూండా కేవలం ఒకే సరళరేఖను నిర్మించగలం. ఈ కారణం వలన ఒక సరళరేఖకు దీనిపై గల రెండు బిందువుల ద్వారా పేరు పెట్టడం జరుగును.

మీ నోట్‌బుక్‌లో గల ప్రతీ పుట ఒకొక్క సమతలం, ఇటుకల గోడ, టేబుల్ యొక్క బల్ల మొదలైనవి సమతలాలు అగును. భూమి గోళాకారం అయినా కూడా దీని యొక్క విశాలమైన తలం యొక్క ఒక చిన్న భాగాన్ని మనం చూడడం వల్ల ఇది మనకు ఒక సమతలం వలె కనిపిస్తుంది. అందువలన మీ ఆటస్థలం మీకు ఒక సమతలం వలె కనిపిస్తుంది. రండి ఈ క్రింది నిచ్చిన పనిని చేద్దాం.

- మీ నోట్‌బుక్‌లో ఒక పుటపై బిందువులను గుర్తించండి. మీరు తప్పనిసరిగా అనేక బిందువులను గుర్తించుదురు.
- మీ దగ్గర కూర్చొన్న పిల్లవాని నోట్‌బుక్‌తో మీ నోట్‌బుక్‌ను సరిచూడండి. ఎవరి నోట్‌బుక్‌లో అధిక బిందువులు గలవు ?
- సీమ తన నోట్‌బుక్ మరియు రాను యొక్క నోట్‌బుక్‌ను చూసి చెప్పెను -



మా ఇద్దరి నోట్‌బుక్‌లో గల బిందువులను లెక్కించుట అసంభవం.

సీమ చెప్పెను- రాను, మీ నోట్‌బుక్‌లో ఇంకా అధికంగా బిందువులను పట్టగలవా ?

రాను చెప్పెను- ఇంకా అనేక బిందువులను పెట్టగలం. ఈ పిరియడ్ అయిపోయిన కూడా అనేక బిందువులను పెట్టుటకు ఖాళీ స్థలం ఉండును.

మనం తెలుసుకున్నాం, ఒక సమతలంపై అసంఖ్య బిందువులు ఉండును.

స్వయంగా చేసి చూడండి

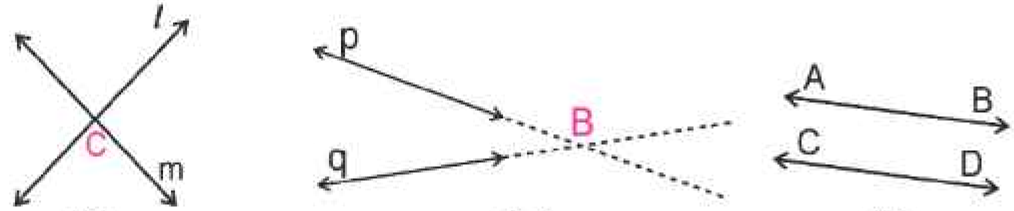
- మీ నోట్‌బుక్‌లో ఒక పుటలో స్కేలును ఉపయోగించి కొన్ని సరళరేఖలను నిర్మించండి.
- ఒకదాని తరువాత ఒకటి ఎన్ని నిర్మించగలరో నిర్మించండి.
- మీరు మరియు మీ స్నేహితుడు సమాన సంఖ్య గల సరళరేఖలను నిర్మించారా ?
- మీ తరగతిలో పిల్లలందరు సమాన సంఖ్యలో సరళరేఖలను నిర్మించారా ?
- ఇంకా అధికంగా సరళరేఖలను నిర్మించగలమా ?
- దీని వలన మనం ఏం తెలుసుకున్నాం ?

ఒక సమతలంపై అ సంఖ్య సరళరేఖలు ఉండును.

3.3 ఒక సమతలంపై గల రెండు సరళరేఖలు.

మనకు ముందుగా తెలుసు ఒక సమతలంపై అనేక సరళరేఖలు ఉండును. వాటిలో ఏవైనా రెండు సరళరేఖలను తీసుకొని వాటిలో ఏఏ పరిస్థితులు ఏర్పడునో వాటిని చూద్దాం.

క్రింది చిత్రం 3.7ను చూడండి.



(క) (ఖ) (గ)

చిత్రం - 3.7

చిత్రం-3.7ను పరిశీలించండి :

క) చిత్రంలో l మరియు m సరళరేఖలు రెండు పరస్పరం C బిందువు వద్ద ఖండించెను. C బిందువు l మరియు m రెండు సరళరేఖలపై గలదు. అందువలన a కు a మరియు a రేఖల సాధారణ బిందువు లేక ఖండన బిందువు అందురు.

ఖ) చిత్రంలో p మరియు q సరళరేఖలు రెండు కూడా సాధారణ బిందువు A వద్ద ఖండించెను. ఈ విధమైన రేఖలను పరస్పరం ఖండన రేఖలు అందురు.

గ) చిత్రంలో గల సరళరేఖలు $\overleftrightarrow{AB}$ మరియు $\overleftrightarrow{CD}$ రెండు సరళరేఖలను ఎంత పొడిగించిన కూడా అవి పరస్పరం ఖండించలేవు. ఈ విధమైన రెండు రేఖలను (సాధారణ బిందువు లేని) సమాంతర సరళరేఖలు అందురు.

మనం తెలుసుకున్నాం.

ఒక సమతలంపై గల రెండు సరళరేఖలు కేవలం ఒక బిందువు వద్ద మాత్రమే ఖండించును. అనగా వాటికి ఒకే సాధారణ బిందువు ఉండును లేక సరళరేఖలు పరస్పరంగా ఖండించవు. ఆ సరళరేఖలను సమాంతర రేఖలు అందురు.

✎ మీ చుట్టు ప్రక్కలందు ఏఏ వస్తువులందు మీరు సమాంతర సరళరేఖలను చూస్తున్నారో రాయండి.

3.4 ఒకే సరళరేఖ బిందువులు

(క) చిత్రం - 3.8 (ఖ)

ముందు మనకు తెలుసు ఒక సమతలంపై గల రెండు బిందువుల మధ్య గూండా కేవలం ఒకే సరళరేఖను నిర్మించగలం మరియు ఈ సరళరేఖ సంపూర్ణంగా ఆ సమతలంపై ఉండును.

మనం ప్రస్తుతం ఈ కాగితపు సమతలంపై గల మూడు బిందువులు A,B మరియు C గూర్చి ఆలోచిద్దాం. A మరియు B రెండు బిందువుల గూండా మనం తప్పని సరిగా ఒక సరళరేఖను నిర్మించగలం మరియు అది సరళరేఖ l అగును.

చిత్రం 3.8 (క) లో C బిందువు *l* రేఖపై ఉంచుటను మనం చూస్తున్నాం. కాని చిత్రం 3.8 (ఖ)లో C బిందువు *l* రేఖపై లేదు.

క) చిత్రంలో గల బిందువులు A,B మరియు C ఒకే రేఖపై గలవు. అందువలన వీటిని ఒకే రేఖ బిందువులని అందురు.

ఖ) చిత్రంలో గల బిందువులు A,B మరియు C ఒకే రేఖపై లేవు. అందువలన వీటిని ఒకే రేఖపై లేని బిందువులు అందురు.

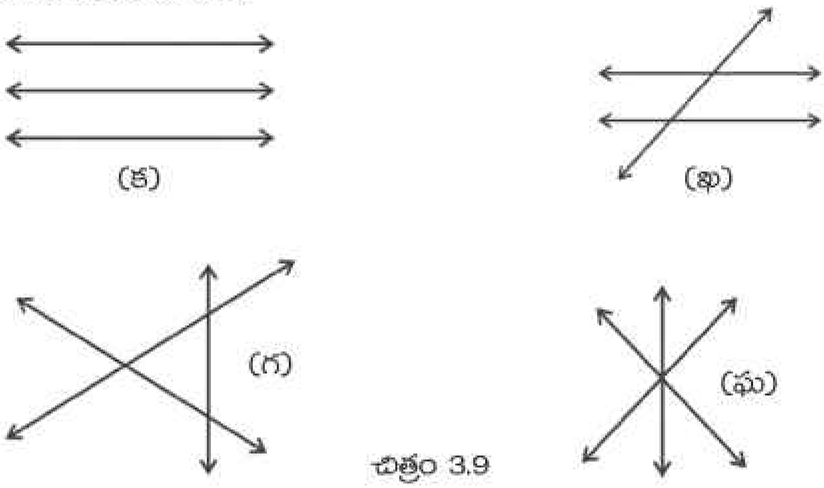
మనం తెలుసుకున్నాం -

ఒక సమతలంపై గల మూడు లేక అధిక బిందువులు ఒకే రేఖపై ఉన్నచో వాటిని ఏకరేఖీయ లేక ఒకే రేఖ బిందువులు అందురు. ఏ బిందువులు ఏక రేఖీయ కావో వాటిని ఏక రేఖీయ కాని బిందువులు అందురు.

ఒక కాగితంపై గల మూడు బిందువులు (లేక అధికం) ఏకరేఖీయ లేక లేకరేఖీయ కావు అని ఎలా తెలుసుకోగలం ? బిందువులలో ఏవైనా రెండుల బిందువుల గుండా స్కేలు సహాయంతో ఒక సరళరేఖను నిర్మించండి. ఒకవేల అన్ని బిందువులు ఆ రేఖపై ఉంచుట చూడగలిగినచో వాటిని లేక రేఖీయ బిందువులు అందురు. ఒకవేల ఏదైనా ఒక బిందువు రేఖకు వెలువల ఉన్నచో వాటిని ఏకరేఖీయ కాని బిందువులు అందురు. ఆకాశంలో చంద్రుడు లేని సమయంలో మీరు సప్తర్షి మండలంను చూసి ఉంటారు. ఆ ఏడు నక్షత్రాల మధ్యలో క్రతు మరియు పులహ లకు కలిపిన రేఖ ధృవతార మధ్య గూండా కూడా వెల్లి ఉండును. అందువలన క్రతు, పులహ మరియు ధృవతారల ఏక రేఖీయ పారలు అగును.

3.5 ఒకే సమతలంపై గల మూడు లేక అంతకంటె ఎక్కువ సరళరేఖలు -

చిత్రం 3.9ను పరిశీలించండి.



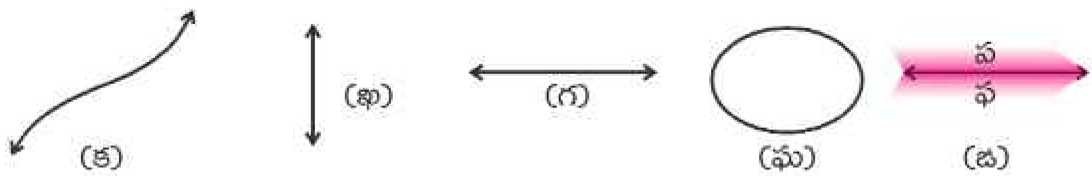
చిత్రం 3.9

ముందు మనం తెలుసుకున్నాం, ఒక సమతలంపై గల రెండు సరళరేఖలు అయితే పరస్పరం ఖండించును లేక పరస్పరం సమాంతరం అగును. చిత్రం 3.9(క)లో గల మూడు సరళరేఖలు పరస్పరం సమాంతరం.

గుర్తుంచండి - రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం అవి ఎక్కువగా ఒక బిందువు వద్ద ఖండించును. పరస్పరం ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించిన ఆ రెండు సరళరేఖలను పరస్పర ఖండన సరళరేఖలు అందురు.

అభ్యాసం 3.2

1. మీ నోట్‌బుక్‌లో మూడు బిందువులను గుర్తించి వాటిని పేర్లు పెట్టుము.
2. రెండు సరళరేఖలను నిర్మించి వాటికి పేర్లు పెట్టుము.
3. మీ చుట్టుప్రక్కల కనిపిస్తున్న మూడు సరళరేఖలు, మూడు వక్రతలాలు మరియు మూడు సమతలాలకు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.
4. ఈ క్రింది బొమ్మలో గల గీతలలో ఏవి సరళరేఖలు మరియు ఏవి వక్రరేఖలు గుర్తించండి.



పరిశీలించండి : చిత్రం (ఙ)లో గల రేఖ పుస్తిక తలంనకు రెండు భాగాలుగా చేసెను. అవి ప మరియు ఫ గా పేరు పెట్టడం జరిగింది. ప్రతీ భాగాన్ని రేఖ యొక్క పార్శ్వం అందురు.

5. మీ నోట్‌బుక్‌లో ఒక బిందువును గుర్తించండి మరియు దాని మధ్య గుండా ఏడు సరళరేఖలను నిర్మించండి. ఆ బిందువు గూండా ఇంకెన్ని సరళరేఖలను నిర్మించగలం ?
6. మీ నోట్‌బుక్‌లో A మరియు B ఒ అను రెండు బిందువులను తీసుకొండి. రెండు బిందువులను కలుపుతూ సరళరేఖను నిర్మించండి. ఈ విధంగా ఎన్ని సరళరేఖలను నిర్మించగలం ?

7.క) సాదారం బిందువు గల రెండు సరళరేఖలను నిర్మించండి. ఆ రెండు సరళరేఖలను పేర్లు పెట్టండి. సాధారణ బిందువు పేరు P పెట్టండి.

ఖ) మీ నోట్‌బుక్‌పై ఏవైనా ఏడు బిందువులను తీసుకొండి. వాటికి పేర్లు పెట్టండి. అవి సరళరేఖీయ బిందువులు అగునా ? ఎలా తెలిసింది ?

8. ఒక సమతలంపై గల మూడు సరళరేఖలు పరస్పరం అవి తక్కువగా ఎన్ని బిందువుల వద్ద ఖండించును ? అవి ఎక్కువగా ఎన్ని బిందువుల వద్ద ఖండించును ?
9. స్కేలును ఉపయోగించి రెండు సరళరేఖలను నిర్మించండి. అవి పరస్పరం సమాంతరంగా ఉండును.

10. ఈ క్రింది వాక్యములలో సరియైన వాక్యములను ఎంచి రాయండి.

క) రేఖ అనగా మనం కేవలం సరళరేఖ అని అనుకుంటాం.

ఖ) ఒక బిందువు మధ్య గుండా అసంఖ్య సరళరేఖలను నిర్మించగలం.

గ) ఒక సమతలంలో గల రెండు బిందువుల మధ్య గుండా అనేక సరళరేఖలను నిర్మించగలం.

ఘ) ఒక సమతలంలో గల ఒక బిందువు మధ్య నుండి కేవలం ఒకే సరళరేఖను నిర్మించగలం.

ఙ) ఒక సమతలంలో గల రెండు బిందువులను కలిపి ఒకే సరళరేఖ నిర్మాణం జరుగును.

చ) ఒక సమతలంపై గల రెండు అసమానంతర సరళరేఖల పరస్పరం ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించును.

ఛ) రెండు సమాంతర సరళరేఖలకు ఖండన బిందువు ఉండదు.

3.6 కిరణం మరియు రేఖాఖండం

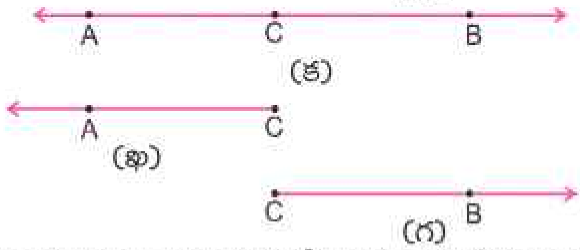
మీరు సరళరేఖ గూర్చి అనేక విషయాలు తెలుసుకున్నారు. ప్రస్తుతం ఒక సరళరేఖ యొక్క వివిధ భాగాలలో ఏర్పడిన చిత్రముల గూర్చి తెలుసుకుందాం.

3.6.1 కిరణం (రశ్మి)

క్రింది గల చిత్రం 3.10 (క)లో $\overleftrightarrow{AB}$ రేఖపై C బిందువు గలదు. C బిందువు A మరియు B మధ్యలో గలదు.

చిత్రం (ఖ)లో C బిందువు సహ C నుండి A వైపుకు గల $\overleftrightarrow{AB}$ యొక్క భాగమును వేరుగా చూపించడమైనది అదే విధంగా చిత్రం (గ)లో C బిందువు సహ C నుండి B వైపుకు గల $\overleftrightarrow{AB}$ భాగమును వేరుగా చూపించడమైనది.

చిత్రం (ఖ) మరియు చిత్రం (గ)లో చూపించిన $\overleftrightarrow{AB}$ యొక్క రెండు భాగములను కిరణము లేక రశ్మి అందురు.



చిత్రం (ఖ)లో చూపించిన కిరణంను CA కిరణం మరియు చిత్రం (గ)లో చూపించిన కిరణంను CB కిరణం అని పేరు పెట్టుదురు.

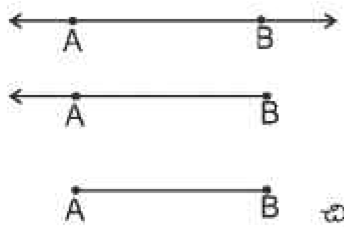
CA కిరణంను సంకేతం లేక గుర్తుగా $\overrightarrow{CA}$ అని, A కిరణంను గుర్తుగా A అని రాయుదురు $\overrightarrow{CA}$ యొక్క C బిందువును ఆ కిరణం యొక్క మూల బిందువు C ఆద్య బిందువు, ఆరంభ బిందువు లేక శీర్ష బిందువు అని అందురు.

కిరణం దాని యొక్క ఆద్య బిందువు నుండి ఆరంభమై ఒక వైపునకు అనంతరంగా పావును. $\overrightarrow{CA}$ మరియు $\overrightarrow{CB}$ లను పరిశీలించండి. ఆ రెండింటిని పరస్పరం వ్యతిరేక కిరణాలు అని అందురు.

వ్యతిరేక రశ్మిలు $\overrightarrow{CA}$ మరియు $\overrightarrow{CB}$ ల సమీపంతో $\overleftrightarrow{AB}$ ఏర్పడును.

> తెలుసా ?
> రెండు వ్యతిరేక రశ్మిలు కలిసి ఒక సరళరేఖను ఏర్పరుచును.
> $\overrightarrow{CA}$ నకు $\overrightarrow{AC}$ మరియు $\overleftarrow{AC}$ వలె రాయలేము.

3.6.2 రేఖాఖండము



చిత్రం 3.11

చిత్రం 3.11 (క)లో $\overleftrightarrow{AB}$ యొక్క చిత్రంను చూస్తున్నారు. ఒకవేల B బిందువు నుండి కుడివైపు గల $\overleftrightarrow{AB}$ యొక్క భాగమును ఆర్పినచో అప్పుడు మనం $\overleftrightarrow{AB}$ యొక్క మిగిలిన భాగం ఏ విధంగా కనిపించునో దానిని చిత్రం (ఖ)లో చూపించడమైనది. మీకు తెలుసు ఇది ఒక BA కిరణం అగును.

ప్రస్తుతం BA కిరణం యొక్క A బిందువు నుండి ఎడమవైపు గల భాగాన్ని ఆర్పినచో అప్పుడు $\overrightarrow{BA}$ యొక్క ఏ భాగం ఉండునో అది చిత్రం (గ)లో చూపించడమైనది. చిత్రం (గ)లో $\overleftrightarrow{AB}$ యొక్క ఏ భాగము చూస్తున్నారో దానిని ఒక రేఖాఖండం అని అందురు. ఈ రేఖాఖండాన్ని AB రేఖాఖండంగా పేరు పెట్టబడును. సంకేతంలో AB రేఖాఖండాన్ని $\overline{AB}$ గా రాయవచ్చును.

A మరియు B బిందువులను $\overline{AB}$ యొక్క చివరి బిందువులు అందురు. చిత్రం 3.11లో A మరియు B చివరి బిందువులు గల $\overline{AB}$ (లేక AB రేఖాఖండం) చూస్తున్నారు. స్కేల్‌ను ఉపయోగించి A నుండి B వరకు గల దూరంను కొలిచినచో ఏ కొలత వచ్చునో దానిని AB యొక్క పొడవు అందురు. మనం తెలుసుకున్నాం -

ఒక రేఖాఖండం యొక్క పొడవు అనగా దాని చివరి బిందువుల మధ్య గల దూరం.

తెలుసా ?

రేఖాఖండం $\overline{AB}$ యొక్క పొడవును AB గా రాయవచ్చును. అనగా $\overline{AB}$ వలె పైన గీత రాయరాదు.

$\overline{AB}$ రేఖాఖండం AB యొక్క సంకేతం.

AB రేఖాఖండం AB యొక్క పొడవు సంకేతం.

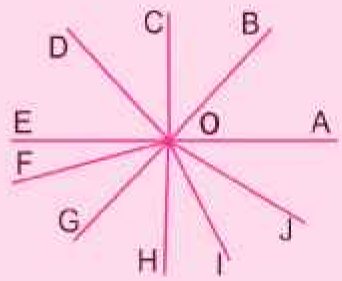
ఒకవేల 5 సెం.మీ. పొడవు AB నిర్మించినచో, దానిని ఇలా రాయవచ్చును.

$\overline{AB}$ యొక్క పొడవు=5 సెం.మీ.

లేక AB =5 సెం.మీ.

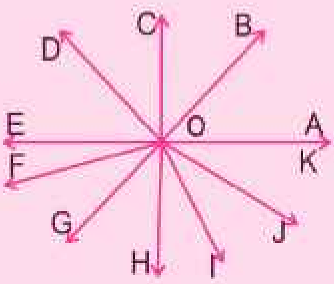
స్వయంగా చేసి చూడండి :

- మీ నోట్‌బుక్‌లో ఒక పేజీపై ఒక బిందువును పెట్టండి మరియు దాని పేరు 'O' పెట్టండి.
- 'O' నకు ఒక చివరి బిందువుగా తీసుకొని ఎన్ని రేఖాఖండాల నిర్మించగలరో నిర్మించండి.
- నిర్మించిన రేఖాఖండాలను లెక్కించి ఎన్ని రేఖాఖండాలు నిర్మించారో చెప్పండి.
- ప్రతీ రేఖాఖండం చివరను పేర్లు A,B,C.....J. ప్రస్తుతం ఒక సాధారణ చివరి బిందువు గల 10 రేఖాఖండాలు మీరు పొందిరి (చిత్రం 3.12 (క) వలె) మరియు ప్రతీ రేఖాఖండం O కాకుండా వేరే చివరి బిందువు వద్ద బాణపు గుర్తు పెట్టుము.



చిత్రం 3.12 (క)

- ప్రస్తుతం ముందు చిత్రంలో గల రేఖాఖండముల చిత్రముల కిరణములు చిత్రముల వలె మార్పు చెందును. అవి చిత్రం 3.12 (7) వలె కనిపించును.
- A కు శీర్షబిందువు వలె తీసుకొని ముందు వలె ఇంకా ఎక్కువ కిరణములు నిర్మించ గలమా ?
- తప్పని సరిగా ఇంకా అధిక కిరణములను నిర్మించ గలము.



చిత్రం - 3.12 (ఖ)

మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం ? ఏ విధంగా అయితే ఒక బిందువు గూండా అసంఖ్యాక సరళ రేఖలు నిర్మించ గలమో, అదే విధంగా ఒక సాధారణ శీర్ష బిందువు నుండి అసంఖ్యాక కిరణములను నిర్మించగలము. అనగా ఒక సాధారణ శీర్ష బిందువు ఉన్నచో అసంఖ్యాక కిరణాలను నిర్మించుట సంభవం అగును.

స్వయంగా చేసి చూడండి :

- నోట్‌బుక్‌లో ఒక కాగితంపై ఒక సరళరేఖను నిర్మించుము. దానిపై A,B మరియు C మూడు బిందువులను గుర్తించుము. $\overline{B}$ బిందువు A మరియు C ల మధ్య ఉండును.
- ఇప్పుడు $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ మరియు $\overline{AC}$ ల పొడవును కొలవండి.
- ఈ విధంగా మరో మూడు వేరు వేరు చిత్రములను నిర్మించి $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ మరియు $\overline{AC}$ లను కొలవండి.
- ప్రక్క పట్టిక వలె ఒక పట్టికను తయారు చేసి అందులో కొలిచిన కొలతలను రాయండి.

బొమ్మ పేరు	AB	BC	AC
ఒకటవ			
రెండవ			
మూడవ			
నాల్గవ			

మీరు పూరించిన పట్టిక నుండి ఏమి పరిశీలించారు ?

ఒక సరళరేఖలో గల మూడు బిందువుల A, B, C మధ్యలో B బిందువు A మరియు C ల మధ్య బిందువు అయినచో AB+BC=AC అగును.

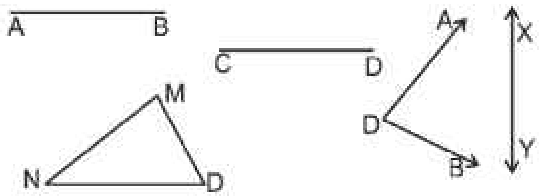
గుర్తుంచండి : ఒక సరళరేఖలో గల మూడు బిందువులు A,B మరియు C మధ్యలో B బిందువు A మరియు C ల యొక్క మధ్య బిందువు అయినచో మనం రాయగలం. : A-B-C

ఈ విధంగా రాసి ఉన్నచో మనం చదవగలం B బిందువు A మరియు C రెండు బిందువుల మధ్య ఉండును.

అభ్యాసం 3.3

1. ప్రక్క బొమ్మలో గల సరళరేఖ, రేఖాఖండం మరియు కిరణముల యొక్క పేర్లు క్రింది పట్టిక వలే ఒక పట్టికను తయారు చేసి అందులో పూరించండి.

సరళరేఖ	రేఖాఖండం	కిరణం

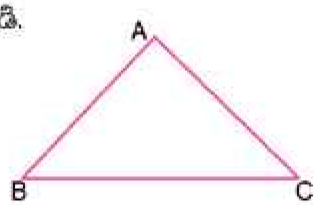


2. మీ నోట్‌బుక్‌లో మూడు రేఖాఖండాలు $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ మరియు $\overline{EF}$ నిర్మించండి. ప్రతీ దాని పొడవు మొదట కేవలం స్కేలు సహాయంతో కొలిచి క్రింది పట్టిక వలే ఒక పట్టికను చేసి దానిలో రాయండి.

రేఖాఖండం పేరు	కేవలం స్కేలు సహాయంతో పొందిన పొడవు	డివైడర్ మరియు స్కేలు సహాయంతో లభించిన పొడవు
$\overline{AB}$		
$\overline{CD}$		
$\overline{EF}$		

3.క) ప్రక్కన గల త్రిభుజం యొక్క పేరేమిటి ?

ఖ) ఏ మూడు రేఖాఖండాల ద్వారా త్రిభుజం ఏర్పడెనో వాటి పేర్లు రాయండి.



గ) స్కేలు సహాయంతో ప్రతీ రేఖాఖండం యొక్క పొడవును కొలవండి.

4. ఈ క్రింది వాక్యములలో సరియైన వాక్యములను ఎంచి రాయండి.

క) ఒక సరళరేఖ ఒక రేఖాఖండం యొక్క ఒక భాగము.

ఖ) ఒక రేఖాఖండంనకు మూడు రెండు శీర్ష బిందువు లుండును.

గ) ఒక సరళరేఖకు రెండు శీర్ష బిందువు లుండును.

ఘ) ఒక కిరణంనకు ఒక అద్య బిందువు ఉండును.

ఙ) 1 సెం.మీ. = 10 మి.మీ.

చెప్పండి చూద్దాం !

సరళరేఖ కిరణం మరియు రేఖాఖండం మధ్యలో దేనికి నిర్దిష్ట కొలత గలదు ? ఎందుకు ?

5. కుడిప్రక్కన గల చిత్రంను కొలిచి చూడండి.

క) AB + BD = AC + CD

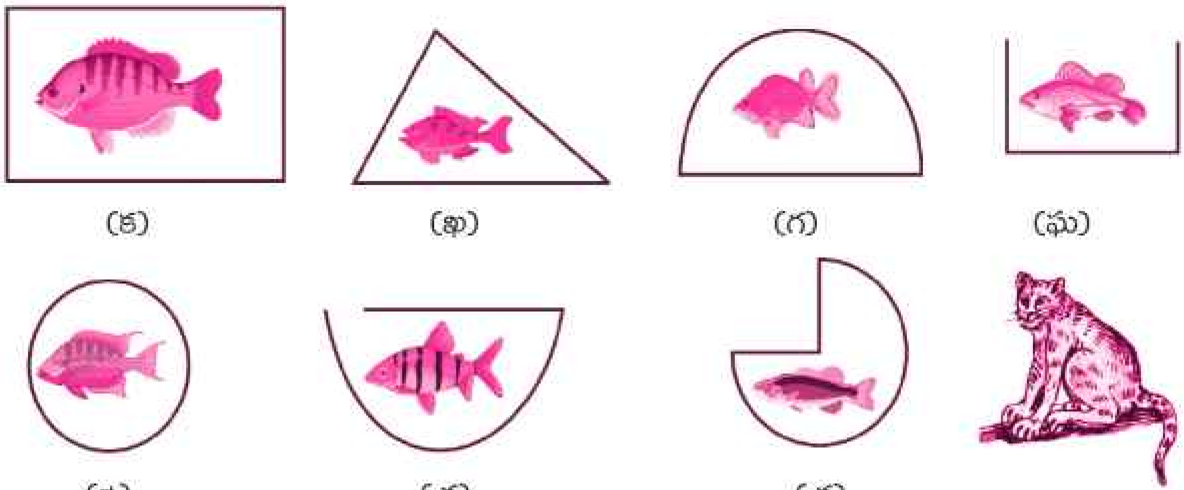
ఖ) AB + CD = AD - BC

6. మీ నోట్‌బుక్‌లో మూడు సరళరేఖలను నిర్మించండి. ప్రతి సరళరేఖపై మూడు బిందువులను పెట్టుము. ఎడమ నుండి కుడి ప్రక్కకు వరుసగా మూడు బిందువులు P, Q మరియు R అని పేరు పెట్టండి.

ఏ బిందువు మిగిలిన రెండు బిందువుల మధ్య ఉండునో చెప్పండి. ప్రస్తుతం PQ, QR మరియు PR మధ్యలో ఏది వేరే రెండు పొడవుల మొత్తంలో సమానమగును చెప్పండి.

3.7 సంవృత పటము

క్రింది గల చిత్రములలో కేవలం తిన్నని గీతలు లేక తిన్నని గీతలు మరియు వక్రగీతలు లేక కేవలం వక్రగీతలతో చిత్రములలో ఒక చేప బొమ్మ గలదు. ఆ తిన్నని గీత చిత్రములు లేక తిన్నని మరియు వక్ర గీత చిత్రములు విడిచి ఒక పిల్లి బొమ్మ గలదు. తిన్నని గీత మరియు వక్రగీతలకు ఒక్కొక్క తీగ జాలి ద్వారా చుట్టబడి ఉన్నట్లు అర్థము. తీగజాలి చాలా ఎత్తు అగుటవలన పిల్లి దానిని దాటి వెల్లి చేప దగ్గరకు చేరుకోలేదు.



(క) (ఖ) (గ) (ఘ)

(ఙ) (చ) (ఛ)

ప్రస్తుతం (క), (ఖ), (గ), (ఘ), (ఙ), (చ), (ఛ) నెంబరు గల చిత్రములను చక్కగా చూసి ఈ క్రింది రెండు ప్రశ్నల జవాబు చెప్పండి.

- ఎంత నెంబరు చిత్రంలో తీగజాలి లోపలకి వెల్లి పిల్లి చేపను తేగలదు మరియు ఎందుకు ?
- ఎంత నెంబరు చిత్రంలో తీగజాలి లోపలకి పిల్లి ప్రవేశించలేదు మరియు ఎందుకు ?

మీరు నిర్ణయించిన జవాబులు తప్పనిసరిగా క్రింది విధంగా అగును.

చిత్రం నెం. (ఘ) మరియు (ఛ) లో గల తీగజాలి లోపలికి వెల్లి పిల్లి చేపను తేగలదు. కారణమేమనగా ఈ జాలి గల స్థానాలు సంపూర్ణంగా కలిసి లేవు. కనుక వీటి లోపలికి వెల్లుటకు ఖాళీ దారి గలదు. అదే విధంగా చిత్రం నెం. (క), (ఖ), (గ), (ఙ) మరియు (చ)లో గల జాలీ లోపలికి పిల్లి ప్రవేశించలేదు. కారణమేమనగా ఆ చిత్రాలలో గల జాలి మొత్తము సంపూర్ణంగా కలిసి ఉన్నది. అందువలన లోపలికి వెల్లుటకు దారి లేదు.

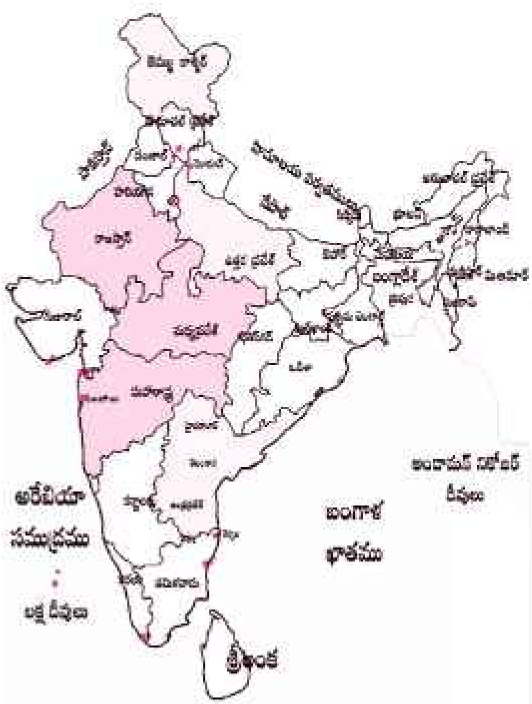
దీని వలన మనం ఏం తెలుసుకున్నాం ?

ఒకవేల ఒక సమతలంలో గల ఒక జ్యామితీయ చిత్రం, ఆ సమతలంలో ఒక భాగాన్ని సంపూర్ణంగా ఆక్రమించినచో ఆ చిత్రాన్ని సంవృత పటము అని అందురు.

3.7.1 సరళరేఖీయ మరియు వక్రరేఖీయ పరిమిత రేఖ :

మీరు అనేక మేపులను చూసి ఉంటారు. మేపును చూసి మీరు తప్పని సరిగా చెప్పగలరు మేపులో ఏ పట్టణం ఎచ్చట గలదు.

మేపును చూసి చెప్పండి, ఏ రాష్ట్రంలో పూరి పట్టణము గలదు ? భారత మేపులో ఎచ్చట పూరి రాయబడినదో పరిశీలించండి. మీరు చూస్తారు ఒడిషా రాష్ట్రంలో పూరి పట్టణం గలదు. ఒడిషా మేపు ఒక రేఖ ద్వారా కలుపబడివుంది. అదే విధంగా ఆంధ్రప్రదేశ్ మేపు ఒక రేఖ ద్వారా కలుపబడి వున్నది. ఈ రేఖను ఆ రాష్ట్రం యొక్క పరిమిత రేఖ అందురు. ఒడిషా యొక్క మేపులో గల పరిమిత రేఖ వలన మనం తెలుసుకోగలం. ఒడిషా యొక్క మేపులో గల పరిమిత రేఖ వలన మనం తెలుసుకోగలం ఒడిషా ఆ పరిమితరేఖ వరకు గలదు. ఒడిషా యొక్క పరిమిత రేఖ ఒడిషాకు దాని చుట్టు ప్రక్కల గల రాష్ట్రముల నుండి వేరు చేయుచున్నది.



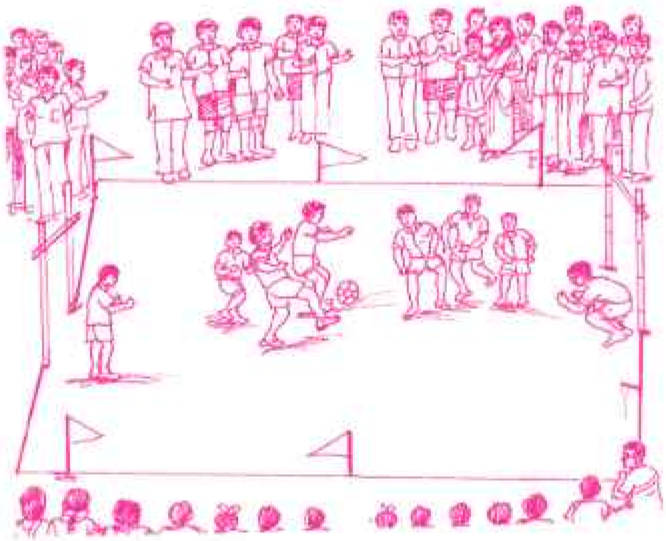
భారతదేశపు మేపును పరిశీలించండి. ఏఏ రాష్ట్రాలు ఒడిషాను తాకి ఉన్నవో చెప్పండి. ఒడిషా యొక్క పరిమిత రేఖ ఒడిషాకు ఆ రాష్ట్రాల నుండి వేరు చేయుచున్నది.

చిత్రంలో స్కూలు యొక్క పరిమిత రేఖను గుర్తించండి. పరిశీలించండి స్కూలు యొక్క స్థలం ఒక పరిమిత రేఖ ద్వారా కలుపబడింది. ఈ రకమైన పరిమిత రేఖ ఒక సరళరేఖ అగును.

పరిమిత రేఖలు రెండు రకాలు. అవి సరళరేఖీయ మరియు వక్రరేఖీయ. చిత్రంలో గల స్కూలు రేఖ సరళరేఖీయ మరియు ఒడిషా యొక్క పరిమిత రేఖ ఒక వక్రరేఖీయ అగును.

3.7.2 అంతర మరియు బాహ్య బిందువులు :

ఆటస్థలం యొక్క చిత్రంను చూచి ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలను చెప్పండి.



క) ఆటస్థలం లోపల ఏమేమి గలవు ?

ఖ) ఆటస్థలం వెలుపల ఎవరు ఉన్నారు ?

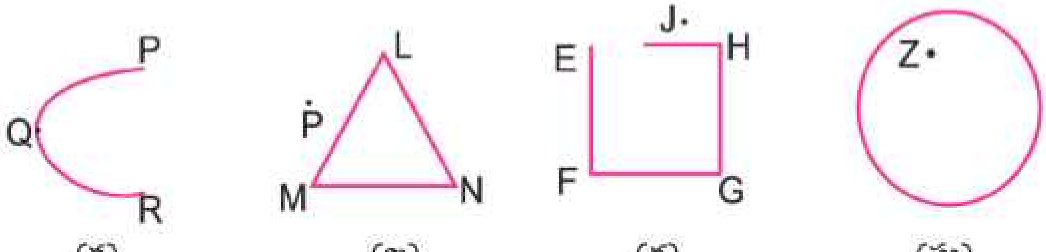
గ) ఆటస్థలం యొక్క పరిమిత రేఖపై ఎవరు ఉన్నారు ?

- ఎవరు లోపల గలరో, వారు ఆటస్థలం యొక్క అంతరభాగం
- ఎవరు వెలుపల గలరో, వారు ఆటస్థలం యొక్క బాహ్యభాగం
- ఎవరైతే లోపల గాని వెలుపల గాని లేరో వారు ఆటస్థలం యొక్క పరిమిత రేఖపై గలరు.

మనం ఏం తెలుసుకున్నాం ?

పరిమిత రేఖ ద్వారా కలుపబడిన ప్రాంతంలో గల ఏదైనా బిందువు ఆ స్థలం యొక్క అంతర బిందువు, పరిమిత రేఖపై గల ఏదైనా బిందువు పరిమిత రేఖపై గల బిందువు అగును. అంతర బిందువు మరియు పరిమిత రేఖపై గల బిందువులను విడిచి మిగిలిన బిందువులనఅు కలుపబడిన ప్రాంతంలో బాహ్య బిందువు లగును.

క్రింది నిచ్చిన చిత్రములను చూడండి మరియు ప్రశ్నల సమాధానలు రాయండి.

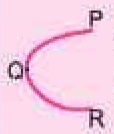


(క) (ఖ) (గ) (ఘ)

- చిత్రం (క), (ఖ), (గ) మరియు (ఘ)లో గల స్థలాలో ఏవి కలుపబడి ఉన్నవి ?
- ఖాళీలను పూరించండి.
  - ________ మరియు ________ కలుపబడిన (సంవృత) చిత్రములు
  - ________ మరియు ________ కలుపబడని (వివృత) చిత్రములు
  - ________ చిత్రం యొక్క పరిమిత రేఖ ఒక వక్రరేఖ.
  - ________ చిత్రం యొక్క పరిమిత రేఖ ఒక సరళరేఖ.
  - ________ చిత్రంలో బాహ్యబిందువు గలదు మరియు ________ ఒక బాహ్య బిందువు అగును.
  - ________ చిత్రంలో అంతర బిందువు గలదు మరియు ఒక అంతర బిందువు అగును.
- క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు చెప్పండి.
  - చిత్రం (క)లో ఒక బాహ్యబిందువును చూపించ గలరా ?
  - ఏఏ చిత్రములలో అంతర బిందువు లేక బాహ్య బిందువులను చూపించలేము ?

మీరు పరిశీలించి ఉంటారు చిత్రం (ఖ) మరియు (ఘ) లలో అంతర మరియు బాహ్య బిందువులను చూపించగలం. కాని చిత్రం (క) మరియు (గ)లలో అంతర మరియు బాహ్య బిందువులను చూపించలేము. కేవలం కలుపబడివున్న (సంవృత) చిత్రంలో అంతర లేక బాహ్య బిందువు లుండును.

తెలుసా ?



నేను సంవృత చిత్రాన్ని కాను. నన్ను వివృత చిత్రం అందురు. నాకు అంతర మరియు బాహ్య బిందువులు ఉండవు.

అభ్యాసం 3.4

1.క) ఒక సరళరేఖచే పరిమితం గల సంవృత చిత్రం మరియు ఒక వక్రరేఖచే పరిమితం గల సంవృత చిత్రంలను నిర్మించండి.

ఖ) నిర్మించిన ప్రతీ చిత్రంలో రెండు అంతర బిందువులు మరియు రెండు బాహ్య బిందువులను పెట్టండి. సరళరేఖ పరిమితి గల చిత్రంలో రెండు అంతర బిందువులను K మరియు L పేరు పెట్టండి మరియు బాహ్య బిందువులను M మరియు N పేరు పెట్టండి.
వక్రరేఖ పరిమితి గల చిత్రంలో రెండు అంతర బిందువులను P మరియు Q పేరు పెట్టండి మరియు బాహ్య బిందువులను R మరియు S పేరు పెట్టండి.

గ) ప్రతీ సంవృత చిత్రంలో పరిమిత రేఖపై ఒకొక్క బిందువును పెట్టండి. సరళరేఖీయ చిత్రంలో ఈ బిందువు పేరు Y పెట్టండి మరియు వక్రరేఖీయ చిత్రంలో ఈ బిందువు పేరు Z పెట్టండి.

2. ఒక చిత్రంను నిర్మించండి దానికి అంతర లేక బాహ్య బిందువులు చూపించుట సంభవం కాదు.

3.8 కోణము

3.8.1 కోణము యొక్క అవగాహన

(క) (ఖ) (గ) (ఘ) (ఙ)

పైన ఇచ్చిన చిత్రములను పరిశీలించండి.

- పుస్తకము యొక్క ప్రతీ పుట యొక్క అంచు ఒక్కొక్క రేఖాఖండము. రెండు అంచులు ఎచ్చట కలుస్తాయో అచ్చట ఒక కోణము ఏర్పడును.
- మీ యొక్క జ్యామితి బాక్సులో గల డివైడర్‌ను చూడండి. దాని యొక్క రెండు భుజాలు కలిసి స్థానంలో ఒక కోణము ఏర్పడినది.
- పైన గల గడియారాన్ని పరిశీలించండి. గంటల ముల్లు మరియు నిమిషాల ముల్లు ఏ విధంగా గలవు ? అవి ఒక కోణము ఆకారంలో గలవు.
- అదే విధంగా సెట్‌స్క్వేర్ యొక్క ప్రతీ శీర్షం వద్ద, బాక్సు యొక్క రెండు అంచుల దగ్గర కోణం ఏర్పడినది.

ప్రస్తుతం చెప్పండి -

క) మీ తరగతి యొక్క నల్లబల్లపై ఎన్ని కోణాలను చూస్తున్నారు ?

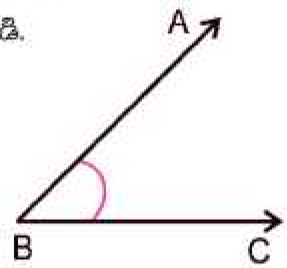
ఖ) మీ తరగతి గది యొక్క నేలపై ఎన్ని కోణాలు గలవు ?

ఇన్ని కోణాలను చూసిన తరువాత మనం తెలుసుకున్నాం, సాధారణ శీర్షబిందువు గల రెండు కిరణాలు ఒక సరళరేఖ యొక్క భాగాలు కానిచో ఆ రెండు ఒక కోణమును సృష్టించును.

✍ మీ పరిసరాలలో మీరు ఎక్కడెక్కడ కోణాల సృష్టి అగుట చూస్తున్నారో రాయండి.

3.8.2 కోణము యొక్క శీర్షబిందువు భుజం యొక్క పేర్లు :

ప్రక్క చిత్రాన్ని చూసి క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు చెప్పండి.



i) చిత్రంలో గల రెండు కిరణాల పేర్లు ఏమిటి ?

ii) రెండు కిరణాల శీర్షబిందువు ఏది ?

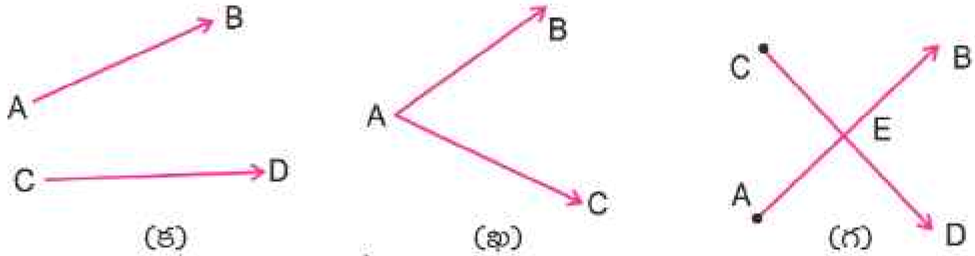
iii) B A కిరణం ఏ వైపుకు పరిమితం ?

iv) $\overrightarrow{BC}$ ఏ వైపునకు పరిమితం ?

చిత్రం 3.13లో గల రెండు కోణాల కలయిక వలన ఒక కోణము ఏర్పడినది. రెండు కోణాల సాధారణ శీర్షబిందువు B నకు ఏర్పడిన కోణం యొక్క శీర్షబిందువు అందురు. $\overrightarrow{BA}$ మరియు $\overrightarrow{BC}$ రెండు కిరణాలకు ఏర్పడిన కోణం యొక్క భుజాలు అందురు. ఈ కోణమునకు $\angle ABC$ లేక $\angle CBA$ (ABC కోణం లేక CBA కోణం) అని చదువుదురు.

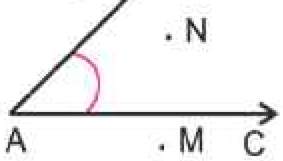
> **తెలుసా ?**
>
> '$\angle$' గుర్తు కోణం అనే పదానికి గుర్తు. కోణానికి పేరు పెట్టునప్పుడు ఎల్లప్పుడు శీర్షబిందువు యొక్క పేరు మధ్యలో ఉండవలెను.
>
> $\angle ABC$ ను $\angle B$ అని కూడా అందురు. కాని ఒక శీర్షబిందువులో ఒకటి కంటె అధిక కోణాలు ఉన్నచో రెండవ రకం పేరు రాయరాదు $(\angle B)$.

ఈ క్రింద నీయబడిన మూడు చిత్రములను పరిశీలించండి.



- చిత్రం (క)లో $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{CD}$ రెండు కిరణాలు ఉన్నను కూడా వాటితో కోణము ఏర్పడలేదు.
- చిత్రం (ఖ)లో A బిందువు $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{AC}$ రెండుల కిరణాలు సాధారణ శీర్షబిందువు. ఈ రెండు కిరణాలు ఒక కోణమును ఉత్పన్నము చేసెను.
- చిత్రం (గ)లో గల $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{CD}$ రెండు కిరణాల శీర్షబిందువులు వరుసగా A మరియు C. కాని రెండు కిరణాల యొక్క ఒక సాధారణ బిందువు E. $\overrightarrow{EB}$ మరియు $\overrightarrow{ED}$ కిరణాల సాధారణ శీర్షబిందువు E అగుటవలన $\angle BED$ ఏర్పడెను. దీనిలో $\overrightarrow{EC}$ మరియు $\overrightarrow{EB}$ రెండింటి సాధారణ బిందువు E అగుటవలన $\overline{EC}$ మరియు $\overline{EB}$ ల కలయిక వలన $\angle CEB$ కోణం ఏర్పడెను. అదే విధంగా $\angle AED$ కూడా ఏర్పడెను. $\overline{EC}$ మరియు $\overline{EA}$ ల యొక్క సాధారణ బిందువు E అగుటవలన ఆ రెండింటి కలయిక వలన $\angle AEC$ ఎర్పడెనని చెప్పవచ్చును.

3.8.3 కోణము యొక్క అంతర మరియు బాహ్య బిందువులు :



- ప్రక్క చిత్రంలో $\angle BAC$ చూపించడమైనది కోణం పుస్తకంలో ఒక పుటపై సమతలంలో గలదు.
- N బిందువు కోణం యొక్క అంతర బిందువు.
- N బిందువు వలె $\angle BAC$ యొక్క అంతర బిందువు వలె ఇంకా అనేక బిందువులు గలవు. కాని వాటికి పేరు పెట్టలేదు.

ఈ బిందువులు యొక్క ($\angle BAC$ యొక్క అంతర బిందువులు) సమూహం, ఈ సమతలం యొక్క ఒక భాగము మరియు సమతలం యొక్క మొత్తం భాగాన్ని కోణం యొక్క అంతరి భాగము అందురు. కోణము యొక్క రెండు భుజాలు వ్యాప్తి అనంతం అగుట వలన $\angle BAC$ యొక్క అంతరి భాగము కూడా అనంతం అగును.

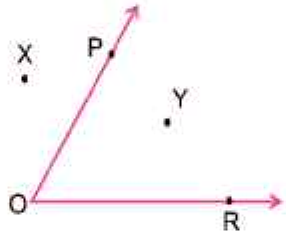
- P మరియు M బిందువులుయిన $\angle BAC$ యొక్క బాహ బిందువులు. P మరియు M బిందువుల వలె $\angle BAC$ యొక్క అనేక బాహ్య బిందువులు గలవు.
- ఈ బిందువుల యొక్క ($\angle BAC$ యొక్క బాహ్య బిందువులు) సమూహం, ఈ సమతలంలో ఒక భాగం మరియు సమతలం యొక్క మిగిలిన భాగాన్ని కోణం యొక్క బాహ్య భాగము అందురు. $\angle BAC$ కోణం యొక్క బాహ్య భాగము కూడా అనంతము అగును.
- $\overrightarrow{AB}$ లేక $\overrightarrow{AC}$ పై గల ప్రతీ బిందువు $\angle BAC$ యొక్క అంతర బిందువులగును. అంతర బిందువుల సమూహంతో కోణం ఏర్పడెను. అనగా $\angle BAC$, $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{AC}$ పై గల అన్ని బిందువుల సమూహం అగును.

పై ఆలోచన వల్ల మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం ?

- ఒక కోణం దాని యొక్క అంతర మరియు బాహ్య భాగమును వేరు చేయును.
- కోణం యొక్క ఏదైనా బాహ్య బిందువు మరియు ఏదైనా అంతర బిందువు కలిసిన రేఖాఖండం ($\overline{AC}$ లేక $\overline{MN}$) $\overrightarrow{AB}$ లేక $\overrightarrow{AC}$ కు ఖండించును.

మీరు ఒక కోణంను నిర్మించి దాని అంతర భాగమును రంగు వేసి గుర్తించండి. కోణం యొక్క ఒక అంతర బిందువు మరియు ఒక బాహ్య బిందువును చూపించండి.

అభ్యాసం 3.5



1. చిత్రం చూసి నోట్‌బుక్‌లో సమాధానాలు రాయండి.

క) చిత్రంలో గల కోణం యొక్క పేరు రాయండి.

ఖ) దీని యొక్క శీర్షబిందువు మరియు భుజాల పేర్లు రాయండి.

గ) ఈ కోణం యొక్క అంతర బిందువు మరియు బాహ్య బిందువు పేరు రాయండి.

2. ఈ క్రింది వాక్యములలో గల ఖాళీలను పూరించండి.

క) ఒక కోణంనకు ________ శీర్ష బిందువులు మరియు ________ భుజాలు ఉండును.

ఖ) ________ గుర్తు కోణం యొక్క సాంకేతిక గుర్తు.

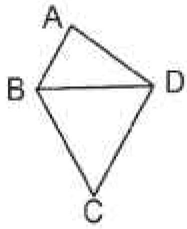
గ) రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఖండించినచో ________ కోణాలు ఏర్పడును.

3. స్కేలు మరియు పెన్సిల్ సహాయంతో మీ నోట్‌బుక్‌లో రెండు కోణాలను నిర్మించి పేరు పెట్టండి.

4.క) ప్రక్క చిత్రంలో ఎన్ని కోణాలు గలవు ?

ఖ) కేవలం శీర్ష బిందువును తీసుకొని ఏఏ కోణాల పేర్లు పెట్టవచ్చును ?

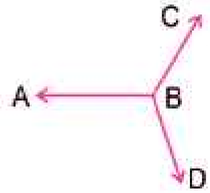
గ) ఏ కోణములకు ఒక సాధారణ భుజం గలదు ?



3.9. కోణముల మధ్యలో గల సంపర్కము.

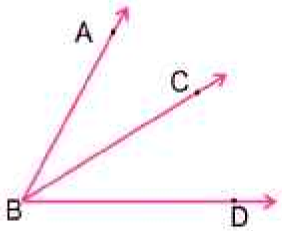
ఒక శీర్షబిందువు గల ఒకటి కంటె ఎక్కువ కోణాలకు కొన్ని ఉదాహరణలను ఇచ్చట గలవు. వాటిని పరిశీలించండి.

3.9.1 సన్నిహిత కోణములు.



ప్రక్క చిత్రంను చూసి జవాబులు రాయండి.

- $\angle ABC$ మరియు $\angle CBD$ ల యొక్క శీర్ష బిందువుల పేర్లు ఏమిటి ?
- ఈ కోణముల యొక్క సాధారణ భుజము ఏది ?
- ఏ కిరణం యొక్క వ్యతిరేఖ ప్రక్కలో రెండు కోణముల అంతర భాగము గలదు ?
- $\angle ABC$ మరియు $\angle CBD$ రెండు కోణముల యొక్క అంతరి భాగములో ఏదైనా సాధారణ భాగము గలదా ?



పై ప్రశ్నల సమధానాలు మీరు తప్పని సరిగా ఈ క్రింది విధంగా అనుకొని వుంటారు.

రెండు కోణాల శీర్ష బిందువు B రెండు కోణాల సాధారణ భుజం $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{BC}$ యొక్క వ్యతిరేక ప్రక్క రెండు కోణాల అంతర భాగము గలదు మరియు రెండు కోణాల అంతర భాగంలో సాధారణ భాగము ఏమీ లేదు.

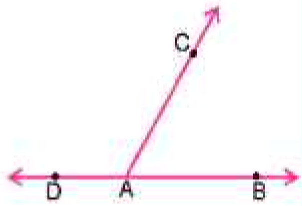
ఒక సమతలంలో గల రెండు కోణములకు ఒక సాధారణ బిందువు, ఒక సాధారణ భుజం వున్నచో మరియు వాటి యొక్క రెండు అంతర భాగాలకు ఏ సాధారణ భాగము లేనిచో ఆ రెండు కోణాలను సన్నిహిత కోణాలు అందురు. ఇచ్చట $\angle ABC$ మరియు $\angle CBD$ రెండు సన్నిహిత కోణాలు.

మీరు రెండు సన్నిహిత కోణాలను నిర్మించి వాటికి పేర్లు పెట్టండి.

3.9.2 సరళ రేఖీయ గీత :

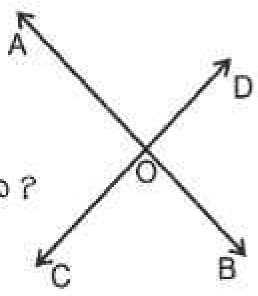
ప్రక్క చిత్రంను చూడండి. వర్ణించండి. పరిశీలించండి.

చిత్రంలో గల $\angle BAC$ మరియు $\angle CAD$ రెండు కోణముల యొక్క సాధారణ కాని భుజాలు $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{AD}$ పరస్పరం వ్యతిరేక కిరణాలు. ఈ రకమైన సన్నిహిత కోణాలను సరళరేఖీయ జతలే సరళ జత అందురు.



మీ నోట్‌బుక్‌లో సరళజతను నిర్మించండి. రెండు కోణాల యొక్క మొత్తంను కనుగొనండి.

3.9.3 ప్రతీప కోణాలు లేక వ్యతిరేక కోణాలు :



ఇచ్చిన చిత్రమును చూసి క్రింది గల ప్రశ్నల సమాధానాలు చెప్పండి.

- $\overleftrightarrow{AB}$ మరియు $\overleftrightarrow{CD}$ రెండు పరస్పరం ఏ బిందువు వద్ద ఖండించు చున్నవి ?
- $\angle AOD$ నకు ఎన్ని సన్నిహిత కోణాలు గలవు మరియు అవి ఏవి ?
- చిత్రంలో ఏ కోణం $\angle AOD$ నకు సన్నిహితం కాదు ?

చిత్రం నుండి మీరు పరిశీలించి ఉంటారు -

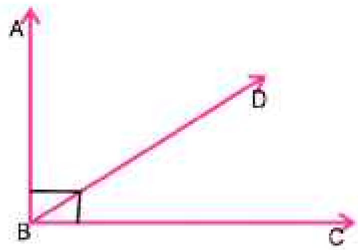
- $\overleftrightarrow{AB}$ మరియు $\overleftrightarrow{CD}$ పరస్పరం '0' బిందువు వద్ద ఖండించుచున్నది. $\angle AOD$ నకు రెండు సన్నిహిత కోణాలు గలవు మరియు ఆ రెండు $\angle DOB$ మరియు $\angle AOC$.
- $\angle COB$, $\angle AOD$ యొక్క సన్నిహిత కోణం కాదు. ఇచ్చట $\angle AOD$ యొక్క ప్రతీప లేక వ్యతిరేక కోణం $\angle BOC$.

రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం ఒక బిందువు వద్ద ఖండించిన ఏ నాలుగు కోణాలు ఏర్పడునో, వాటి మధ్యలో ఏ కోణాల మధ్య ఏ సాధారణ భుజం ఉండదో (అనగా ఏ కోణాలు పరస్పరం సన్నిహిత కావో) ఆ కోణాలు రెండు పరస్పరం వ్యతిరేక మగును.

మీరు రెండు సరళరేఖలు $\overleftrightarrow{XY}$ మరియు $\overleftrightarrow{PQ}$ తీసుకొండి. అవి పరస్పరం K బిందువు వద్ద ఖండించును. ఆ చిత్రంలో రెండు జతల ప్రతీప లేక వ్యతిరేక కోణాలను గుర్తించండి.

3.9.4 అనుపూరక కోణాలు -

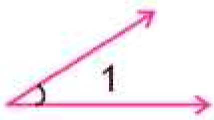
చిత్రంలో $\angle ABC$ ఒక సమకోణం ఈ చిత్రంను చూసి ఈ క్రింది ప్రశ్నల జవాబులు రాయండి.

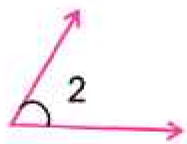


- $\angle ABC$ ని విడిచి చిత్రంలో మీరు చూస్తున్న రెండు వేరు కోణాల పేర్లు ఏమిటి ?
- $\angle ABD$ యొక్క పరిమాణం + $\angle DBC$ యొక్క పరిమాణం = ఎంత ?

మనం చూసాం -

$\angle AOD$ మరియు $\angle DBC$ ల పరిమాణం మొత్తం 90° ఆ రెండు కోణాలను పరస్పర అనుపూరక కోణాలు అందురు. క్రింతి చిత్రంలో గల $\angle 1$ మరియు $\angle 2$, మొత్తం 90°, అందువలన $\angle 1$ మరియు $\angle 2$ కూడా పరస్పరం అనుపూరకాలు.





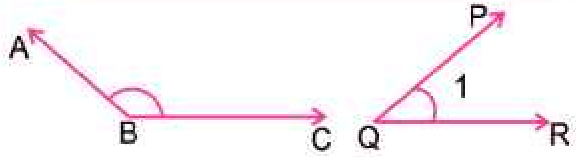
రెండు కోణముల పరిమాణాలు మొత్తం 90^0 అయిన వాటిలో ఒక కోణము వేరొక దాని యొక్క అనుపూరక మగును లేక రెండు కోణాలు పరస్పరం అనుపూరకము లగును.

> **తెలుసా ?**
> రెండు అనుపూరక కోణాలు సన్నిహిత కోణాలు కావచ్చు లేక వేరు వేరు స్థానాలలో ఉండవచ్చు.

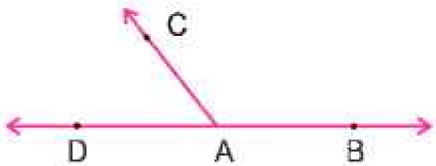
3.9.5 పరిపూరక కోణాలు -

ప్రక్కగల బొమ్మను చూడండి.

బొమ్మలో చూస్తున్న కోణాల పేర్లేమిటి ?



ఈ రెండు కోణాల పరిమాణాల మొత్తం కనుగొనండి. ఏ కోణాల మొత్తం 180^0 అగునో ఆ రెండు కోణాలను పరస్పర పరిపూరక కోణాలు అందురు. ఇచ్చట $\angle ABC$ మరియు $\angle PQR$ పరస్పరం పరిపూరక కోణాలగును. సరళ జత గల రెండు కోణాలను కొలచి చూసినచో ఆ రెండింటి మొత్తం 180^0 అగుట చూడగలరు. అందువలన ఆ రెండు కూడా పరస్పరం పరిపూరకాలు.



> గుర్తుంచండి : పరస్పరం పరిపూరకం అయిన రెండు కోణాలు వేరు వేరు స్థానాలలో ఉండవచ్చు లేక సన్నిహితం కావచ్చు.

అభ్యాసం 3.6

1.క) క్రింది గల కోణాముల యొక్క అనుపూరక కోణములను కనుగొనండి.

6^0, 15^0, 29^0, 30^0, 45^0, 75^0

ఖ) క్రింది గల కోణాల యొక్క పరిపూరక కోణాలను కనుగొనండి.

$27^0, 52^0, 70^0, 110^0, 145^0, 150^0$

2.క) $45^0\ 45^I$ కొలత గల కోణం యొక్క అనుపూరక కోణం మరియు పరిపూరక కోణమును నిర్ణయించండి. ($1^0=60^I$)

ఖ) 48^0 కొలత గల కోణం యొక్క అనుపూరక కోణం మరియు పరిపూరక కోణం పరిమాణం ఎంత అగును ?

3. క్రింది కొలతలు గల జతల మధ్యలో ఏ జత పరస్పరం అనుపూరకం మరియు ఏ జత పరస్పరం పరిపూరకం అగునో రాయండి.

క) $68^0, 22^0$	ఖ) $163^0, 17^0$	గ) $73^0, 17^0$
ఘ) $80^0, 10^0$	ఙ) $42^0, 138^0$	చ) $90^0, 90^0$

4. చిత్రములను నిర్మించి అనుపూరక కోణములు మరియు పరిపూరక కోణాలకు ఉదాహరణలను ఇవ్వండి.

5. మీ చుట్టుప్రక్కల గల వస్తువులలో పరస్పరం లంబంగా ఉన్న వస్తువులకు మూడు ఉదాహరణలను ఇవ్వండి.

6. ఒక ట్రాఫిక్ పోలీస్ తూర్పు వైపు ముఖం పెట్టి నిలుచొని ఉన్నాడు. ఒకవేల అతడు ఎడమవైపు వరుసగా

క) ఒక లంబకోణం ఖ) రెండు లంబకోణాలు

గ) మూడు లంబకోణాలు ఘ) నాలుగు లంబకోణాలు తిరిగినచో ప్రతీసారి తిరిగిన తరువాత అతని ముఖం ఏ దిక్కునకు ఉండునో రాయండి.

7. ఏ రకమైన కోణం ఏర్పడును ?

క) ఒక బిందువు నుండి తూర్పు మరియు దక్షిణంనకు రెండు కిరణాలను నిర్మించండి.

ఖ) ఒక బిందువు నుండి ఉత్తర మరియు ఉత్తర తూర్పునకు రెండు కిరణాలను నిర్మించండి.

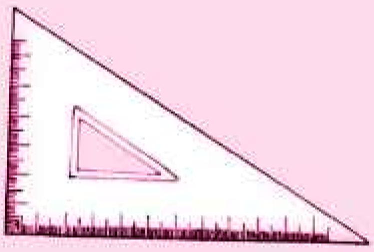
గ) ఒక బిందువు నుండి తూర్పు మరియు ఉత్తరంనకుల రెండు కోణాలను నిర్మించండి.

8.క) ఏ కోణం యొక్క పరిమాణం దాని యొక్క అనుపూరక పరిమాణంనకు రెండు వంతులగునో దాని పరిమాణం ఎంత ?

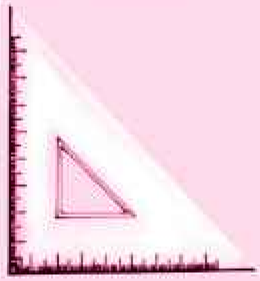
ఖ) ఏ కోణం యొక్క పరిమాణం దాని యొక్క పరిపూరక పరిమాణంనకు రెండు వంతులగునో దాని పరిమాణం ఎంత ?

సెట్‌స్కేయర్ గూర్చి కొన్ని విషయాలు

కొన్ని నిర్దిష్ట పరిమాణం గల కోణములను నిర్మించుటకు సెట్‌స్కేయర్‌ను ఉపయోగించుదుము. దీని యొక్క వేరు వేరుల ఉపయోగల గూర్చి ఇచ్చిన విషయాలను చదవండి.



30° సెట్‌స్కేయర్



45° సెట్‌స్కేయర్

మీ జ్యామితీ బాక్సులో గల రెండు సెట్‌స్కేయర్‌లను పరిశీలించండి. ఒకదాని కోణాల పరిమాణం 30°, 90°, 60° మరియు రెండువ దాని కోణాల పరిమాణం 45°, 90°, 45° మొదటి దాని పేరు 30° సెట్‌స్కేయర్ మరియు రెండువ దాని పేరు 45° సెట్‌స్కేయర్ ఇవి ప్లాస్టిక్ లేక లోహంతో తయారగును. వీటి అంచులలో దూరం లేక పొడవు కొలుచుటకు సెంటిమీటరు గుర్తులు ఇవ్వబడును.

30°, 45°, 60° మరియు 90° కొలత గల కోణాలను నిర్మించుటకు ఇవి అవసరమగును. ఒక సరళరేఖపై ఒక లంబం (సమకోణం నిర్మించిన రేఖ) మరియు ఒక సరళరేఖకు సమాంతర సరళరేఖ నిర్మించుటకు దీనిని ఉపయోగించవచ్చు.

సహజ సంఖ్యలు

4.1 పరిచయం

మీరు వస్తువులను లెక్కించుటకు సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తుంటారు. రెండు వస్తువుల మొత్తం సంఖ్య తెలిసిన ఆ రెండు వస్తువుల మొత్తం సంఖ్య తెలిసిన ఆ రెండు వస్తువులలో గల వస్తువుల మొత్తము తెలుసుకొనుటకు కలుపుట తెలుసు. వస్తువు మొత్తంలో కొన్ని వస్తువుల తీసిన మిగిలిన వస్తువులు సంఖ్య తెలుసుకొనుటకు తీసివేత తెలుసు. ఒక సంఖ్యను దానిలో అనేక సార్లు కలుపుటకు సంక్షిప్తముగా చేయుట కొరకు గుణించుట తెలుసు. ఒక సంఖ్య నుండి దాని కంటె చిన్నసంఖ్యను అనేక సార్లు తీసివేయుటను సులువుగా తెలుసుకొనుటకు భాగించుట కూడా మీకు తెలుసు. సంఖ్యలు మరియు దానికి సంబంధించిన ప్రక్రియ సహాయంతో నిత్య జీవితంలో అనేక సమస్యల సమాధానాలు చేయగలుగుచున్నారు. ఈ అధ్యాయంలో సంఖ్యల క్రమ వికాశం ఏ విధంగా జరిగిందో దానిని ఇచ్చట ఆలోచన చేద్దాం.

4.2. సంఖ్యల చరిత్ర

పూర్వకాలము నుండి మనిషి తన జీవితము కొరకు ఆహారంను సంగ్రహించుట, సురక్షితమైన జీవితం కొరకు నివాస స్థానం ఏర్పరచుకొనుట మరియు బయట శతృవుల నుండి తనను రక్షించుకొనుట కొరకు సమాజంలో జీవించుటను నేర్చెను. మొదట అతడు కేవలం ఈ దినం ఏమి అవసరమో దానినే ఆలోచించెను. ఆ తరువాత అతడు భవిష్యత్ గూర్చి ఆలోచించుట ఆరంభించెను. ఎప్పుడైతే అతడు భవిష్యత్‌లో జీవించుటకు పశువులను పెంచుట, చెట్లు నాటుట గూర్చి ఆలోచించెనో అప్పుడు అతడు ఒకటి కంటె ఎక్కువ పశువులు పెంచెను మరియు ఒకటి కంటె ఎక్కువ చెట్లు నాటెను. అతడు ఏ పశువులను పెంచెనో ఏ చెట్లను నాటెనో వాటిని లెక్కించు అవసరం వచ్చెను.

4.2.1. లెక్కించు వ్యవస్థ

అతని యొక్క పశుశాల నుండి ఏ పశువులు బయటకు వెల్లెనో, అవి తిరిగి సాయంకాలం శాలకు వచ్చెనో లేదో లెక్కించుట కొరకు తెలిసినట్లు పశువులు బయటకు వెల్లినపుడు అతడు గోడపై ఒక పశువుకుఒక గీత గీసెను మరియు పశువులు తిరిగి వచ్చినపుడు ఒక పశువు శాలలో ప్రవేశించిన ఒక గీతను చెరిపెను. చివరకు అతను చూసెను ఒక గీత చెరపకుండా మిగిలిన యడల అతను తెలుసుకొనెను తన

ఒక పశువు ఇంకా చేరలేదు. ఒకవేల అన్ని గీతల చెరిగిపోయినచో మరియు శాల బయట మరియు ఏ పశువులు లేవు అప్పుడు అతడు తెలుసుకొనెను తన అన్ని పశువులు చేరుకొనెను.

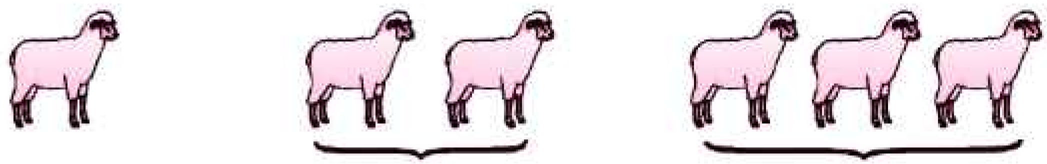
> చెప్పండి చూద్దాం :
> అతని అన్ని గీతలు చెరిగిన తరువాత శాల బయట ఇంకా పశువుల ఉండుట చూసినచో అతడు ఏమి తెలుసుకొనును ?

గీత గీయట మరియు గీత చెరుపుట పనిని ఇంకా సరళంగా చేయుటకు అతడు ఒక వస్తువునకు ఒక గీత ద్వారా గుర్తించుటకు బదులు ఒక పశువు లేక ఒక వస్తువు కొరకు ఒక కర్ర లేక ఒక రాయి లేక ఒక దిత్తనమును ఉపయోగించెను. ఇప్పుడు అతనికి ఎన్ని పశువులో అన్ని కర్రల కట్టలు ఉండెను. ఇలా అతని పెరటలో పండిన పండ్లను లెక్కించుటకు వేరొక కర్రల కట్ట ఉండెను. ఈ విధంగా ఎన్ని రకాల పశువులు లేక వస్తువులు లెక్కించుట అవసరం పడెనో అన్ని కర్రల కట్టలు ఉంచెను. ఇలా చేస్తూ వుంటె అతని వద్ద అనేక కర్రల కట్టలు పెరిగెను. అప్పుడు ఈ కర్రల అతనికి అనేక సమస్యలు సృష్టి చేసెను.

4.3 సంఖ్యల సృష్టి :

గోడపై గీతలు గీయట లేక కర్రల కట్టలు ఉంచుట లేక రాయిలను ఉంచుట ద్వారా పశువుల లేక వస్తువుల లెక్కను చూచుట కొరకు అధికంగా కర్రల కట్టల లేక రాయిలు కాకుండా అన్ని వస్తువుల లెక్కలను ఉంచుటకు ఒక సాధారణమైన పద్ధతి చేయుటకు ప్రయత్నించెను. చివరకు అతడు ఈ అవసరంను పూర్తి చేయుటకు సంఖ్యలను సృష్టి చేసెను. ఈ సంఖ్యలు -

ఒకటి, రెండు, మూడు, నాలుగు, ఐదు, ఆరు, ఏడు, ఎనిమిది, తొమ్మిది, పది ...... ఈ పదాలను వాడి అతడు వస్తువులను లెక్కించెను.



సంఖ్యల గుర్తుల సృష్టి

మాట్లాడు నపుడు లేక వస్తువులను లెక్కించునపుడు రెండు కొబ్బరి కాయలు ఐదు అరటి పండ్లు అని చెప్పెను. కాని వాటిని సహజంగా రాయుట కొరకు ప్రతీ సంఖ్యకు ఒక ప్రత్యేక గుర్తును సృష్టించుట అవసరం పడెను.

దీనిని చేయుటకు అతడు సంఖ్యల గుర్తులను చేసెను. ఎన్ని అధికంగా వస్తువు లుండునో అన్ని అధిక సంఖ్యల గుర్తులను సృష్టి చేసెను. భూమిపై వేరు వేరు ప్రాంతాలలో గల ప్రజల వేరు వేరు గుర్తులను తయారు చేసెను.

> చెప్పండి చూద్దాం :
> అధిక సంఖ్యల కొరకు అధిక గుర్తులు సృష్టి అయిన తరువాత అతను ఏ సమస్య ఎదుర్కొనెను.

4.4 స్థానిక విలువల వ్యవస్థ

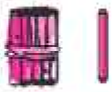
ముందు గల సమస్యల (అనేక సంఖ్యల కొరకు అనేక గుర్తుల ఉపయోగం) సమాధానాలను భారతీయ పండితులు కనుగొనిరి. వారు తక్కువ కొన్ని సంఖ్యల కొరకు సంకేతాలను కనుగొనిరి మరియు అవి -

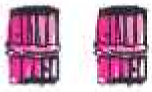
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
హిందీలో	१	२	३	४	५	६	७	८	९
ఇంగ్లీషులో	1	2	3	4	5	6	7	8	9

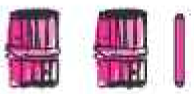
కేవలం ఈ సంకేతాలను ఉపయోగించి ఇంకా పెద్ద సంఖ్యల సంకేతాలు (గుర్తులు)ను సృష్టించుటకు వారు కర్రలను లెక్క పెట్టునపుడు కట్టలుగా కట్టి లెక్కించే వ్యవస్థను అనుసరించిరి.

ఎక్కువ కర్రలున్నచో లెక్కించే పద్ధతి -

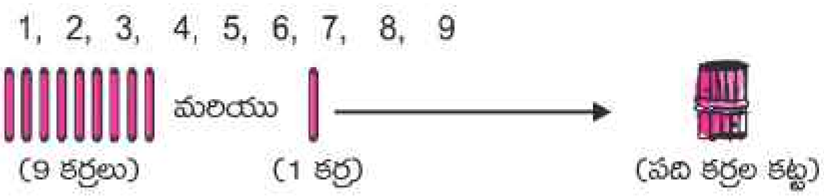
ఒక కట్ట


ఒక కట్ట మరియు ఒక కర్ర

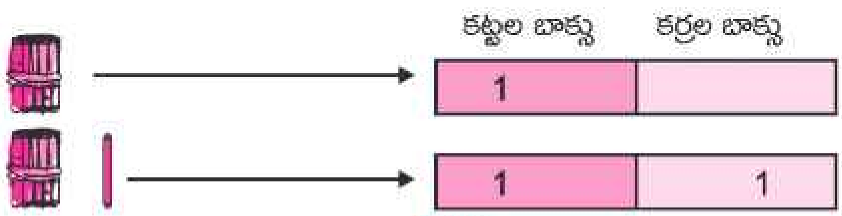

రెండు కట్టలు

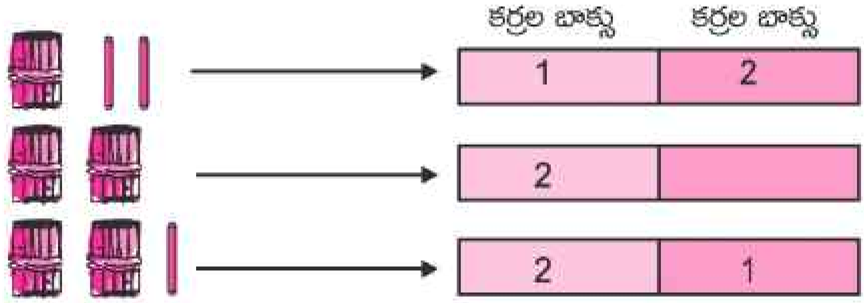

రెండు కట్టలు మరియు ఒక కర్ర

ఈ విధమైన లెక్కించే పద్ధతిని అనుసరించి సంఖ్యలు రాయు పద్ధతిని తయారు చేయుటకు పెట్టెలు లేక స్థానాలను కనుగొనిరి.



పది కర్రల కట్టను రాయుటకు ఒక బాక్సు లేక ఒక స్థానాన్ని తయారు చేసెను. అవి





ఒక బాక్సు ఖాళీ ఉండుట వలన, ఈ సంఖ్య రాయు పద్ధతిలో మళ్లీ సమస్య వచ్చెను. అది

పది →	1	
ఇరవై →	2	

పది, ఇరవై మొదలైన సంఖ్యలను రాయునపుడు ఒక బాక్సు ఖాళీగా ఉంటుంది. అందువలన రెండు బాక్సులను చేయనిచో ఒక బాక్సు ఖాళీ ఉండుట చూపలేం. కాని వేరే సంఖ్యల విషయంలో బాక్సులను చూపించకుండా కూడా సంఖ్యలను రాయగలం. అనగా -

పదకొండు →	1	1	→ 11
పన్నెండు →	1	2	→ 12

11ను రాసినపుడు రెండు బాక్సులలో ఉండుటను చూస్తున్నాం. 12, 13, 25, 27 ..... మొదలైన సంఖ్యలను రాయునపుడు బాక్సులు గీయకుండాక కూడా రెండు సంఖ్య రెండు బాక్సులలో ఉండగలవు. కాని పది, ఇరవై, ముప్పై మొదలైన సంఖ్యల విషయంలో ఒకవేల ఒక బాక్సు ఖాళీగా ఉన్నచో అది కేవలం బాక్సు గీసిన తెలుసును అనగా

	కర్రబాక్సు	కర్రబాక్సు	
పది →	1		ఒక దానిలో ఏమి లేదు
ఇరవై →	2		ఒక దానిలో ఏమి లేదు
ముప్పై →	3		ఒక దానిలో ఏమి లేదు

ఈ సమస్యను కూడా భారతీయ పండితులు సమాధానం చేసిరి.

4.5. సున్నాను కనుగొనుట.

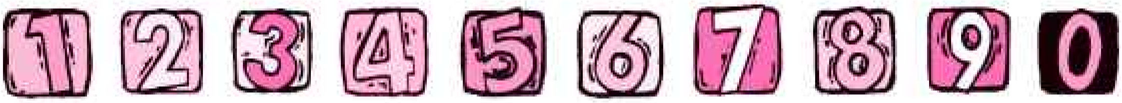
ఏమి లేక పోవుటకు సున్నా అందురు. అందువలన ఏమి లేదు లేక సున్నా కొరకు వారు '0' గుర్తును సృష్టించిరి మరియు దాని పేరు 'సున్నా' అని పిలిచిరి. ఫలితంగా ముందు గల సమస్యలు దూరమయ్యెను.

ప్రస్తుతం రాద్దాం -

పది → | 1 | | → | 1 | 0 | → 10

ఇక సంఖ్యలను రాయునపుడు బాక్సులను గీయవలసిన పని లేదు సంఖ్యలను రాయునపుడు రెండు సంఖ్యలను ఉపయోగించిన యెడల అవి రెండు బాక్సులు లేక రెండు స్థానాలను తెలియ జేయును.

ప్రతీ స్థానంలో ఒక విలువ లేక మూల్య ఉండెను. అందువలన ఈ వ్యవస్థను స్థానిక విలువల వ్యవస్థ అందురు. ఈ వ్యవస్థలో సంఖ్యలను రాయు పద్ధతిలో సంపూర్ణత సాధించుటకు సున్నాను (0)ను సృష్టించుట జరిగినది. అందువలన ప్రస్తుతం మన దగ్గర సంఖ్యలను రాయుటకు ఏ గుర్తులు గలవో అవి ఈ క్రింది ఇవ్వడమైనది.



4.5.1 : అంకెలు, సంఖ్యలు మరియు దశమిక సంఖ్యల వ్యవస్థ

ముందు గల పది గుర్తులను ఉపయోగించి ఏదైనా పెద్ద సంఖ్యను రాయవచ్చు. ఈ విధంగా మూడు వందల నలభై ఐదు కొరకు గుర్తు 345

ఇచ్చట ఒకట్ల స్థానంలో 5, దీని విలువ $= 5 \times 1 = 5$;

పదుల స్థానంలో 4, దీని విలువ $= 4 \times 10 = 40$;

వందల స్థానంలో 3, దీని విలువ $= 3 \times 100 = 300$ ।

ఇచ్చట సంఖ్య 345 అగును. ఈ సంఖ్యను రాయనపుడు ఒకట్లు, పదులు మరియు వందలు స్థానాలలో వరుసగా 5,4 మరియు 3 ఉండును. ఈ 5,4 మరియు 3లకు 345లో ఉపయోగించిన 'అంకెలు' అని అందురు.

1,2,3,4,5,6,7,8,9 మరియు 0 లను ఉపయోగించి ఏర్పడిన సంఖ్యలో వాటిని అంకెలు అని అందురు. కాని మనం 5 కలములు అని అందుమో, అపుడు కలముల సంఖ్య = 5. ఇచ్చట 5 ఒక సంఖ్య అగును. ఈ సంఖ్య ఒక అంకెను తీసుకొని ఏర్పడినది మరియు ఆ అంకె 5 అగును.

> **తెలుసా ?**
> 1,2,3,4,5,6,7,8,9 మరియు 0 లను ఉపయోగించి ఒక సున్నాను రాసిన వీటిని ఆ సంఖ్య యొక్క అంకెలని అందురు. మరియు వాటిని సంఖ్యల రూపంలో కూడా వాడవచ్చును.

4.6. గణన సంఖ్యలు

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.... మొదలైన సంఖ్యలను లెక్కించుటకు వాడుట వలన ఈ సంఖ్యలను గణన సంఖ్యలని అందురు.

జవాబులను రాయండి.

- గణన సంఖ్యలలో చిన్న సంఖ్య ఏది ?
- ప్రతీ గణన సంఖ్య కంటె దాని తరువాత సంఖ్య ఎంత పెద్దది ?
- ఈ సంఖ్యలను చివర ఎక్కడ ?

గణన సంఖ్యల గూర్చి కొన్ని నియమాలు

- గణన సంఖ్యల మొత్తంలో అతిచిన్న సంఖ్య 1,1 కంటె ముందు మరి ఏ సంఖ్య లేదు.
- ప్రతీ సంఖ్యకు తరువాత సంఖ్య గలదు. ఒక సంఖ్య యొక్క తరువాత సంఖ్య ముందు సంఖ్య కంటె 1 ఎక్కువ - ప్రతీ సంఖ్య యొక్క ముందు సంఖ్య తరువాత సంఖ్య కంటె 1 తక్కువ కాని ఇది 1 నకు సత్య కాదు.
- గణన సంఖ్య మొత్తంలో మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య లేదు. ఎంత పెద్ద సంఖ్య అయినను దాని తరువాత సంఖ్య గలదు మరియు ఇది ముందు పెద్ద సంఖ్య కంటె 1 ఎక్కువ.
- గణన సంఖ్యలను రాయుటకు పది అంకెలను ఉపయోగించుట వలన దీనిని పదా ఆదారం గల సంఖ్యలుఅ లేక దశాంశ సంఖ్యల వ్యవస్థ అని అందురు.

4.7. సహజ సంఖ్యలు

నిత్య జీవితంలో వివిధ పరిస్థితులలో ఈ గణన సంఖ్యల ఉపయోగం అధికమయ్యెను. ఈ క్రింద కొన్ని పరిస్థితులను తెలియజేయడ మైనది.

పరిస్థితి - 1

ఇంట్లో 5 నిమ్మకాయలు ఉండెను. మరల చెట్టు నుండి 7 నిమ్మకాయలను తీయడం జరిగింది. అయిన మొత్తం ఎన్ని ? ఈ పరిస్థితి నుండి అతడు కూడిక ప్రక్రియను ఉపయోగించుట గూర్చి ఆలోచించెను.

పరిస్థితి - 2

ఇంట్లో 20 కొబ్బరికాయలు ఉండెను. వాటి నుండి 8 కొబ్బరికాయలను ఇంట్లో జరిగిన పండగ కొరకు వాడిరి. మిగిలిన కొబ్బరి కాయలను లెక్కించుటకు అతడు తీసివేత ప్రక్రియ గూర్చి ఆలోచించెను.

పరిస్థితి - 3

పొలం నుండి ప్రతీసారి ఇంటికి వచ్చెను 15 బస్తాల ధాన్యం. అయిన 7 సార్లు ఎన్ని బస్తాల ధాన్యం ఇంటికి వచ్చెను. ఇది తెలుసుకొనుటకు అతడు అన్ని బస్తాలను దించి ఒకొక్కటి లెక్కించుటకు బదులు అతడు లబ్ధం గూర్చి ఆలోచించెను.

పరిస్థితి - 4

స్కూలుకు 20 నోట్‌బుక్‌లు వచ్చెను. ప్రతీ పిల్లడికి 3 నోట్‌బుక్‌ల అవసరం. అయిన ఎంత మంది పిల్లలు 3 నోట్‌బుక్‌లను పొందెదరు మరియు ఎన్ని నోట్‌బుక్‌లు మిగులును ?

ఒకొక్క పిల్లడకి నోట్‌బుక్‌లను పంచే ముందు ఎందరు పిల్లలు 3 నోట్‌బుక్‌లు పొందెదరు మరియు ఎన్ని నోట్‌బుక్‌లు మిగిలును అని తెలుసుకొనుటకు అతడు భాగక్రియను గూర్చి ఆలోచించెను.

గణన సంఖ్యలు మరియు వాటితో కూడిక, తీసివేత మొదలైన ప్రక్రియల ఉపయోగాలకు కలిపి సహజ వ్యవస్థ (N గుర్తు ద్వారా సూచించబడెను) ఏర్పడెను. స్వభావిక లేక సహజ సంఖ్యలు - 1,2,3,4,.....

గణన సంఖ్యల విషయంలో చెప్పిన 3 నియమాలు సహజ సంఖ్యలకు కూడా నిజం అగును. అనగా

- అతి చిన్న సహజ సంఖ్య 1. దీనికి ఏ విధమైన ముందు సంఖ్య లేదు.
- ప్రతీ సంఖ్యకు ఒక తరువాత సంఖ్య ఉండును. ఒక సంఖ్య యొక్క తరువాత సంఖ్య ముందు సంఖ్య కంటె 1 ఎక్కువ ప్రతీ సంఖ్య యొక్క ముందు సంఖ్య తరువాత సంఖ్య కంటె 1 తక్కువ. కాని ఇది 1 కొరకు నిజం కాదు. కారణమేమనగా 1 నకు ఏ ముందు సంఖ్య లేదు.
- సహజ సంఖ్యల మొత్తంలో పెద్ద సంఖ్య లేదు. ఎంత పెద్ద సంఖ్య అయినను కూడా దానికి తరువాత సంఖ్య ఉండును మరియు ఇది ముందు సంఖ్య కూడి 1 ఎక్కువ.

అభ్యాసం 4.1

1. అతి చిన్న సహజ సంఖ్య ఎంత ?
2. ప్రతీ సంఖ్యకు ఎడమ వైపు కాని ముందు సంఖ్య మరియు కుడివైపు దాని తరువాత సంఖ్యను రాయండి.

క) ___ ,28, ___ ఖ) ___,248, ___ గ) ___,567, ___

ఘ) ___,3856, ___ ఙ) ___,5000, ___ చ) ___,99999, ___

3.క) 57 కంటె చిన్నవి ఎన్ని సహజ సంఖ్యలు గలవు ?

ఖ) 48 మరియు 216 మధ్యలో ఎన్ని సహజ సంఖ్యలు గలవు ?

గ) 5729 యొక్క తరువాత గల మూడు వరుస సహజ సంఖ్యలను రాయండి.

4.క) ఒకట్ల స్థానంలో సంఖ్య 5 అయిన ఆరు అంకెలు గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్యను రాయండి.

ఖ) ఒకట్ల స్థానంలో సంఖ్య 7 అయిన ఏడు అంకెలు గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యను రాయండి.

గ) ఆరంకెలు గల మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య నుండి ఏడంకెల గల మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్య వరకు (ఈ రెండు సంఖ్యలను కలిపి ఎన్ని సహజ సంఖ్యలు గలవు ?

4.8. సహజ సంఖ్యల ప్రక్రియలు మరియు నియమాలు.

4.8.1. కూడిక

ప్రతీ సహజ సంఖ్య కంటె దాని తరువాత సంఖ్య 1 అధికం. దీనిని ఉపయోగించి కూడిక ఏర్పడినది. ఈ క్రింది ఉదాహరణను చూడండి.

(ఒక కర్ర మరియు వేరొక కర్ర కలిపిన)

1 + 1 = 1 యొక్క తరువాత సంఖ్య = 2

2 + 1 = 2 యొక్క తరువాత సంఖ్య = 3

3 + 1 = 3 యొక్క తరువాత సంఖ్య = 4

> తెలుసా ?
>
> ఏదైనా సహజ సంఖ్యలో 1 కలిపిన దాని తరువాత సంఖ్య వచ్చును.

ఇప్పుడు 5 + 4 యొక్క విలువను కనుగొందాం. 5 + 4 యొక్క విలువను తెలుసుకొనుటకు మనం 5 కర్రలలో 4 కర్రలను కలుపుదాం.

5తో 4నకు కూడిక అనగా 4 ఒకట్లను ఒకటి ఒకటి చేసి కూడిక చేయుట. ఈ విధంగా చేసిన మనం 5+4=9 పొందుతాం. అందువలన 5+4=9

4.8.2. సంకలన సంవృత ధర్మం.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- నీవు మరియు నీ స్నేహితుడు ఒకే దగ్గర కూర్చొండి. ఒక్కొక్కరు ఆరు కార్డులను తీసుకొండి.
- నీవు నీ స్నేహితుని దగ్గర గల కార్డుల నుండి ఒక కార్డును తెమ్ము. నీ దగ్గర గల కార్డుల నుండి ఒకటి తీసుకొనుము.
- నీవు తీసుకున్న సంఖ్యల కార్డుల రెండింటిలో గల రెండు సంఖ్యలను కూడిక చేయుము మరియు ఫలితంను నోట్‌బుక్‌పై రాయండి. అనుకొనుము నీ స్నేహితుని వద్ద నుండి నీవు తెచ్చినది 7 మరియు నీ దగ్గర గల కార్డు సంఖ్య 6. సంఖ్యల రెండు కలిపిన 7+6=13.
- నీవు ఏ విధంగా చేసావో, నీ స్నేహితుడు కూడా అ విధంగానే చేయమని చెప్పుము.
- నీ వద్ద గల సంఖ్యల కార్డులుయిన అయినంత వరకు ఈ విధంగా చేసి కూడికల విలువలను నోట్‌బుక్‌లో రాయండి.
- ప్రతీ సారి కూడిక చేసిన సంఖ్యల విలువలు సహజ సంఖ్యలు అగునా ?

ఈ విధంగా మనకు తెలిసినది ఏమనగా రెండు జతల సంఖ్య కూడిక ఒక సహజ సంఖ్య అగును. మనం తెలుసుకున్నాం.

ఏవైనా రెండు సహజ సంఖ్యల కూడిక కూడా ఒక సహజ సంఖ్య అగును. ఈ ధర్మాన్ని సంకలన ప్రక్రియలో సంవృత ధర్మం అందురు.

కూడిక చేయుము.

(క) 12 + 5 (ఖ) 45 + 12

రెండింటి విషయాలలో కూడిక సహజ సంఖ్య అగునా ? దీని నుండి సహజ సంఖ్యల యొక్క సంకలన ఏ ధర్మాన్ని పాటించెనని తెలుస్తుంది.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- నీవు మరియు నీ స్నేహితుడు ఒక దగ్గర కూర్చొండి. పది సంఖ్యల కార్డులను తీసుకొండి.
- తీసుకున్న పది కార్డులలో రెండు సంఖ్యలను మీ నోట్‌బుక్‌లో రాయండి. ఆ రెండు సంఖ్యలను ఆ వరుస క్రమంలో కూడిక చేయండి. లభించిన ఫలితంను నోట్‌బుక్‌లో రాయండి.

  ఉదాహరణకు 8 + 6 = 14
- మీ స్నేహితున్ని ఆ రెండు సంఖ్యలను తిరగవేసి కూడిక చేసి ఆ విలువను నోట్‌బుక్‌లో రాయమని చెప్పుము. ప్రస్తుతం అతడుఅ రాస్తాడు, 6 + 8 =14
- రెండు రకాల కూడిక ప్రక్రియల విలువలను సరిచూడండి.
- ప్రతీసారి రెండేసి సంఖ్యలను తీసుకొని ఈ విధంగా చేయండి. ఏమి లభించెనో చెప్పండి.

రెండు సహజ సంఖ్యల వరుసను మార్చి కూడిక చేసిన విలువ సమానంగా ఉండును. దీనిని సంకలనంలో స్థిత్యంతర (వినిమయ) ధర్మం అందురు.

ఈ క్రింది వాటిని నోట్‌బుక్‌లో రాసి ఖాళీలను పూరించండి.

క) 2038 + 352 = 352 + ______   ఖ) 365 + ______ = 148 + 365

స్వయంగా చేసి చూడండి

- మీ నోట్‌బుక్‌లో లేక తరగతి వరండాలో మూడు గదులను గీయండి. వాటిని మొదటి, రెండవ మరియు మూడవ అని పేర్లు పెట్టండి. ఇప్పుడు 10 కార్డులనుయిన తీసుకొండి.

మొదటి పర్యాయం :

4   5   7

- ప్రతీ గదిలో ఒక్కొక్క సంఖ్యకార్డు ఉంచండి.
- ఇప్పుడు మొదటి మరియు రెండవ గదులలో గల రెండు సంఖ్యలను కలపండి. విలువను రాయండి. లభించిన విలువను మూడువ గదిలో గల సంఖ్యతో కలపండి. దీనిని ఇలా రాయవచ్చు. (4+5)+7=16
- ఇప్పుడు రెండువ మరియు మూడవ గదులలో గల సంఖ్యలను కలపండి. విలువ ఎంత వచ్చెనో దానిని మొదటి గదిలో గల సంఖ్యతో కలపండి. మొత్తం విలువ ఎంత వచ్చెను. దీనిని (4+5)+7=16 గా రాయవచ్చును.

రెండవ పర్యాయం :

- ఇప్పుడు మరో మూడు కార్డులను తీసుకొని మూడు గదులలో పెట్టి పై వలె చేయండి.
- మొదటి మరియు రెండవ పర్యాయాల పని వలన ఏమి లభించెను ?

4,5 మరియు 7 నకు కూడిక చేయుటకు మొదటి పద్ధతిలో 4 మరియు 5ల కూడికతో 7ను కలుపుట జరిగినది కాని రెండవ పద్ధతిలో 4ఆత 5 మరియు 7 ల కూడికను కలుపుట జరిగినది. ప్రతీ దానిలో మొత్తము 16 అగును.

$$(4 + 7) + 5 = 4 + (7 + 5)$$

అందువలన మూడు సంఖ్యలను కూడిక చేయు పద్ధతిని మనం తెలుసుకున్నాం. మూడు సహజ సంఖ్యల కూడిక విషయంలో మనం ఏ నియమాన్ని చూసామో దానిని సహచర ధర్మం అని అందురు.

4.8.3. వ్యవకలన సంవృత ధర్మం

రండి వ్యవకలన లేక తీసివేత కొరకు ఒక ఉదాహరణ చూద్దాం.

- ఒక సుద్దల బాక్సులో 8 సుద్దలు గలవు.
- ఆ బాక్సు నుండి 3 సుద్దలను తీసుకొనుటకు నీ స్నేహితునికి చెప్పుము.
- అతను 3 సుద్దలను తీసిన తరువాత ఇంకా ఎన్ని సుద్దలు గలవో చూద్దాం.

8 సుద్దల నుండి ఒక పిల్లడు 1 సుద్దను తీసుకొనెను. అనగా 8 నుండి 1 తగ్గెను. 8 నుండి 1 తక్కువ అనగా 8 యొక్క ముందు సంఖ్య = 7.

7 నుండి మరల 1 సుద్దను తీసుకొనెను. అనగా 7 నుండి 1 తీసెను. 7 నుండి 1 తక్కువ అనగా 7 యొక్క ముందు సంఖ్య = 6.

అదే విధంగా పిల్లడు మరో సుద్దను తీసుకొన్న యడల మిగిలిన సుద్దల సంఖ్య = 6 కంటె 1 తక్కువ లేక 6 యొక్క ముందు సంఖ్య = 5. కనుక 8-3=5

అదే విధంగా మనకు లభించును.

8 - 1 = 7
8 - 2 = 6
8 - 3 = 5
8 - 4 = 4
8 - 5 = 3
8 - 6 = 2
8 - 7 = 1

> తెలుసా ?
> ఏదైయిన సంఖ్య నుండి 1 తీసిన దాని ముందు సంఖ్య వచ్చును.
> 5 - 1 = 4

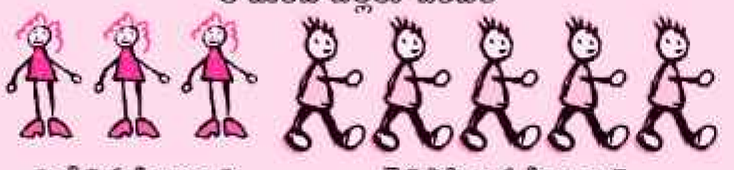
మన సహజ సంఖ్యలలో 1 అన్నిటి కంటె మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య 8-8 = ఎంత ? దీని విలువ రాయుటకు మన దగ్గర గల సంఖ్యలలో ఏ సంఖ్యనూ లేదు. అందువలన మనం తెలుసుకున్నాం 8 నుండి 8 లేక 8 కంటె పెద్దనది ఏ సంఖ్య కూడా తీసివేయలేం. మరో విధంగా చెప్పాలంటే సహజ సంఖ్యల మధ్యలో ఒక సంఖ్య నుండి దాని కంటె చిన్న సంఖ్యను తీసివేయగలం మరియు అది ఒక సహజ సంఖ్య అగును.

కూడికతో తీసివేత సంబంధం

క్రింది గల చిత్రంలో మనం చూస్తున్నాం -

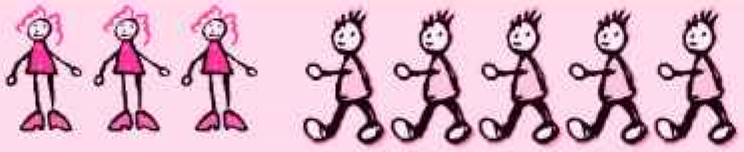
కొందరు పిల్లలు ఉండిరి. వారి నుండి కొందరు వెళ్లిపోయిరి మరియు కొందరు మిగిలిరి.

8 మంది పిల్లలు ఉంటిరి



$8 - 5 = 3$

మిగిలిన పిల్లలు 3   వెళ్లిపోయిన పిల్లలు 5



$3 + 5 = 8$

మిగిలిన పిల్లలు 3   మరల వచ్చిన పిల్లలు 5

మిగిలిన పిల్లలతో తిరిగి వచ్చిన పిల్లలు, 3+5=8

కనుక మనం చూసాం, 8-5=3 తీసివేత అనగా కూడిక 3+5=8 అగును.

- రండి, రెండు సహజ సంఖ్యలను తీసుకొని పెద్ద సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యను తీసివేద్దాం

అనుకుందాం రెండు సంఖ్యల 8 మరియు 10.

10 - 8 = 2   8 -10 = ఎంత ?

మనం ముందు తెలుసుకున్నాం చిన్న సంఖ్య నుండి పెద్ద సంఖ్యను తీసివేయలేం అని.

అందువలన 8-10 కొరకు మన వద్ద సమాధానం లేదు.

అందువలన సంకలనం వినిమయ లేక స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటిస్తుంది కాని వ్యవకలనం వినిమయ నియమాన్ని పాలించదు.

5+8+3 ని సమాధానం చేయునపుడు మనం సహచర ధర్మాన్ని ఉపయోగిస్తాం కారణమేమనగా

$(5+8) + 3 = 5 + (8+3)$ ।

అయిన 9-5-2 విషయంలో ఏమౌతు,దో చూద్దాం.

$(9-5)-2 = 4-2 = 2$ $9-(5-2) = 9-3 = 6$

అందువలన $(9-5)-2 \neq 9-(5-2)$

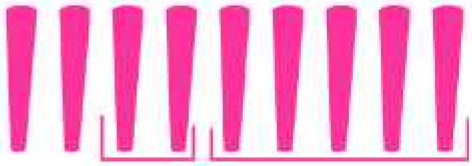
అందువలన తీసివేతలో సహచర ధర్మం వర్తించదు.

> **తెలుసా ?**
> సమానం కాదు అనే దాన్ని ≠ గుర్తు ద్వారా సూచించబడును. ఉదా. $4-3 \neq 0$

అయిన 9-5-2 ను ఏ విధంగా సమాధానం చేద్దాం ?

నిజ జీవితంలో ఒక సంఘటనను తీసుకొందాం. దీనిలో 9-5-2 ను సమాధానం చేయుట అవసరం అగును.

సుద్దల పెట్టెలో 9 సుద్దలు గలవు. అందులో నుండి సుమంత్ తన తరగతి కొరకు 5 సుద్దలను తీసుకొనెను మరియు రశ్మి తన తరగతి కొరకు 2 సుద్దలను తీసుకొనెను. అయిన ఇంకెన్ని సుద్దలుయిన మిగిలెను ?



సుమంత్ 5 సుద్దలను తీసుకున్న తరువాత మిగిలినవి -

$$9 - 5 = 4$$

రశ్మి 2 సుద్దలను తీసుకున్న తరువాత మిగిలినవి -

$$4 - 2 = 2$$

ఇచ్చట మనం చూసాం,

9-5-2 లో గల మొదటి తీసివేత మొదటిగా జరిగెను మరియు రెండు తీసివేత తరువాత జరిగెను. అందువలన 9-5-2=(9-5)-2=4-2=2 వేరే రకంగా పనిని చేయవచ్చును. 9 సుద్దలు ఉండెను. సుమంత్ 5 తీసుకొనెను మరియు రశ్మి 2 తీసుకొనెను సుమంత్ మరియు రశ్మి కలిపి (5+2) తీసుకొనెను. 9 నుండి (5+2) తీసిన తరువాత మిగిలినవి 9-(5+2)

$$\therefore 9 - 5 - 2 = 9 - (5+2)$$
$$= 9 - 7 = 2$$

మీరు అదే విధంగా 6-1-2 కొరకు నిజ జీవితంలో ఒక సంఘటనను ఉదాహరణగా తీసుకొని తీసివేయుము.

అభ్యాసం 4.2

1. సహచర ధర్మంను ఉపయోగించి రెండు పద్ధతులలో కూడిక చేయుము.

క) 12 + 9 + 8 = (12 + 9) + 8 = ... + ... = ...

ఖ) 12 + 9 + 8 = 12 + (9 + 8) = ... + ... = ...

2.క) సహజ సంఖ్యలలో ప్రతీ సంఖ్య దాని ముందు సంఖ్య కంటె ఎంత అధికం ?

ఖ) అన్నిటికంటె పెద్ద సహజ సంఖ్య ఏది చెప్పగలరా ?

గ) అన్నిటికంటె పెద్ద సహజ సంఖ్య ఏది చెప్పగలరా ?

ఘ) ఒక పెద్ద సంఖ్యను అనుకొనుము. దాని తరువాత సంఖ్య మీరు అనుకున్న సంఖ్య కంటె ఎంత అధికము ?

3. 536+718+464ల కూడిక చేయుటకు ఇవ్వడమైనది. దీనిని స్థిత్యంతర (వినిమయ) మరియు సహచర ధర్మంను ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరించండి.

4. ఈ క్రింది కూడికలను సరళతరముగా అగుటకు సంఖ్యలను అమర్చి కూడిక చేయుము.

క) 417 + 384 + 583 గ) 654 + 333 + 346

ఖ) 2536 + 1205 + 7464 ఘ) 2062 + 353 + 1438 + 547

5. ఈ క్రింది తీసివేతను కూడిక రూపంలో రాయండి.

క) 9 - 5 = 4 ఖ) 12 - 7 = 5 గ) 316 - 285 = 31

6. ఒక గ్రామంలో 1500 మంది ప్రజలు గలరు. ఒకవేల ఆ గ్రామంలో పురుషుల సంఖ్య 489 మరియు మహిళల సంఖ్య 512 అయిన పిల్లల సంఖ్య ఎంత ?

7. శోభన్ వద్ద 52, 718 రూ.లు ఉండెను. అతను 500 రూపాయలను అప్పు తీర్చెను మరియు 2500 రూ.లుతో ఒక సైకిలు కొనెను. అయిన అతని వద్ద ఇంకా ఎంత సొమ్ము ఉండెను ?

4.8.4. గుణకార ప్రక్రియ మరియు సంవృత ధర్మము :

క) గుణకార ప్రక్రియ

మీకు తెలుసు - 5+5 నకు రాయవచ్చు 5 x 2

5+5+5 నకు రాయవచ్చు 5 x 3

5+5+5+5 నకు రాయవచ్చు 5 x 4

అనగా ఒక సహజ సంఖ్యను ఆ సంఖ్యతో ప్రతీసారి కలుపుటను గుణకారముగా చూపవచ్చును.

5 x 2 యొక్క విలువనుఅ తెలుసుకొనుటకు మనం 5+5 మొత్తంను నిర్ణయించుదుము.

అదే విధంగా 5 x 3 యొక్క విలువ తెలుసుకొనుటకు మూడు 5లను కలపవలెను. అనగా 5 x 3 యొక్క అర్థం మూడు 5లను కలుపుట.

అందువలన సాధారణంగా మనం చెప్పుదుము -

$$4 \times 7 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28$$

గుణఫలంను కూడికలోనికి మార్చి రెండు సంఖ్యల గుణఫలంను మనం నిర్ణయించగలం మరియు ఆ గుణఫలమును గుణన ఎక్కములలో రాసి గుర్తించుదుము. మనం గుర్తుంచిన ఎక్కములను ఉపయోగించి పెద్ద పెద్ద సంఖ్యల గుణఫలం చేయుదుము.

గుణకార ప్రక్రియను సంబంధించి అనేక ధర్మాలు :

క) ఈ క్రింది గల గుణఫలంను చేయుము.

5 x 7 = 8 x 6 = 12 X 9 = 14 x 12 =

ఈ గుణఫలం పొందిరో అవి ఏ రకమైన సంఖ్యలు ?

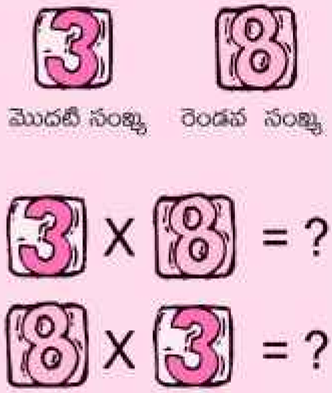
మనం చూశాం

రెండ సహజ సంఖ్యల గుణఫలం ఒక సహజ సంఖ్య.

అనగా గుణన ప్రక్రియలో సంవృత ధర్మం జరుగును.

(ఖ) స్వయంగా చేసి చూడండి

- ఏవైనా రెండు సహజ సంఖ్యలను నోట్‌బుక్‌లో రాయండి. వాటిలో ఒక దానిని మొదటి సంఖ్య మరియు మరో దానిని రెండువ సంఖ్యగా పేరు పెట్టుము.
- మొదటి సంఖ్యనకు రెండువ సంఖ్యను గుణించి గుణఫలంను నిర్ణయించుము.
- అదే విధంగా ఇప్పుడు రెండవ సంఖ్యనకు మొదటి సంఖ్యను గుణించి గుణఫలమును నిర్ణయించుము. ఏమి లభించెను ?
- ఇప్పుడు మరో రెండు సహజ సంఖ్యలను తీసుకొని ఈ విధంగా చేయండి.



ప్రతీసారి మనకు తెలిసినది ఏమనగా సంఖ్యలు రెండు వరుసలను మార్చి గుణించిన గుణఫలము సమానంగా ఉండును.

మనం తెలుసుకున్నాం, రెండు సంఖ్యలను వరుస మార్చి గుణించిన గుణఫలము మారదు.

అనగా **సహజ సంఖ్యలలో గుణన ప్రక్రియ వినమయ లేక స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాలించును.**

గ) క్రింద చేయబడిన పనిని పరిశీలించండి.

మూడు బుట్టలలో ఒకొక్క దానిలో నాలుగేసి బంతులుఅ గలవు. అవి క, ఖ, గ, ఘ గా పేర్లు పెట్టబడినది.

ఈ క్రింద నాలుగు బుట్టలు గలవు. పైనగల బుట్టలలో (గంపలలో) గల 'క' పేరు గల బంతులను తెచ్చి ఈ క్రింది బుట్ట (గంప)లో ఉంచండి.

పైన గల అన్ని బుట్టల నుండి 'ఖ' పేరు గల బంతులను తెచ్చి క్రింది గల రెండువ బుట్టలో ఉంచండి.

పైన గల అన్ని బుట్టల నుండి 'గ' పేరు గల బంతులను తెచ్చి క్రింది గల మూడువ మరియు 'ఘ' పేరు గల బంతులను తెచ్చి క్రింది గల నాల్గవ బుట్టలో ఉంచండి.

మూడు బుట్టలలో గల మొత్తం బంతులు = 4 X 3 = 12

క్రింది గల నాలుగు బుట్ట (గంప)లలో గల మొత్తం బంతులు = 3 X 4 = 12

అందువలన మనం చూశాం, ప్రతీ బుట్టలో నాలుగు లెక్క బంతులుఅ ఉండి మూడు బుట్టలలో గల మొత్తం బంతులు ఎన్ని అగునో ప్రతీ బుట్టలో మూడు లెక్క బంతులు ఉండి, నాలుగు బుట్టలలో గల మొత్తం బంతులు అని అగును.

4 X 3 = 3 X 4

ఈ పని వలన గుణన ప్రక్రియలో ఏ ధర్మాన్ని పరీక్షించి చూసిరి ?

ఘ) ఒక మాట వినండి -

రాజు యొక్క ధనాగారము నుండి ఒక పెట్టె దొంగలించబడను. రక్షక భటులు రాజునకు దొంగతనము గూర్చి తెలియజేసిరి మరియు దొంగలించబడిన పెట్టెలో గల బంగారం గూర్చి లెక్క చెప్పిరి.

ధనాగార రక్షకుల చెప్పిరి -

పెట్టెలో 5 వరుసలు ఉండెను. ప్రతీ వరుసలో నాలుగు గదులు మరియు ప్రతీ గదిలో 3 బంగారం నాణేలు గలవు.

మంత్రి లెక్కించెను -

ఒక గదిలో గల నాణేల సంఖ్య = 3

4 గదులలో గల నాణేల సంఖ్య = 3 X 4 = 12

∴ ఒక వరుసలో గల నాణేల మొత్తం = 12

అయిన 5 వరుసలలో నాణేలు సంఖ్య = 12 X 5 = 60

లేక దీనిని మనం రాద్దాం, (3 X 4) X 5 = 60

రాజు స్వయంగా లెక్కించెను -

ఒక వరుసలో గల గదుల సంఖ్య = 4

5 వరుసలలో గల గదుల సంఖ్య = 4 X 5 = 20

ఒక గదిలో గల నాణేలు = 3

20 గదులలో గల మొత్తం నాణేలు = 20 X 3 = 60

కనుక దీనిని మనం రాద్దాం : (4X5)X3=20X3=60

రాజు మరియు మంత్రి లెక్క ప్రకారం లభించిన నాణేల సంఖ్యలో బేధంను చూసారా ?

కాని ఇద్దరి యొక్క పని వేరుగా ఉన్నది. కాని జవాబు సమానం.

దీని నుండి తెలుసుకున్నాం -

(3 X 4) X 5 = 3 X (4 X 5)

మీరు స్వయంగా చేయండి.

$(3 \times 4) \times 5 = ?$

$3 \times (4 \times 5) = ?$

$(3 \times 5) \times 4 = ?$

ప్రతీ దాని యొక్క గుణఫలం సమానంగా ఉండును. వీటికి చూసిన ఏమి అర్థం అయ్యెను. దీని మనం తెలుసుకున్నాం, ముందు సహజ సంఖ్యలను గుణించునపుడు మొదటి ఏవైనా రెండింటిని గుణించి ఆ గుణఫలంతో 3వ సంఖ్యను గుణించవలెను.

మూడు సంఖ్యల గుణఫల విషయంలో, ఈ ధర్మాన్ని సహచర నియమం అందురు.

సహచన నియమం :

మూడు సహజ సంఖ్యలను గుణించునపుడు ఆ మూడు సంఖ్యలలో ఏవైనా రెండు సంఖ్యలను మొదట గుణించి, ఆ గుణఫలంను మూడువ సంఖ్య ద్వారా గుణించవలెను.

(ట) స్వయంగా చేసి చూడండి

"నీలో నేను దాగున్నాను"

- మీరు ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్యను అనుకొండి.
- అనుకున్న సంఖ్యను 1 చేత గుణించండి.
- ముందు అనుకున్న సంఖ్య మరియు 1చే గుణించిన తరువాత లభించిన గుణఫలంను నల్లబల్లపై రాయండి.
- ఏ సంఖ్యతో 1ని గుణించిరో ఆ సంఖ్య మరియుఅ గుణఫలంను చూడుము మరియు వాటిలో గల సంబంధమును రాయుము. ఏమి చూసిరి ?
- మరొక సంఖ్యను తీసుకొని దానిని 1చే గుణించి గుణఫలంను కనుగొనుము. ఏమి చూసారు ?

గుణకార తత్సమాంశ ధర్మం :

ఏదైనా సహజ సంఖ్య X 1 = 1 X ఆ సంఖ్య = ఆ సంఖ్య

> తెలుసా ?
>
> 1ని గుణకార తత్సమాంశం అందురు.

4.7.5. గుణన మరియు కూడిక సంవృత ధర్మం :

మొదటి సంఘటన : పూజ మరియు రిపున్‌ల జన్మదినం ఈనాడు. పూజ వయస్సు 12 మరియు రిపున్ వయస్సు 88 వాళ్లకు చాక్లెట్లు ఇవ్వబడును. ప్రతీ ఒక్కరికి వాళ్ల వయసుకు 4 వంతుల చాక్లెట్లు ఇవ్వబడును. ప్రతీ ఒక్కరు ఎన్ని చాక్లెట్లు పొందెదరు ?

మొత్తం వాళ్లకు ఎన్ని చాక్లెట్లు ఇవ్వచును ?

జవాబు : పూజకు లభించిన చాక్లెట్లు = 12 = 4 = 48

రిపున్‌కు లభించిన చాక్లెట్లు = 8 X 4 = 32

∴ ఇద్దరకు లభించిన మొత్తం చాక్లెట్లు = 48 + 32 = 80

దీనిని క్రింది విధంగా కూడా చేయవచ్చును. -

వాళ్లకు ఇవ్వబడిన మొత్తం చాక్లెట్లు = (12 + 8) X 4

= 20 X 4 = 80

అందువలన మనం చూసాం, 12 X 4 + 8 X 4 = (12 + 8) X 4

రెండవ సంఘటన :

ఒక ఉద్యోగి ప్రతీ దినం మధ్యాహ్న భోజనం కొరకు 20 రూ.లు మరియు టీ త్రాగుటకు 5 రూ.లు పొందును. అయిన అతడు నాలుగు దినముల మధ్యాహ్న భోజనం మరియు టీల కొరకు ఎంత సొమ్ము పొందును ?

ఒకటవ రకపు లెక్క :	రెండువ రకపు లెక్క :
మధ్యాహ్న భోజనం మరియు టీ కొరకు అతడు 1 దినం నకు పొందనవి = (20 + 5) రూ.లు మధ్యాహ్న భోజనం మరియు టీ కొరకు అతను 4 దినములకు పొందినవి = (20 + 5) X 4 రూ. = 25 X 4 = 100 రూ.లు	మధ్యాహ్న భోజనం కొరకు 4 దినములకు పొందినవి = 20 X 4 రూ.లు టీ కొరకు 4 దినములకు పొందినవి = 5 X 4 రూ.లు 4 దినముల మధ్యాహ్న భోజనం మరియు టీల కొరకు మొత్తం పొందినవి = 20 X 4 + 5 X 4 = 80 + 20 = 100 రూ.లు

అందువలన మనం చూసాం - (20 + 5) x 4 = 20 x4 + 5 x 4

ఈ విధమైన మరో రెండు సంఘటనలను రాయండి. అవసరమైనచో స్నేహితుడు లేక ఉపాధ్యాయుని సహాయం తీసుకొండి

మనం చూశాం :

మూడు సహజ సంఖ్యలలో మొదటి మరియు రెండవ సంఖ్యల మొత్తం నకు మూడువ సంఖ్యచే గుణించిన ఏమి లభించునో, మొదటి దానిని మూడవ దానిచే మరియు రెండవ దానిని మూడువ దానిచే గుణించి ఆ రెండు గుణఫలంలను కలిపిన కూడా అదే లభించును.

గుణకారం మరియు కూడిక సంబంధించిన పై ధర్మాన్ని సంకలనంలో గుణకారం యొక్క విభాగ ధర్మం అందురు.

అదే విధంగా తీసివేతలో కూడా గుణకారం యొక్క విభాగ ధర్మం గలదు. దీనికి ఉదాహరణ

(8 - 5) x 4 = 8 x 4 - 5 x 4

దీనిని స్వయంగా పరీక్షించి చూడండి.

అభ్యాసం 4.3

1. ఈ క్రింది వాక్యాల ప్రక్కన సహజ సంఖ్యల ధర్మాలు రాయండి.

క) 5 x 8 = 8 x 5

ఖ) రెండు సహజ సంఖ్యల గుణఫలం ఒక సహజ సంఖ్య అగును.

గ) (8 x 5) x 3 = 8 x (5 x 3) = (8 x 3) x 5

ఘ) 5 x 1 = 1 x 5 = 5, 12 x 1 = 1 x 12 = 12, 308 x 1 = 1 x 308 = 308

ఙ) (7 + 5) x 3 = 7 x 3 + 5 x 3

చ) (12 - 4) x 5 = 12 x 5 - 4 x 5

2. క్రింది ఉదాహరణ చూడండి. అదే విధంగా మిగిలిన గుణనప్రక్రియలను చేయండి.

ఉదాహరణ : $37 \times 14 = (30 + 7) \times 14$

$= 30 \times 14 + 7 \times 14$

$= 420 + 98$

$= 518$

క) 118×12 ఖ) 98×16 గ) 206×18 ఘ) 512×28

3.క) సహజ సంఖ్యల మొత్తంలో ఏ సంఖ్యను గుణకార తత్సమాంశం అందురు ?

ఖ) ఏ ధర్మం మనకు మూడు సహజ సంఖ్యల గుణఫలంను నిర్ణయించుటకు సహాయం చేయును ?

గ) $12 \times 7 \times 5$ యొక్క గుణఫలంను కనుగొనుటకు సంఖ్యలను పై విధంగా సహచర నియమంలో రాయండి.

4. విభాగ ధర్మం అనుసరించి సరళం చేయండి.

క) $(15 + 5) \times 6$ ఖ) $(12 + 7) \times 5$ గ) $4 \times (8 + 6)$

ఘ) $(15 + 12) \times 4$ ఙ) $8 \times (17 - 9)$ చ) $(324 - 220) \times 5$

5. పై ధర్మాన్ని ఉపయోగించి సరళం చేయండి.

క) $398 \times 7 + 398 \times 3$

ఖ) $8265 \times 163 + 8265 \times 37$

గ) $15625 \times 15625 - 15625 \times 5625$

ఘ) $887 \times 10 \times 461 - 361 \times 8870$

6. ఒక దుఖాణదారుడు ఒక వారంలో 9785 రూపాయల ప్రకారం 115 టెలివిజన్‌లను అమ్మెను. అయిన అతడు మొత్తం అమ్మిన ప్రకారం ఎంత సొమ్ము పొందెను ?

7. ఒక వ్యాపారస్తుడు ప్రతీ రిక్షాలో మూడు బస్తాల బియ్యం మరియు 8 బస్తాల పప్పు వేసి సంతకు పంపించెను. ఒక సంత కొరకు అతడు 8 రిక్షాలలో బియ్యం మరియు పప్పు బస్తాలను పంపెను. అయిన అతడు మొత్తము ఎన్ని బస్తాల వస్తువులను సంతకు పంపించెను ?

4.8.6. భాగక్రియ మరియు సంబంధించిన సంవృత ధర్మాం.

రండి ఒక సంఘటనను పరిశీలిద్దాం. విద్యాలయంలో జెండా ఎగుర వేయుటకు 8 మీటర్లు పొడవు గల త్రాడు అవసరం. ఆఫీస్‌లో పెద్ద త్రాడు గలదు. దాని పొడవు 42 మీటర్లు.

రమేష్ చెప్పెను, ఆఫీసులో గల పెద్ద త్రాడు నుండి 8 మీటర్లు పొడవు గల త్రాడును కోసి తేవలెను.

రిహాన్ చెప్పెను, పెద్ద త్రాడు నుండి 8 మీటర్ల పొడవు గల ఎన్ని ముక్కలు లభించునో అన్ని కోసి ఉంచినచో ఎప్పుడు అవసరమగునో వాటి నుండి ఒక ముక్క తెచ్చిన జెండా ఎగురవేయుట జరుగును.

8 మీటర్ల పొడవు త్రాడును కోయు పని అరంభమయ్యెను. కాని సీమా కాగితం మరియు పెన్ను తీసుకొని లెక్కించుటకు పూనుకొనెను. పెద్ద తాడు పొడవు 42 మీటర్లు.

- 8 మీ. పొడవు గల త్రాడుముక్కను కోసిరి. ఇంకెంత త్రాడు మిగిలెను ?
- మరో 8 మీ. పొడవు గల త్రాడుముక్కను కోసిరి. ఇంకెంత త్రాడు మిగిలెను ?
- ఇంకో ముక్కను కోసిరి. అయిన ఇంకెంత త్రాడు మిగిలెను ?
- మళ్లీ ఇంకో ముక్కను కోసిరి. ఇంకెంత త్రాడు మిగిలెను ?
- మళ్లీ ఇంకో త్రాడు ముక్కను కోసిరి. ఇంకెంత త్రాడు మిగిలెను ?

42 మీ.
-8 మీ. (1 ముక్క)
34 మీ.
-8 మీ. (2వ ముక్క)
26 మీ.
-8 మీ. (3వ ముక్క)
18 మీ.
-8 మీ. (4వ ముక్క)
10 మీ.
-8 మీ. (5వ ముక్క)
2 మీ.

త్రాడును కోసే పని పూర్తి కాకముందు సీమా తన లెక్కను చూసి చెప్పెను - 8 మీ. పొడవు గల 5 ముక్కలు త్రాళ్లు లభించును మరియు 2 మీ. పొడవు గల ముక్క మిగులును.

ప్రస్తుతం అందము చూసిరి జెండాను ఎగుర వేయుటకు 5 త్రాడు ముక్కలు లభించెను. మరియు 2 మీ. త్రాడు ముక్క మిగిలెను. సోమేన్, సీమా యొక్క లెక్క చూసెను. చివరకు అతడు సుద్ద ముక్కను తీసుకొని వెళ్లి నల్లబల్లపై లెక్క చేసెను.

5 త్రాడు ముక్కలు లభించెను
8 | 42
-40
2 మీ. త్రాడు మిగిలెను.

లెక్కచేసి చెప్పెను - కోసే ముందు మనం తెలుసుకొందుము. మనకు జెండా ఎగుర వేయుటకు ఎన్ని ముక్కలు లభించును మరియు ఇంకెంత మిగులును.

మనం చూసాం -

42 మీ. నుండి వరుసగా 8 మీ.ను ప్రతీసారి తీసివేసిన ఎంత లభించెనో, 42 మీ.కు 8 మీ. ద్వారా భాగించిన కూడా అదే లభించును.

జగదీష్ చెప్పెను - ఏ రెండు మీటర్ల పొడవు గల త్రాడు ముక్క మిగిలెనో, దానితో ఏ పని అగును ? ఒకవేల మనం త్రాడును సమానంగా 5 ముక్కలుయిన చేసినచో అప్పుడు కొంచెం కూడా త్రాడు నష్టం కాదు.

రిహాన్ అడిగెను - అది ఎలా చేయగలం ?

జగదీష్ ఏమి చేసినో చూద్దాం - అతని యొక్క స్నేహితుడు శరత్‌కు కొంత దూరంలో నిలుచో పెట్టెను. తరువాత త్రాడును 5 చుట్లు అగునట్లు తన చేయి మరియు శరత్ చేతితో ఉంచెను. తరువాత ఇద్దరి చేతుల వద్ద త్రాడు యొక్క మడతల స్థానంలో కోయుటకు చెప్పెను.

ప్రస్తుతం త్రాడు 5 సమాన భాగాలుగా కోసిరి.

జగదీష్ చెప్పెను - చూడండి. దీనిలో త్రాడు కొంచెం కూడా నష్టం కాలేదు.

సీమా అడిగెను - ప్రతీ ముక్క పొడవు ఎంత ?

కొలిచిన తరువాత చూడడం జరిగింది ప్రతీ ముక్క పొడవు 8 మీ. 40 సెం.మీ.

సామేన్ చెప్పెను - కొలత లేకుండా మనం ఏ విధంగా ప్రతీ దాని పొడవు తెలుసుకోగలం. చూడండి

త్రాడు మొత్తం పొడవు 42 మీ. లేక 420 సెం.మీ. దీనికి 5 సమాన భాగాలుగా కోయడం జరిగింది.

కనుక ప్రతీ ముక్క పొడవు $= \frac{4200}{5}$ సెం.మీ.

= 840 సెం.మీ. లేక 8 మీ. 40 సెం.మీ.

రిహాన్ చేసిన పని వలన చూశాం - భాగక్రియ అనగా ఒక పెద్ద సంఖ్య నుండి ఒక చిన్న సంఖ్య యొక్క వరుస తీసివేత.

జగదీష్ పని వలన చూశాం - భాగక్రియ గుణఫలం యొక్క వ్యతిరేక పని. అనగా ఏ సంఖ్య యొక్క 5 వంతులు 42 అగునో దానిని నిర్ణయించుట భాగక్రియ

మొదటి రకపు భాగక్రియలో మిగులు లేక భాగశేషం వచ్చును.

రెండువ రకపు భాగక్రియలో భాగశేషం ఉండదు.

మొదటి రకము భాగక్రియలో

42 అవుతుంది భాజ్యం	(ఏ సంఖ్య నుండి చిన్న సంఖ్యను వరుసగా తీశాం)
8 అవుతుంది భాజకం	(42 నుండి ప్రతీసారి దీనిని తీశాం)
5 అవుతుంది భాగఫలం	(42 నుండి ఎన్ని సార్లు 8 మీ. తీశాం)
2 అవుతుంది భాగశేషం	(42 నుండి 8 మీ. 5 సార్లు తీసిన తరువాత మిగిలినది)

భాగక్రియను చేసినపుడు మనం చూశాం, 42 - 8 X 5 = 2

భాజ్యం - భాజకం X భాగఫలం = భాగశేషం

రెండువ రకపు భాగక్రియలో

42 అవుతుంది లవం లేక మొదటి సంఖ్య

5 అవుతుంది హారం లేక భాగించిన సంఖ్య

$\frac{42}{5}$ మీ. లేక 8 మీ. 40 సెం.మీ అవుతుంది ఒకొక్క భాగం

ప్రతీ భాగం X మొత్తం భాగాలు = మొదటి సంఖ్య

ఇచ్చట ప్రతీ భాగం ఒక భిన్నం అగును. అందువలన ఈ విధమైన భాగక్రియ సహజ సంఖ్యలలో అంతర్భాగం కాదు.

సహజ సంఖ్యల సమూహంలో భాగక్రియ గూర్చి కొన్ని నియమాలు

- సహజ సంఖ్యల సమూహంలో భాగక్రియ అనగా ఒక పెద్ద సంఖ్య నుండి ఒక చిన్న సంఖ్య యొక్క వరుస తీసివేత.
- పెద్ద సంఖ్య భాజ్యం, తీసివేసిన చిన్న సంఖ్య భాజకం, ఎక్కువగా ఎన్ని సార్లు తీసివేయబడునో అది భాగఫలం, మరియు మిగిలిన సంఖ్య భాగశేషం అగును.
- భాగశేషం ఎల్లప్పుడు భాజకం కంటె చిన్నది.

4.8.7. భాగక్రియలో వివిధ నాయమాలు

క) సహజ సంఖ్యల విభాగనీయత

ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్యను తీసుకొందాం. అది 5 కంటె పెద్దది అవుతుంది. మనం తీసుకున్న సంఖ్య 15 అనుకుందాం. దానిని 2,3 మరియు 5ల ద్వారా వేరు వేరుగా భాగిద్దాం.

$$2\overline{\smash{)}15}\; = 7,\; 15-14 = 1 \qquad 3\overline{\smash{)}15}\; = 5,\; 15-15 = 0 \qquad 5\overline{\smash{)}15}\; = 3,\; 15-15 = 0$$

మనం చూశాం - 2 ద్వారా భాగించునపుడు 1 భాగశేషం వచ్చెను. కాని 3 లేక 5 ద్వారా భాగించినపుడు సున్నా భాగశేషం వచ్చెను లేక ఏ భాగశేషం లభించలేదు.

ఈ విషయం మనం చెప్పెదం - 15, 2 ద్వారా భాగింపబడును కాని 3 మరియు 5 ద్వారా భాగింపబడును. అందువలన మనం చూశాం -

ఒక సహజ సంఖ్య దాని కంటె చిన్న సంఖ్య ద్వారా ఎల్లప్పుడు భాగింపబడును. అనగా కొన్ని భాగక్రియలు చివరకు కొంత భాగశేషాలు మిగులును, కొన్ని భాగక్రియల విషయంలో ఏ భాగశేషం మిగలదు.

(ఖ) ఒక సహజ సంఖ్యకు ఆ సంఖ్య ద్వారా భాగక్రియ :

5 సుద్దలు గల బాక్సు నుండి 5 సుద్దలకు తీసుకున్న తరువాత సుద్దలు మిగలవు.
అందువలన 5 నుండి 5 ఒకే సారి తీయగలం.
ఫలితంగా మనం తెలుసుకున్నాం, 5 ÷ 5 = 1
మరియు భాగశేషం ఉండదు.
అదే విధంగా 18 ÷ 18 = 1
637 ÷ 637 = 1
దీని నుండి మీరు ఏమి తెలుసుకున్నారు ?
మనం చూశాం, ప్రతీ సహజ సంఖ్యకు అదే సంఖ్యచే భాగించిన భాగఫలం 1 అగును.

> తెలుసా ?
> సహజ సంఖ్యకు విషయంలో ఏదైనా సంఖ్య ÷=1. అందువలన ప్రతీ సహజ సంఖ్య ఆ సంఖ్య ద్వారా భాగించును.

గ) ఒక సహజ సంఖ్యను 1 ద్వారా భాగక్రియ :

8 సుద్దలు గల బాక్సు నుండి ప్రతీసారి ఒకొక్క సుద్దను తీసిన, 8 సార్లు తీసిన తరువాత అన్ని సుద్దలు అయిపోవును. అందువలన 8 ÷ 1= 8
అదే విధంగా 31 ÷ 1 = 32
642 ÷ 1 = 642
ఏమి పరిశీలిస్తున్నారో చెప్పండి ?

> తెలుసా ?
> సహజ సంఖ్యల విషయంలో ఏదైన సంఖ్య ÷ 1 = అదే సంఖ్య

అభ్యాసం 4.4

1. ప్రతీ దానిని భాగక్రియ చేసి భాగశేషంను కనుగొనండి మరియు సరిగ్గా ఉందా లేదా పరీక్షించండి.

క) 7772 ÷ 58　　ఘ) 6906 ÷ 35
ఖ) 6324 ÷ 245　　ఙ) 12345 ÷ 975
గ) 16025 ÷ 1000　　చ) 5436 ÷ 300

> తెలుసా ?
> భాగక్రియ సరిగ్గా ఉందా లేదా తెలుసు-కొనుటకు ఈ క్రింది చిత్రం ఉపయోగించెదరు.
> భాజ్యం = భాజకం x భాగఫలం + భాగశేషం
> దీనిని యూక్లిడీయ పద్ధతి అందురు.

2. ఖాళీలను పూరించండి.

క) 104 ÷ 104 = ... ఖ) 305 ÷ .... = 305

3. ప్రతీ దానికి బ్రాకెట్లలో గల సంఖ్యలతో భాగించండి మరియు ఏ సంఖ్య ద్వారా ఇచ్చిన సంఖ్య భాగించునో రాయండి.

క) 306 [2, 3, 4, 5, 6]　　ఖ) 1701 [6, 7, 8, 9]　　గ) 3564 [7, 8, 9, 11]

4. అంకెలు గల ఏ చిన్న సంఖ్య 74 ద్వారా భాగింపబడును ?

5. నాలుగంకెలు గల ఏ పెద్ద సంఖ్య 48 ద్వారా భాగింపబడును ?

6. ఏ సంఖ్యనకు 24 ద్వారా భాగించిన 18 భాగఫలం వచ్చి 9 భాగశేషము మిగులును ?

7. ఒక రైతు వద్ద 700 మొక్కలు ఉండెను. అతను ప్రతీ వరుసలో 32 మొక్కలను నాటెను. అయిన అతని వద్ద ఎన్ని మొక్కలు మిగిలెను ?

8. ఒక అడిటోరియంలో ప్రతీ వరుసలో 36 కుర్చీలు గలవు. అయిన అతి తక్కువగా ఎన్ని వరుసలలో 600 మంది ప్రేక్షకులు కూర్చుందురు మరియు ఎన్ని కుర్చీలు మిగులును ?

9.క) 1325 నుండి అతి తక్కువగా ఎంత తీసిన అది 36 ద్వారా భాగింపబడును ?

ఖ) 1325నకు అతి తక్కువగా ఎంత కలిపిన 6042 ద్వారా భాగింపబడును ?

10.క) 102నకు 12 ద్వారా భాగించబడి మరియు క్రింది ఖాళీలలో భాగఫలం మరియు భాగశేషం రాయండి.
102నకు 12 ద్వారా భాగించిన, భాగఫలం = ..., భాగశేషం = ...

ఖ) 102నకు 8 ద్వారా భాగించండి మరియు క్రింది ఖాళీలలో భాగఫలం మరియు భాగశేషం రాయండి,
102నకు 8 ద్వారా భాగించిన, భాగఫలం = ..., భాగశేషం = ...

11. ప్రశ్న నెంబరు 10లో చూశారు, 102 భాజ్యము అయినచో భాజకము 12, భాగఫలము 8, అదే విధంగా భాజకము 8 అయిన భాగఫలం 12 మరియు ప్రతీసారి భాగశేషము 6.

ప్రస్తుతం 106 నకు 12 ద్వారా భాగించి భాగఫలం మరియు భాగశేషమును నిర్ణయించండి.

106 నకు ముందు భాగఫలం ద్వారా భాగించి భాగఫలం మరియు భాగశేషం ఎంత అగునో నిర్ణయించండి.

ప్రశ్న 10లో భాజకం 12 అయిన భాగఫలం 8 మరియు భాజకం 8 అయిన భాగఫలం 12.

కాని దీనిలో భాజకం 12 అయిన భాగఫలం ఎంత వచ్చునో దానిని భాజకంగా తీసుకొని భాగించిన భాగఫలం 12 అగునా ? ఎందుకు కాలేదు ?

12. ఒకవేల ఒక సంఖ్యను 15 ద్వారా భాగించిన ఏ భాగశేషం ఉండును. అయిన ఆ సంఖ్యను వేరే ఏ సంఖ్య ద్వారా భాగించిన కూడా భాగశేషం ఉండదు ?

4.9. సహజ సంఖ్యల వ్యాప్తి :

స్థాని విలువల సహాయంతో కేవలం 10 అంకెలను ఉపయోగించి అన్ని పెద్ద పెద్ద సంఖ్యలు వ్రాయు పద్ధతి ఆలోచన జరిగిందో అప్పుడు ఏమి లేదు అనే దాన్ని సంఖ్యల రూపంలో వ్రాయు అవసరం వచ్చెను. అప్పుడు సున్నా సృష్టి జరిగెను. దీనిని ఒక అంకె రూపంలో వాడుట జరిగింది.

> తెలుసుకోండి
>
> 0,1,2,3,4,5 ...... ఈ సంఖ్యల సమూహంను సంప్రచారిత సహజ సంఖ్యల సమూహం (అఖండ సంఖ్యల సమూహం) అందురు. వీటిని N^* గుర్తు ద్వారా సూచించుట జరుగును.

నిత్య జీవితంలో వివిధ పరిస్థితులలో ఎన్ని గలవో అన్ని అయిపోయెను. ఇది ఒక సాధారణ పరిస్థితి. అనగా 3-3, 5-5, 215-215 మొదలైన తీసివేత విషయంలో తీసివేతను చూపించుటకు సున్న అవసరం వచ్చెను. అందువలన సున్నా (0) ను సహజ సంఖ్యలలో ఉంచుటకు ఆలోచన జరిగెను. సహజ సంఖ్యల సమూహంతో సున్నా (0)ను కలిపి ఏ సంఖ్యలు ఏర్పడెనో వాటిని సంప్రచారిత సహజ సంఖ్యల సమూహం అందురు.

4.9.1. సంప్రచారిత సహజ సంఖ్యల సమూహంలో కూడిక, తీసివేత ప్రక్రియలు.

క) ఏదైనా వస్తువు లేని పరిస్థితిలో ఏమి లేదు అదే దాని గుర్తుగా సంఖ్య సున్నా (0)

అందువలన 5+0=5+ ఏమి లేదు

ఇచ్చట కూడిక ఫలితం 5 వచ్చును.

అదే విధంగా 7+0=7, 285+0=285

ముందు ఉదాహరణలలో మనం చూశాం,

ఏదైనా సహజ సంఖ్యతో సున్న (0)ను కలిపిన, కూడిక ముందు సహజ సంఖ్య అగును.

అందువలన సంప్ర చారిత సహజ సంఖ్యల సమూహంలో కూడిక ప్రక్రియ యొక్క తత్సమాంశ ధర్మం పాలించును.

ఖ) సంప్రచారిత సహజ సంఖ్యలలో తత్సమాంశ ధర్మం

ఏదైనా సంప్రచారిత సహజ సంఖ్యతో '0'ను కలిపిన లేక '0'తో ఏదైనా సంప్రచారిత సహజ సంఖ్యకు కలిపిన అదే సంఖ్య వచ్చెను. అందువలన '0'కు సంకలన తత్సమాంశం అందురు.

పరిశీలించండి :

సహజ సంఖ్యలతో '0'ను కలిపే ముందు సహజ సంఖ్యల సమూహంతో సంకలన తత్సమాంశ ధర్మం లేదు లేక సంకలన తత్సమాంశం కూడా సహజ సంఖ్యల సమూహంతో లేకుండెను.

మనం స్వయంగా పరీక్ష చేసి చూడగలం సహజ సంఖ్యల సమూహంలో కూడిక ప్రక్రియ మరియు గుణన ప్రక్రియలు ఏఏ ధర్మాలు పాటించునో, సంప్రచారిత సహజ సంఖ్యలు సమూహంలో కూడా ప్రక్రియ మరియు గుణన ప్రక్రియల ఆ ధర్మాలు పాటించును.

4.9.2. తీసివేత (వ్యవకలన) ప్రక్రియలో ప్రత్యేక ధర్మం

క) ఈ క్రింది తీసివేతను చూడండి.

3-3=0, 5-5=0, 238-238=0

మనం చూశాం

ఏదైనా సహజ సంఖ్య నుండి అదే సంఖ్యను తీసిన తీసివేత సున్నా (0) అగును.

ఒకవేల ఒక సుద్దల బాక్సులో ఎటువంటి సుద్దలు లేకుండెను. దాని నుండి ఒక సుద్దను తెచ్చుటకు వెల్లిన తిరిగి ఖాళీ చేతులతో తిరిగి వచ్చును. అనగా మనం ఖాళీ గల బాక్సు నుండి 'ఏమి లేదు' అనే దాన్ని తెచ్చాం. ఆ తరువాత కూడా ఖాళీ బాక్సు ఖాళీ బాక్సు వలె ఉండును.

అందువలన సంప్రచారిత సహజ సంఖ్యల విషయంలో తీసివేతకు సంబంధించిన ఒక ధర్మం అగును.

ఏదైనా సంఖ్య నుండి ఆ సంఖ్యను తీసివేసిన సున్నా (0) అగును.

ఖ) వేరే పరిస్థితిని చూద్దాం

5 సుద్దలు గల బాక్సు నుండి నేను ఎటువంటి సుద్దలను తీసుకోలేదు. అయిన బాక్సులో ఎన్ని సుద్దలు ఉండును ? తప్పని సరిగా బాక్సులో ముందు గల సుద్దల మొత్తం ఉండును.

అందువలన $5 - 0 = 5$

అదే విధంగా $9 - 0 = 9$

$83 - 0 = 83$

తీసివేతకు సంబంధించిన మరో ధర్మాన్ని తెలుసుకున్నాం.

ఏదైనా సంఖ్య - 0 = ఆ సంఖ్య

గ) సంప్రచారిత సహజ సంఖ్యలలో గుణకార సంబంధించిన ధర్మం.

ఒక పరిస్థితిని చూద్దాం =

ఏ విధంగా ఒక సంఖ్య యొక్క వరుస కూడికను గుణకార రూపంలో మార్చి వచ్చునో అది మనకు తెలుసు.

అందువలన $0 + 0 + 0 + 0 = 0 \times 4$

కాని $0 + 0 + 0 + 0 = 0$

కనుక $0 \times 4 = 0$

4×0 యొక్క అర్థం 0 గల 4ల కూడిక, 4 లేకుండా కలుపుదాం. అప్పుడు మనం పొందుదాం '0'.

అందువలన 4×0

∴ మనం చూశాం $0 \times 4 = 4 \times 0 = 0$

అదే విధంగా $0 \times 3 = 3 \times 0 = 0$

అందువలన గుణకార ధర్మం,

0 X ఏదైనా సంఖ్య = ఆ సంఖ్య X 0 = 0

> గుర్తించండి
> ఏదైనా సంప్రచారిత సహజ సంఖ్యలను '0' గుణించిన ఫలితం 0 అగును.

ఘ) సంప్రచారిత సహజ సంఖ్య యొక్క భాగక్రియ ధర్మం :

- రండి ఒక పరిస్థితిని పరిశీలిద్దాం. పూర్తిగా సుద్దలు లేని బాక్సు నుండి 3 సుద్దలను ఎక్కువగా ఎన్ని సార్లు తీయగలం ?

పూర్తిగా తీయలేం అనగా 0 సార్లు తీయగలం.

దీని నుండి మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం ?

అదే విధంగా $0 \div 3 = 0$

$0 \div 4 = 0$

$0 \div 8 = 0$

$0 \div 115 = 0$

భాగక్రియకు సంబంధించిన ధర్మం : సున్నా (0) ÷ సున్నా కాకుండా ఏదైనా సంఖ్య = 0

◆ మరో పరిస్థితిని చూద్దాం.

12 పెన్నుల నుండి ఒకేసారి 4 లెక్క తీసిన ఎన్ని సార్లు అన్ని పెన్నులను తీయగలం.

దీనిని తెలుసుకొనుటకు 12 నకు 4 ద్వారా భాగించవలెను. అనగా 12 నుండి 4 ను ఎన్ని సార్లు తీయగలమో మనం చూడాలి.

12
-4 1వ సారి
8
-4 2వ సారి
4
-4 3వ సారి
0

మనం చూశాం,

12 నుండి 4ను 3 సార్లు తీయడం జరిగింది. అందువలన మనం చెప్పగలం 12 ÷ 4 = 3

అదే విధంగా 3 ÷ 0 = ఎంత నిర్ణయించగలం

ఇచ్చట 3 ÷ 0 = ఎంత తెలుసుకొనుటకు 3 నుండి 0కు ప్రతిసారి తీసివేయాలి, 0కు ఎన్ని సార్లు తీయగలమో అది భాగఫలం అగును ?

3
-0 1వ సారి
3
-0 2వ సారి
3

ఇచ్చట 3 నుండి 0ను 2 సార్లు తీయడం జరిగింది. కాని మరల 3 మిగిలినది.

ఇంకా ఎన్ని సార్లు అయినను అన్ని సార్లు 0ను తీయగలం. అందువలన 3 నుండి 0కు ఎన్ని సార్లు తీయగలమో దానిని మనం చెప్పలేం.

ఆ కారణం చేత 3 ÷ 0 కొరకు ఏ విధమైన భాగఫలం లేదు.

భాగక్రియ సంబంధించిన మరో ధర్మం : ఏదైనా సంఖ్యనకు 0 ద్వారా భాగించుట విలువ లేనిదగును.

జవాబు రాయండి

క) 0×46 ఖ) 46×0 గ) $0 \div 46$ ఘ) $46 \div 0$

అభ్యాసం 4.5

1. మనం ఉపయోగించుచున్న పది అంకెలలో చిన్న అంకె ఏది ?

2. రెండు లక్షల ఐదు రాయునపుడు ఏఏ వేరే అంకెలను వాడుట జరుగును ?

3. 1 నుండి 100 వ్రాయునపుడు ఎన్ని సార్లు సున్నాను వ్రాయుట జరుగును ?

4. ఏదైనా సంఖ్యతో ఏ సంఖ్యను కూడిక చేసిన అదే సంఖ్య వచ్చును ?

5. ఒక తీసివేత పనిని చేయండి, దాని విలువ 0 అగును.

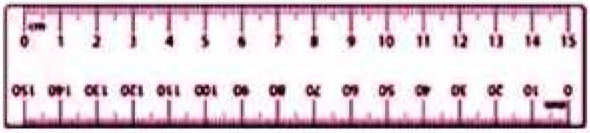
6.క) ఒక సంఖ్యకు ఆ సంఖ్యతో కలిపిన దాని మొత్తము అదే సంఖ్య వచ్చును. దీని కొరకు ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

ఖ) ఒక సంఖ్యకు ఆ సంఖ్య ద్వారా గుణించిన గుణఫలం అదే సంఖ్య వచ్చును. దీనికి రెండు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

7. ఒక సంఖ్య గలదు దానికి ఆ సంఖ్య విడిచి వేరే ఏ సంఖ్య ద్వారా భాగించిన భాగఫలం కూడా అదే సంఖ్య వచ్చును. అయిన ఆ సంఖ్య ఎంత ?

4.10. సంఖ్యా రేఖపై సంప్రచారిత సహజ సంఖ్యల గుర్తింపు

మీరు స్కేలును (కొలబద్ద) ను ఉపయోగించి కొలుచుదురు. కొన్ని చిన్న స్కేల్లు గలవు. వాటిపై 0 నుండి 15 వరకు వ్రాయబడి ఉండును.



పెద్ద స్కేలుపై 0 నుండి 30 వరకు సంఖ్యలు వ్రాయబడి ఉండును. టైలర్ ఒక టేపును ఉపయోగించి మీ బట్టలను కొలుచును. బట్టల దుఖాణాదారుడు ఒక ఇనుప కర్ర (మీటరు కర్ర) ఉపయోగించును. అందులో 0 నుండి 100 వరుస సంఖ్యలు ఉండును.

మీరు పెద్ద రోడ్డుపై వెళ్ళునపుడు దారి ప్రక్కలలో చిన్న స్థంబాలను పాతి వాటిపై కిలోమీటర్లను వ్రాయుట చూచి ఉంటారు. రోడ్డు ఎచ్చట అరంభమగునో అక్కడ గల స్థంభంపై (0) వ్రాసి ఉండును. ఆ తరువాత స్థంభంపై 1, తరువాత దానిపై 2 ఈ విధంగా రోడ్డు ఎచ్చట ఆగుచున్నదో (అంతం) అక్కడ గల స్తంభంపై ఒకవేల 425 ఉన్నచో, అప్పుడు రోడ్డు ఆరంభ స్థానం నుండి చివరి స్థానం మధ్యలో 425 కి.మీ. లేక రోడ్డు పొడవు 425 కి.మీ. అగును.

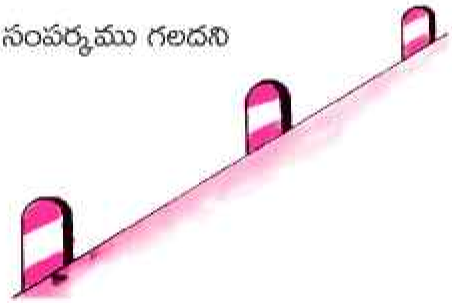
మీటరు కర్రపై వ్రాయబడివున్న సెం.మీ. సంఖ్య రోడ్డు ప్రక్కలందు వ్రాయబడి వున్న కి.మీ. సంఖ్య వాస్తవంగా రేఖలతో సంఖ్యల సంపర్కము గూర్చి మనకు తెలియజేయును.

అందువలన మనం కూడా ఒక రేఖతో మనం ఉపయోగించుచున్న సంఖ్యల సంపర్కమును చూపించ గలిగినచో సంఖ్యల ఉపయోగకతను అధిక స్పష్టంగా చెప్పగలం.

రేఖ లేక సరళరేఖ యొక్క వ్యాప్తి రెండు వైపులకు ఉండును. కాని మనకు తెలిసిన సంప్రచారిత సంఖ్యల సమూహం ఒక వైపు అంతం అగును. కారణం '0' కంటె చిన్న సంఖ్యల ఉపయోగం మన వద్ద లేదు. కనుక '0' మనకు తెలిసిన సహజ సంఖ్యల మొత్తంలో చివరి బిందువగును. కాని మరో ప్రక్క సంఖ్యల వ్యాప్తి అనంతం అందువలన సహజ సంఖ్యల మొత్తం ఒక ప్రక్క అంతం అయిన రెండో ప్రక్క అనంతం అగును. మనకు తెలుసు ఒక రశ్మి ఒక ప్రక్క అంతం మరియు మరో ప్రక్క అనంతం.

> తెలుసా ?
>
> సరళరేఖ రెండు వైపుల అనంతం
>
> రశ్మి ఒక వైపు అంతం మరో వైపు అనంతం

అందువలన మనకు తెలిసిన సంఖ్యలతో ఒక రశ్మి యొక్క సంపర్కము గలదని తెలియు చున్నది.



అయిన ఒక రశ్మి కూడా ఒక రేఖలో ఒక భాగం. కనుక మనం ఒక రేఖను తీసుకొని దాని ఒక భాగం ద్వారా ఏర్పడిన రశ్మిపై సంప్రచారిత సంఖ్యలను గుర్తించుటకు ప్రయత్నం చేద్దాం. అదే విధంగా ఒక రోడ్డుపై 0,1,2 .... మొదలైన కి.మీ.ల స్తంభాలను చేయబడును.

మీరు ఉపయోగిస్తున్న స్కేలు లేక దుఖాణదారుడు ఉపయోగిస్తున్న మీటరు కర్రపై ప్రతీ ఒక సెం.మీ. దూరంలో 1,2,3 మొదలైన సంఖ్యలు ఉండును. రోడ్డుపై 1 కి.మీ. దూరంలో కి.మీ.ల స్థంభాలను ఉంచుదురు.

కనుక మనం కూడా ఒక రేఖపై ఒక నిర్ధిష్ట దూరంను తీసుకొని సంఖ్యలను గుర్తించ వలెను. ఈ దూరంను ఎంత తీసుకొవలెనో అది మనపై ఆధారపడి ఉండును.

4.10.1. రేఖపై సంఖ్యలను గుర్తించు పద్ధతి

ఒక రేఖను నిర్మించి దానిపై ఒక బిందువును గుర్తించవలెను. దాని పేరు 0. ఇప్పుడు 'O' మూల బిందువు గల రెండు రశ్మిలు ఏర్పడును. కుడివైపు గల రశ్మి $\overrightarrow{OA}$ మరియు ఎడమ వైపు గల రశ్మి $\overrightarrow{OB}$ అగును.

$\overrightarrow{OA}$ పై ఏదైనా దూరమును తీసుకొని O నుండి ఆరంభించి బిందువులను గుర్తించుదాం. (ఈ దూరం యూనిట్ దూరం అగును) రశ్మి A వైపు అనంతంగా ఉండును. ఇచ్చిన చిత్రంలో మనం

నిర్దిష్ట సంఖ్యల బిందువులు (చిత్రంలో O కు కలిపి 6 బిందువులు కనిపించు చున్నప్పటికి నిజంగా రశ్మిపై అసంఖ్య బిందువులు ఉండును. ప్రస్తుతం O నుండి ఆరంభించి కుడివైపుకు గల బిందువులపై మనం వరుసగా 0,1,2,3 మొదలైన సంఖ్యల రాద్దాం. ప్రస్తుతం $\overleftrightarrow{AB}$ రేఖను సంఖ్యరేఖ అందురు.

చెప్పండి చూద్దాం :
సంఖ్యా రశ్మి చెప్పకుండా సంఖ్యా రేఖ అని ఎందుకు అంటారు ?

స్వయంగా చేసి చూడండి

- మీ నోట్‌బుక్‌లో ఒక సరళరేఖను నిర్మించండి.
- దీనికి ఏదైనా బిందువు వద్ద 'O' పేరు పెట్టుము.
- O బిందువును ఎడమవైపు ఒక బిందువును గుర్తించి దాని పేరు B పెట్టుము మరియు O బిందువు యొక్క కుడి వైపు ఒక బిందువును గుర్తించి దాని పేరు A పెట్టుము.
- O బిందువు నుండి ఆరంభించి $\overrightarrow{OA}$ పై సమాన దూరంలో స్కేల్‌ను ఉపయోగించి బిందువులను గుర్తించండి మరియు బిందువుల వద్ద ఎడమ నుండి కుడివైపునకు వరుసగా 1,2,3 ... మొదలైన సంఖ్యలను రాయండి.
- గుర్తుంచండి, ప్రతీ వరుస సంఖ్యల మధ్యల దూరము ఒక యూనిట్ అగును.

ఆ సంఖ్యా రేఖను చూచి ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానం రాయండి.

క) సున్నా గుర్తు బిందువు నుండి ఎన్ని యూనిట్ల దూరంలో 5 గుర్తింపు బిందువు గలదు ?

ఖ) 3 గుర్తు బిందువు నుండి కుడి ప్రక్కకు 3 యూనిట్ల దూరంలో ఏ సంఖ్య గలదు ? 3+3 = ఎంత ?

గ) 8 గుర్తు బిందువు నుండి 2 యూనిట్ల ఎడమ ప్రక్కకు 3 యూనిట్ల ఎడమ ప్రక్కకు ఏ సంఖ్య గలదు ?

ఘ) 2 గుర్తు బిందువు నుండి 3 యూనిట్ల కుడిప్రక్కకు వెళ్లండి మరియు దాని తరువాత 4 యూనిట్ల కుడి వైపుకు వెల్లండి. ఏ సంఖ్య వద్ద చేరుకొనిరి ?

2+3+4 = ఎంతో

చెప్పండి చూద్దాం :
క) సంఖ్యా రేఖపై కూడిక చేయుటకు ఏ వైపుకు వెల్లవలెను ?
ఖ) సంఖ్యా రేఖపై తీసివేయుటకు ఏ వైపుకు వెల్లవలెను ?

ఐదవ అధ్యాయం

భిన్నాలు

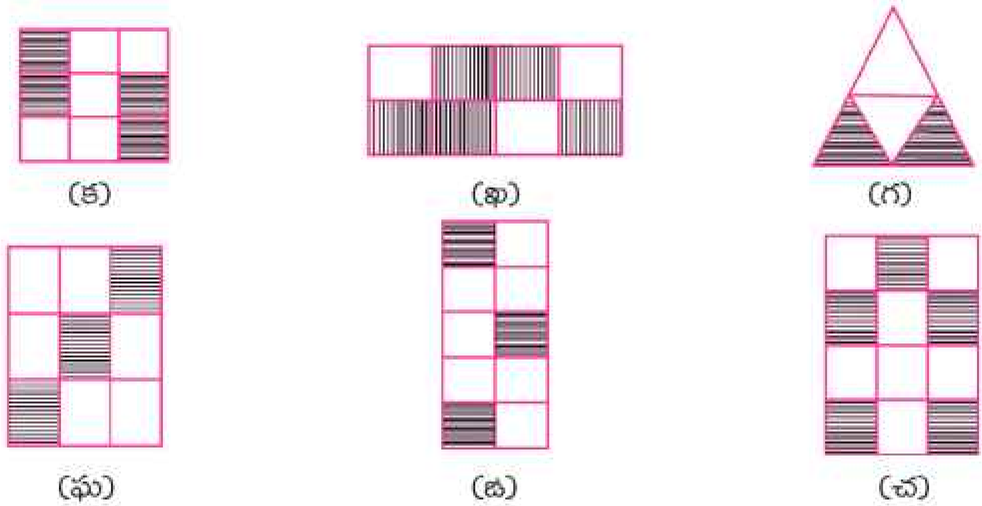
5.1 మనకు తెలిసినవి

ఒక వస్తువు యొక్క ఒక భాగము పరిమాణమును తెలియ జేయుటకు భిన్నాలను సృష్టించుట జరిగినది. ఒక భిన్నాన్ని వ్రాయునపుడు ఉపయోగిస్తున్న రెండు గణన సంఖ్యల మధ్యలో దేనిని లవం మరియు దేనిని హారం అందురో దానిని ముందు మనం తెలుసుకున్నాం. ఒకటి లేక ఒకటి కంటె ఎక్కువ అధిక సంపూర్ణ వస్తువులో సహ మరో వస్తువు యొక్క ఒక భాగాన్ని కలిపి దాని పరిమాణంను తెలియ జేయుటకు ఏ భిన్నాన్ని వాడుదుమో దానిని అపకృతు భిన్నాం లేక మిశ్రమ భిన్నం అందురు. ఇది కూడా మనకు తెలుసు. ఒక భిన్నం యొక్క సమభిన్నాలను కూడా గుర్తించుట తెలుసును.

మనం ముందుగా భిన్నాలను సంబంధించి ఏ విషయాలను తెలుసుకున్నాము, వాటిని ఆధారంగా చేసుకొని ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాద్దాం.

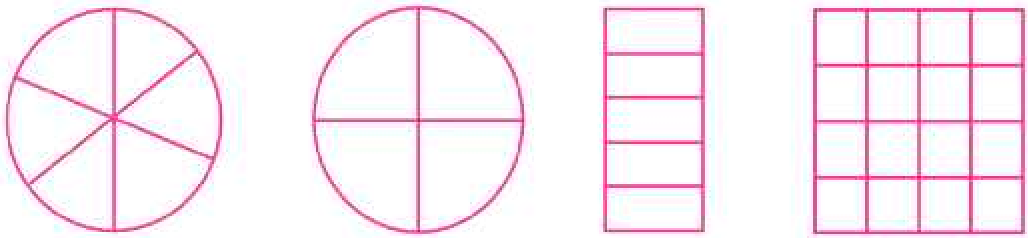
అభ్యాసం 1.1

1. ఈ క్రింది బొమ్మలలో గీతలు గీసిన భాగాలను సంపూర్ణ చిత్రములతో భిన్నాల రూపంలో రాసి ప్రక్క పేజీలో గల పట్టికను మీ నోట్‌బుక్‌లో చేసి దానిని పూరించండి.



బొమ్మల వరుస	(క)	(ఖ)	(గ)	(ఘ)	(ఙ)	(చ)
భిన్నం						
లవం						
హారం						

2. ప్రతీ బొమ్మ వలె ఈ బొమ్మలను మీ నోట్‌బుక్‌లో గీయండి. చిత్రం క్రింద వ్రాయబడివున్న భిన్నాల ప్రకారం చిత్రంలో భాగాలను గుర్తించండి.

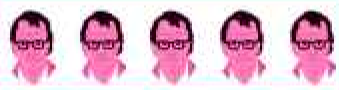


$\frac{5}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{16}$

5.2. కొన్ని ఒక రకమైన వస్తువుల సమూహ భిన్నాలు

ఒక వస్తువు యొక్క ఒక భాగాన్ని తెలియజేయుటకు భిన్నాలను ఉపయోగించుట గూర్చి మనకు తెలుసు. ప్రస్తుతం కొన్ని ఒకే రకమైన వస్తువుల సమూహం నుండి కొన్ని వస్తువులను తీసుకొని వాటిని మొత్తంలో భాగముగా చూపించుదురు.

మీ స్కూలులో 10 మంది ఉపాధ్యాయులలో 5 మంది ఆటస్థలంలో పిల్లలను ఆడిపించు చున్నారు. మిగిలిన ఉపాధ్యాయులు తరగతి గదిలో గలరు. అయిన మొత్తం ఉపాధ్యాయులలో ఎంత భాగం ఆటస్థలంలో గలరో రండి చూద్దాం.

ఆటస్థలంలో గల ఉపాధ్యాయులు	
తరగతి గదిలో గల ఉపాధ్యాయులు	

మనం పై బొమ్మలను తెలుసుకున్నాం -

ఎంత మంది ఉపాధ్యాయులు ఆటస్థలంలో గలరో అంత మంది ఉపాధ్యాయులు తరగతి గదిలో గలరు.

అందవలన ఉపాధ్యాయులలో సగం ఆటస్థలంలో గలరు.

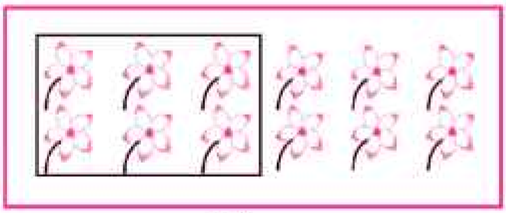
10 మందిలో 5 మందిని మనం చెప్పగలం $\frac{5}{10}$

10 మంది ఉపాధ్యాయులను రెండు సమాన భాగాలుగా చేసిన ప్రతీ భాగం ఉపాధ్యాయుల సంఖ్య = $10 \div 2 = 5$

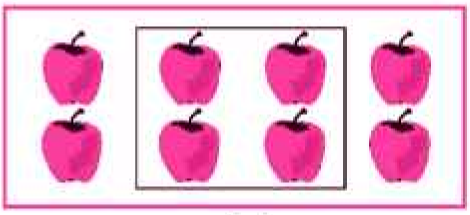
అందువలన 10 మంది ఉపాధ్యాయుల మధ్యలో 5 గురు 10 యొక్క రెండు సమాన భాగాలలో ఒక భాగం అగును.

అందువలన మనం చూడగలం 10 నుండి 5 అవుతుంది 2 సమాన భాగాలలో ఒక భాగం. అందువలన 10 నుండి 5 అవుతుంది $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

క్రింది నివ్వబడిన వాక్యాలను మీ నోట్‌బుక్‌లో రాయండి మరియు బొమ్మలను పరిశీలించి అందులో గల ఖాళీలలో సరియైన భిన్నాలను రాయండి.



(క)



(ఖ)

చిత్రం (క) లో చిన్న బాక్సులో గల పువ్వుల సంఖ్య పెద్ద బాక్సులో గల పువ్వుల సంఖ్య యొక్క _____ సమానా భాగాలలో _____ భాగం. అందువలన చిన్న బాక్సులో గల 6 పువ్వుల మొత్తం పువ్వులలో _____ భిన్నం.

చిత్రం (ఖ) లో చిన్న బాక్సులో గల పండ్ల సంఖ్య పెద్ద బాక్సులో గల పండ్ల సంఖ్య యొక్క _____ సమాన భాగాలలో భాగం. అందువలన 4 పండ్లు 8 పండ్లలో _____ భిన్నం.

ప్రస్తుతం మనం తెలుసుకున్నాం -

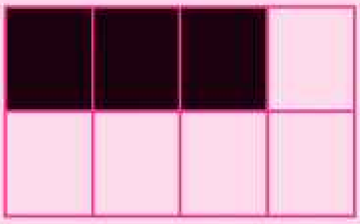
ఒక రకమైన వస్తువుల మొత్తంలో కొన్ని వస్తువులను తీసుకున్నచో, ఇది మొత్తంలో ఒక భిన్నం అగును.

తెలుసుకొండి

- ఒక వస్తువు యొక్క ఒక భాగాన్ని మొదటి వస్తువు యొక్క ఒక భిన్నంగా తెలియ జేయగలం.
- ఒక రకమైన వస్తువుల మొత్తం నుండి కొన్ని వస్తువులను తీసుకున్నచో అవి కూడా మొత్తంలో ఒక భిన్నంగా చూపించగలం.

స్వయంగా చేసి చూడండి

పని - 1



- దీర్ఘచతురస్రాకారపు కాగితంను తీసుకొని దానిని సమానంగా 8 మడతలను పెట్టుము.
- లభించిన ఎనిమిది భాగాలలో 3 భాగాలను నలుపు చేయుము.
- కాగితంలో నల్లగా గల భాగాలను ఎంత భిన్నంగా చెప్పుదుము.

పని - 2

- సమాన ఆకారంలో గల 10 చిన్న కట్టెలను సంగ్రహించండి. వాటిలో రెండేసి కలిపి కట్టండి.
- మొత్తంగా ఎన్ని కట్టలు అయినట్లు చూసిరి ?

ముందు పేజి (పూటలో) లో గల పని-2ను చూచి ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

చిత్రం 5 కట్టలలో 3 కట్టలను తీసి మీ స్నేహితునికి ఇవ్వండి.

- కట్టిన ______ సమాన కట్టల నుండి మీ స్నేహితునికి ______ కట్టలను ఇచ్చిరి.
- అందువలన మీ స్నేహితునికి లభించిన కట్టెలు మొత్తం కట్టెలలో ______ సమాన భాగాలలో ______ భాగాలు.
- ఫలితంగా ముందుగల కట్టెల మొత్తంలో ______ భిన్నం కట్టెలను మీ స్నేహితునికి లభించెను.
- మీ స్నేహితునికి లభించిన 3 కట్టలలో గలవు ______ కట్టెలు
- కనుక మీ స్నేహితుడు పొందెను 10 కట్టెలలో ______ కట్టెలు

పరిశీలించండి - మీ స్నేహితుడు పొందిన కట్టెలు, మొత్తం కట్టెలు 10లో 6 అగును. అందువలన స్నేహితుడు పొందిన కట్టెలు మొత్తం కట్టెలలో $\frac{6}{10}$.

మనం చూశాం మొత్తంలో $\frac{6}{10}$ ఎంతో $\frac{3}{5}$ కూడా అంతే.

క్రింది వాక్యాలలో గల ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

క) 5 పెన్నుల నుండి 3 పెన్నులు అగును ______ భిన్నం.

ఖ) 7 పెన్సిల్‌ల నుండి 4 పెన్సిల్‌లు అగును ______ భిన్నం.

గ) 9 మంది పిల్లల నుండి 5 మంది అగుదురు ______ భిన్నం.

5.3. ఒకే భిన్నాలు లేక ఏక భిన్నాలు లేక యూనిట్ భిన్నాలు

క్రింది భిన్నాలను చూడండి.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$

ఇచ్చట ఏ భిన్నాల యొక్క లవం 1 గలవో అవి $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{1}{5}$.

ఈ విధమైన భిన్నాలను ఏక భిన్నాలని అందురు.

దీని నుండి మనం తెలుసుకున్నాం -

ఏ సంఖ్య యొక్క లవం 1 అగునో దానిని ఏక భిన్నం అందురు.

> **తెలుసా ?**
>
> ప్రతీ భిన్నాన్ని మనం ఏక భిన్నాలలో మొత్తంగా రాయవచ్చు. అనగా $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

ఉదాహరణ - 1 : క్రింది భిన్నాలను ఏక భిన్నాల మొత్తంగా చూడండి.

క) $\frac{5}{8}$ ఖ) $\frac{7}{10}$

సమాధానం :

క) $\frac{5}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

ఖ) $\frac{7}{10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$

ఉదాహరణ - 2

క్రింది భిన్నాలను కొన్ని ఏక భిన్నాల మొత్తంగా రాయగలం.

క) $\frac{4}{9}$ ఖ) $\frac{5}{12}$

సమాధానం :

క) $\frac{4}{9}$ నకు 4 ఏక భిన్నాల మొత్తంగా రాయగలం. (కారణం 4, $\frac{1}{9}$ ల మొత్తం = $\frac{4}{9}$)

ఖ) $\frac{5}{12}$ నకు 5 ఏక భిన్నాలు మొత్తంగా రాయగలం.

అభ్యాసం5.2

1. ఈ క్రింది వాక్యాలను మీ నోట్‌బుక్‌లో రాయండి మరియు వాటిలో గల ఖాళీ స్థానాలను పూరించండి.

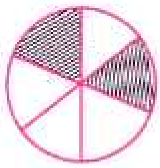
క) 3 నకు లవం మరియు 5 నకు హారంగా తీసుకొని ఏర్పడిన భిన్నం ________

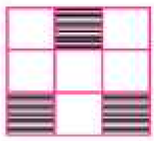
ఖ) $\frac{2}{5}$ యొక్క హారం, లవం కంటె ________ ఎక్కువ.

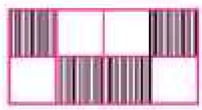
గ) $\frac{3}{8}$ యొక్క అర్థం ఒక వస్తువు యొక్క ________ భాగాలలో ________ భాగాలు. ఇంకను కూడా $\frac{3}{8}$ యొక్క అర్థం ఒక రకమైన వస్తువుల యొక్క మొత్తంనకు ________ సమాన భాగాలలో భాగాలు.

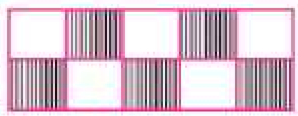
2. $\frac{3}{5}, \frac{7}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{9}, \frac{9}{10}$ భిన్నాల మధ్యలో గల క్రమ భిన్నాలు మరియు అపక్రియ భిన్నాలను వేరుచేసి రాయండి.

3. బొమ్మలను చూచి ప్రతీ బొమ్మలో రంగు వేసిన భాగం మొత్తం బొమ్మలో ఎంత భిన్నము రాయండి.


బొమ్మ (క)


బొమ్మ (ఖ)


బొమ్మ (గ)


భొమ్మ (ఘ)

4. క్రింది ప్రతీ దానికి సరియైన భిన్నాలను రాయండి.

క) 5 పెన్సిల్‌లలో 2 పెన్సిల్‌లు విరిగిపోయెను.

ఖ) 8 పువ్వులలో 3 పువ్వులు ఎండిపోయెను.

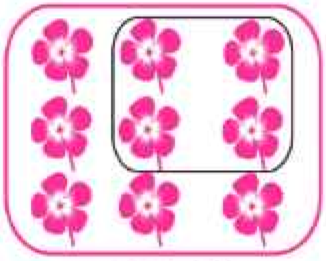
గ) ఒక మందలో గల 12 మేకలలో 7 మేకల నల్లనివి.

5.క) 1,2,3,4 సంఖ్యల మధ్యలో రెండేసి ఉపయోగించి ఏర్పడిన మొత్తం క్రమ భిన్నాలను రాయండి.

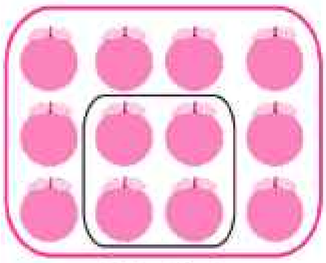
ఖ) 7,8,9,10 సంఖ్యల మధ్యలో రెండేసి ఉపయోగించి ఏర్పడిన అన్ని అపక్రియ భిన్నాలను రాయండి మరియు వాటని మిశ్రమ సంఖ్యలలోకి మార్చండి.

గ) 4,5,6,7,8,9 సంఖ్యల మధ్యలో రెండేసి ఉపయోగించి భిన్నాలను రాయండి వాటి లవం హారం కంటె (i) 2 తక్కువ (ii) 3 ఎక్కువ అగును.

6. ప్రతీ బొమ్మలో గల వస్తువుల మధ్యలో చిన్న గదిలో గల వస్తువుల భిన్నాలను రాయండి.



బొమ్మ (క)



బొమ్మ (ఖ)

7. క్రింది ప్రతీ భిన్నాలను ఏక భిన్నాలు మొత్తంగా రాయండి.

క) $\frac{3}{5}$ ఖ) $\frac{7}{8}$ గ) $\frac{3}{10}$

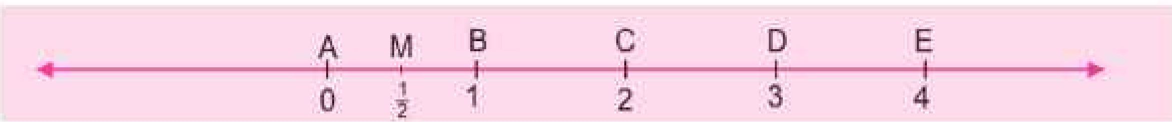
5.4. సంఖ్యారేఖపై భిన్నాల స్థానాల గుర్తింపు

సంఖ్యారేఖ మీరు ముందుగా తెలుసుకున్నారు. ముందు అధ్యాయంలో మీరు సంఖ్యారేఖపై 0,1,2,3 మొదలైన సంఖ్యలను చూపించిరి.

సంఖ్యారేఖ గూర్చి మీరు ముందుగా తెలుసుకున్నవి -

- సంఖ్యారేఖ ఒక సరళరేఖ.
- ఈ రేఖపై సమాన దూరంలో బిందువులు ఉండును.
- దగ్గరగా గల ప్రతీ జత బిందువుల మధ్య గల సరళరేఖ భాగాన్ని ఒక యూనిట్ రూపంలో తీసుకొందుము.
- సంఖ్యారేఖపై గుర్తించిన బిందువులు ఒక తిన్నని దారి ప్రక్క గల కిలోమీటర్ల స్థంభం లాంటివి. దగ్గరగా గల రెండు కిలోమీటర్ల సంఖ్యారేఖపై దగ్గరగా గల రెండు బిందువుల మధ్య దూరం ఒక యూనిట్ అగును.

క్రింది సంఖ్యారేఖను చూడండి.



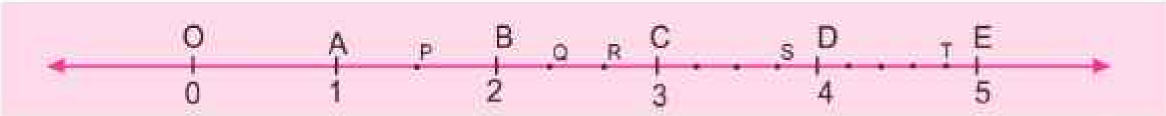
ఈ సంఖ్యారేఖపై $\frac{1}{2}$ భిన్నాన్ని చూపిద్దాం. $\frac{1}{2}$ ను సంఖ్యారేఖపై చూపించుటకు దానిపై గల యూనిట్ దూరంను అనగా ప్రక్కప్రక్క గల రెండు బిందువుల మధ్య దూరంనకు 2 సెం.మీ. లేక 4 సెం.మీ. వలె 2 ద్వారా భాగింపబడిన కొలతను తీసుకొవలెను. (దీని కారణం తరువాత తెలుసుకొందురు).

పైన గల సంఖ్యారేఖపై M బిందువు సంఖ్యారేఖ యొక్క AB భాగాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా చేయుచున్నది. అందువలన AM= $\frac{1}{2}$ యూనిట్లు. అందుకు M బిందువు $\frac{1}{2}$ యొక్క బిందువు అగును.

5.4.1. సంఖ్యారేఖపై ఇతర భిన్నాలు.

$\frac{1}{3}$ ను సంఖ్యారేఖపై చూపించుటకు సంఖ్యారేఖపై గల యూనిట్ పొడవు 3 సెం.మీ తీసుకొవలెను. 0 మరియు 1 బిందువుల మధ్య భాగంను 3 సమాన భాగంలు చేయవలెను. ఏ రెండు విభజన బిందువులు లభించునో వాటిలో మొదటి భాగాన్ని $\frac{1}{3}$ మరియు రెండువ భాగాన్ని $\frac{2}{3}$ గా రాయవలెను.

ప్రస్తుతం క్రింది గల సంఖ్యారేఖను పరిశీలించండి.



- పై సంఖ్యారేఖపై 0,1,2,3,4,5 సంఖ్యలను గుర్తించుట జరిగినది. వాటి పేర్లు వరుసగా O,A,B,C,O లగా పెట్టబడినది.
- A నుండి B వరకు గల భాగాన్ని 2 సమాన భాగాలు చేసి విభజన బిందువును P గా పిలువబడినది.
- B నుండి C వరకు గల భాగాన్ని 3 సమాన భాగాలు చేసి రెండు విభజన బిందువులకు Q మరియు R లగా పేరు పెట్టడం జరిగినది.
- C నుండి D వరకు గల భాగాన్ని 5 సమాన భాగాలు చేసి విభజన బిందువులు మూడుంటిలో మూడువ బిందువును S పేరు పెట్టడమైనది.
- D నుండి E వరకు గల భాగాన్ని 5 సమాన భాగాలు చేసి విభజన బిందువులు నాలుగింటిలో నాలుగువ బిందువును T పేరు పెట్టడమైనది.

ప్రస్తుతం పరిశీలించండి.

O నుండి P వరకు గల భాగం కొలత

$= OA + AP$

$=$ 1 యూనిట్ + 1 యూనిట్ $\frac{1}{2}$ భాగం

$= 1+\frac{1}{2}$

$= 1\frac{1}{2}$ [$1+\frac{1}{2}$ కు మనం రాస్తాం $1\frac{1}{2}$]

అందువలన P ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య $= 1\frac{1}{2}$

O నుండి Q వరకు గల భాగం కొలత

$= OB + BQ$

$=$ 2 యూనిట్లు + 1 యూనిట్ యొక్క $\frac{1}{3}$ భాగం

$= 2+\frac{1}{3}$

$= 2\frac{1}{3}$

అందువలన Q ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య $= 2\frac{1}{3}$

చెప్పండి చూద్దాం :

సంఖ్యారేఖపై $\frac{3}{4}$ ను ఎలా గుర్తించెదరు ?

O నుండి R వరకు గల భాగం కొలత

= OB + BR

= 1 యూనిట్ + 1 యూనిట్ యొక్క $\frac{2}{3}$ భాగం

= $2+\frac{2}{3}$

= $2\frac{2}{3}$

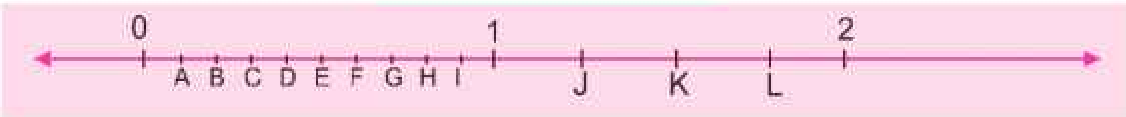
అందువలన R ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య = $2\frac{2}{3}$

చెప్పండి చూద్దాం :

S ద్వారా గుర్తించున బిందువు మరియు T ద్వారా గుర్తించిన బిందువులు ఏఏ భిన్నాలను తెలియజేస్తున్నది ?

మనం ప్రస్తుతం మిశ్రమ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించుట పద్ధతిని తెలుసుకున్నాం.

అభ్యాసం 1.1

1. 

పైన గల సంఖ్యారేఖపై 0 మరియు 1 నకు చూపిస్తున్న రెండు బిందువుల మధ్య గల సరళరేఖ భాగాన్ని 10 భాగాలుగా మరియు 1 మరియు 2 లను చూపిస్తున్న రెండు బిందువుల మధ్య గల సరళరేఖ భాగాన్ని నాలుగు సమాన భాగాలుగా చేయడం జరిగింది. విభజన బిందువులను A మొదలైనవి రాయడం జరిగింది. ఏ బిందువు ద్వారా ఏ సంఖ్య చూపించబడెనో వాటిని క్రింద రాయండి.

క) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

ఖ) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

గ) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

ఘ) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

ఙ) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

చ) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

ఛ) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

జ) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

ఝ) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

ఞ) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

ట) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

ఠ) A ద్వారా గుర్తించిన సంఖ్య ________.

2. క్రింది సంఖ్యలను సంఖారేఖపై గుర్తించండి.

క) $\frac{3}{4}$ ఖ) $1\frac{1}{3}$ గ) $2\frac{1}{4}$ ఘ) $3\frac{1}{3}$ ఙ) $4\frac{1}{2}$

3.క) సంఖ్యారేఖపై గల ఏ రెండు ప్రక్కప్రక్క గల పూర్ణసంఖ్యల మధ్యలో అన్ని క్రమభిన్నాలు గలవు ?

ఖ) సంఖ్యారేఖపై గల ఏ రెండు దగ్గరకు గల పూర్ణసంఖ్య మధ్యలో A గలదు ?

4.క) $\frac{15}{4}$ నకు సంఖ్యారేఖపై చూపించుటకు మొదట ఏమి చేయవలెను ?

ఖ) ఏ రెండు (ప్రక్కప్రక్క) దగ్గరగా గల సంపూర్ణ సంఖ్యల మధ్యలో $\frac{15}{4}$ ఉండును ?

గ) $\frac{15}{4}$ నకు మిశ్రమ సంఖ్యలో మార్చి సంఖ్యారేఖపై చూపించండి.

5.5. వస్తువుల రూపంలో అపక్రమ భిన్నం

రింకు, నిక్కి, రోజి మరియు స్వీటి స్కూల్లో తెచ్చిన టిఫిన్ తినిన తరువాత వాళ్ల వద్ద గల 5 యాపిల్‌ను పంచుకొని తినాలని అనుకున్నారు. ప్రస్తుతం ప్రశ్న ఏర్పడెను 5 యాపిల్స్‌ను నలుగురు ఏ విధంగా పంచుకోగలరు.

నిక్కి చెప్పెను - పదండి, మొదట ప్రతీ ఒక్కరు ఒకొక్క యాపిల్‌ను పంచుకుందాం మరియు మిగిలిన ఒక యాపిల్ యొక్క ఒకొక్క ముక్కను పంచుకుందాం.

రోజి చెప్పెను - అలానే చేద్దాం. కాని మొదట ప్రతీ యాపిల్‌ను నాలుగేసి ముక్కలు చెద్దాం మరియు ప్రతీ దాని నుండి నాలుగు ముక్కలలో ఒకొక్కటి పంచుకుందాం.

స్వీటి చెప్పెను - మొదటి రకంగా పంచినపుడు, ప్రతీ ఒక్కరి వంతు 1 యాపిల్ మరియు 1 ముక్క అగును.

= 4 ముక్కలు + 1 ముక్క = 5 ముక్కలు

అందువలన రెండింటిలో ప్రతీ ఒక్కరికి వచ్చిన భాగము ఒక పూర్తి యాపిల్ మరియు ఒక ముక్క లేక 5 ముక్కలు లేక $1\frac{1}{4}$

అందువలన మనం చూశాం.

$$1\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

రింకు చెప్పెను -

5 ÷ 4 నకు కూడా $\frac{5}{4}$ రూపంలో రాయవచ్చును.

అందువలన మనం తెలుసుకున్నాం : 5 ÷ 4 = $\frac{5}{4}$ లేక $1\frac{1}{4}$

మనకు తెలుసు 5÷4 = భాగఫలం 1 మరియు భాగశేషం 1

ప్రస్తుతం లభించెను, 5 ÷ 4 = $1\frac{1}{4}$

> పరిశీలించండి - భాగక్రియ సహాయంతో భిన్నాన్ని మిశ్రమ భిన్నంగా మార్చ వచ్చును.
>
> $$4\overline{)\begin{array}{l}5\\-4\\\hline 1\end{array}}\ \text{(భాగఫలం } 1)$$ అందువలన $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

ఉదాహరణ - 1 క్రింది భిన్నాలను మిశ్రమ భిన్నాలుగా మార్చండి.

క) $\frac{15}{4}$ ఖ) $\frac{27}{8}$

సమాధానం : (క) 15 ÷ 4 = భాగఫలం 3, భాగశేషం 3 $\therefore \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

లేక

$$4\overline{)\begin{array}{l}15\\-12\\\hline 3\end{array}}\ \text{(భాగఫలం } 3)$$

3 భాగశేషం $\therefore \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

ఖ)

$$8\overline{)\begin{array}{l}27\\-24\\\hline 3\end{array}}\ \text{(భాగఫలం } 3)$$

3 భాగశేషం $\therefore \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$

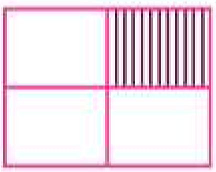
ఉదాహరణ-2 $3\frac{2}{5}$ నకు అపక్రమ భిన్నంగా మార్చండి.

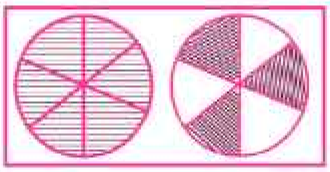
సమాధానం :

మొదటి పద్ధతి	రెండవ పద్ధతి
$3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{3x5}{5} + \frac{2}{5}$ $= \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$	$3\frac{2}{5} = \frac{3x5+2}{5} = \frac{17}{5}$

అభ్యాసం 5.4

1. క్రింది గల ప్రతీ చిత్రం క్రమ భిన్నాన్ని లేక మిశ్రమ భిన్నాన్ని సూచిస్తుందో రాయండి.





2. క్రింది మిశ్రమ సంఖ్యలను అపక్రమ భిన్నాలుగా మార్చండి.

క) $3\frac{2}{3}$ ఖ) $2\frac{2}{3}$ గ) $1\frac{5}{8}$

3. క్రింది అపక్రమ భిన్నాలను మిశ్రమ భిన్నాలుగా మార్చండి.

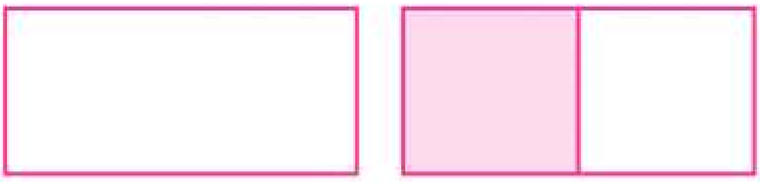
క) $\frac{18}{7}$ ఖ) $\frac{20}{9}$ గ) $\frac{23}{8}$

4. క్రింది భాగక్రియల యొక్క భాగఫలంను మిశ్రమ సంఖ్యలలో మార్చండి.

క) $19 \div 5$ ఖ) $24 \div 7$ గ) $34 \div 13$

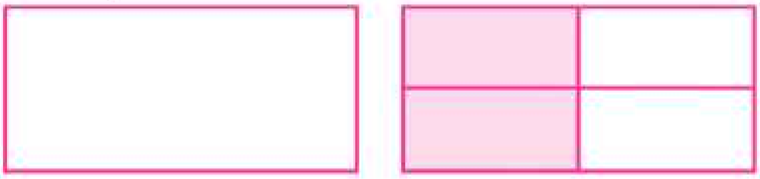
5.6. సమాన భిన్నాలు

రఘు దీర్ఘచతురస్రాకారపు ఒక కాగితంను తీసుకొని సమానంగా రెండు మడతలు చేసెను మరియు కాగితంపై కనిపిస్తున్న రెండు సమాన భాగాలలో ఒక భాగానికి రంగు వేసెను.



అతని వద్ద కుర్చొన్న జదుకు అడిగెను, రంగు వేసిన భాగం మొత్తం కాగితంలో ఎంత భాగం ?
జదు చెప్పెను - రెండు సమాన భాగాల్లో 1 భాగం. అందువలన రంగు గల భాగం మొత్తం కాగితం యొక్క $\frac{1}{2}$

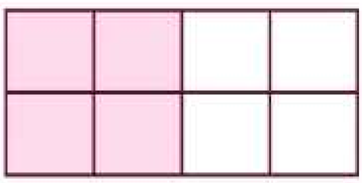
అతని ప్రక్కన దీనా గలదు. తను ఆ కాగతంను తీసుకొని సమానంగా 4 మడతలు చేసెను. తరువాత మడత పెట్టిన కాగితంలు విభజించెను.



విడదీసిన కాగితంను చూపించి జదుకు అడిగెను. మొత్తం కాగితంలో ఎన్ని భాగాలకు రంగు గలదు చెప్పు. జదు చెప్పెను 4 సమాన భాగాలలో 2 భాగాలు జదు ఇంకా చెప్పెను. అది మొత్తం కాగితంలో రంగు వేసిన భాగం $\frac{2}{4}$ అగును.

ప్రస్తుతం అందరూ చెప్పారు, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

తను దీనా నాలుగు భాగాలుగా చేసిన కాగితంను తీసుకొని దానిని మళ్ళీ సమానంగా రెండు మడతలు చేసెను.



కాగితం విప్పి అందరికి చూపించెను. అందరూ చూసిరి, రంగు భాగం మొత్తం భాగంలో $\frac{4}{8}$

అందువలన అందరూ చెప్పిరి : $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$

రండి, సమ భిన్నాలను గూర్చి తెలుసుకొనుటకు ప్రయత్నిద్దాం.

తెలుసుకోండి

ఒక భిన్నం యొక్క సమభిన్నాన్ని రాయునపుడు లవం మరియు హారం రెండింటిని ఒక నిర్ధిష్ట సంఖ్యచే గుణించవలెను. ఈ పద్ధతి ద్వారా ఒక భిన్నంతో అనేక సమభిన్నాలను పొందగలరు.

మనం చూశాం, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1x2}{2x2}$

మరియు $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}=\frac{1x4}{2x4}$ మొదలైనవి

అదే విధంగా, $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1x3}{2x3}$

ఇచ్చట $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ .... మొదలైనవి సమ భిన్నాలు అగును.

అదే విధంగా $\frac{1}{3}$ యొక్క నాలుగు సమాన భిన్నాలను రాయుటకు ప్రయత్నించండి.

వేరే విధంగా, $\frac{4}{8}=\frac{4\div 4}{8\div 4}=\frac{1}{2}$,

$\frac{2}{4}=\frac{2\div 2}{4\div 2}=\frac{1}{2}$

తెలుసుకోండి

ఒక భిన్నం యొక్క సమాన భిన్నాన్ని పొందుట కొరకు భిన్నం యొక్క లవం మరియు హారం రెండింటిని సమాన సంఖ్య ద్వారా భాగించవలెను.

కనుక $\frac{4}{8}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}$ మొదలైనవి సమాన భిన్నాలు

పరిశీలించండి : ఒకవేళ లవం మరియు హారం రండు ఏదైనా ఒక నిర్ధిష్ట సంఖ్యచే భాగింపబడిన యడల మనం పై పద్ధతిని ఉపయోగిద్దాం. ఈ విషయంలో తక్కువగా సంఖ్యలు సమాన భిన్నాలు అగును.

ఉదాహరణకు : $\frac{12}{15}$ యొక్క సమాన భిన్నాం $=\frac{12\div 3}{15\div 3}=\frac{4}{5}$

$\frac{9}{15}$ యొక్క సమాన భిన్నంను రాయండి దాని హారం 5 అగును.

అభ్యాసం 5.5

1. క్రింది భిన్నాలు యొక్క 5 సమాన భిన్నాలను కనుగొనుము.

   క) $\frac{2}{3}$ ఖ) $\frac{1}{3}$ గ) $\frac{2}{3}$ ఘ) $\frac{5}{9}$

2. $\frac{2}{5}$ భిన్నం యొక్క ఒక సమభిన్నం రాయండి. దాని లవం 6 అగును.
3. $\frac{15}{27}$ యొక్క సమాన భిన్నం రాయండి. దాని హారం 9 అగును.
4. $\frac{2}{7}$ యొక్క సమాన భిన్నం రాయండి. దాని హారం 63 అగును.
5. $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{4}$ ప్రతీ భిన్నంలో హారం 12 గల ఒకొక్క సమాన భిన్నాలను రాయండి.

6. $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}$ మరియు $\frac{7}{12}$ ప్రతీ భిన్నంనకు హారం 24 గల ఒకొక్క సమాన భిన్నాలను రాయండి.

7. $\frac{3}{8}$ యొక్క సమాన భిన్నంను రాయునపుడు 15,24 మరియు 32 మధ్యలో దేనిని హారంగా ఉపయోగించలేము ? కారణం ఏమిటి ?

5.7. సజాతి మరియు విజాతి భిన్నాలు

1	2	3
4	5	6
	7	

ప్రక్కన గల గది నుండి రెండేసి సంఖ్యలను తీసుకొని భిన్నాలను రాయండి.

మీరు రాసిన భిన్నాల మధ్యలో సమాన హారం గల భిన్నాలను సజాతి భిన్నాలని అందురు.

$\frac{7}{19}$ మరియు $\frac{7}{25}$ సజాతి భిన్నాలగునో ? ఎందుకు ?

వీటి హారం సమానం కాదు. కనుక వీటిని విజాతి భిన్నాలని అందురు.

జవాబులు రాయండి.

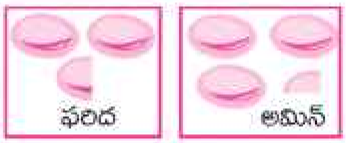
5 సజాతి భిన్నాలను రాయండి.

5 విజాతి భిన్నాలను రాయండి.

$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{7}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}$ మొదలైన భిన్నాలలో సజాతి భిన్నాలను వేరు చేసి రాయండి.

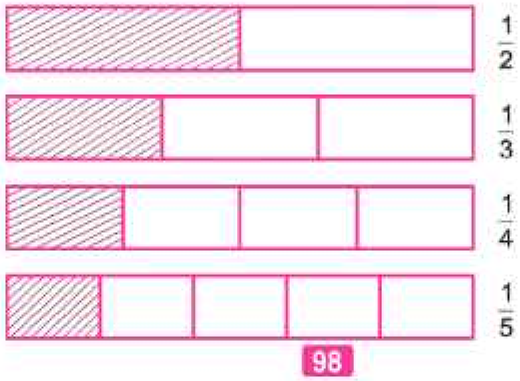
5.8. భిన్నాలను పోల్చుట

ఫరిద మరియు అమిన్‌ల ప్లేట్లులలో వరుసగా $2\frac{1}{2}$ మరియు $2\frac{1}{4}$ రొట్టెలు గలవు. ఫరిద వద్ద రెండు రొట్టెలు మరియు ఒక రొట్టె యొక్క సగం ఉన్నప్పుడు అమిన్ వద్ద మూడు రొట్టెల కంటె ఎక్కువ గలవు ?



$\therefore 3\frac{1}{4} > 2\frac{1}{2}$, అందువలన అమిన్ వద్ద అధికంగా రొట్టె గలదు.

క్రింది బొమ్మను చూడండి



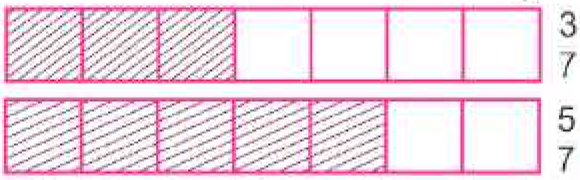
బొమ్మలో చూపించిన రంగు గల భాగాలను మొదటి బొమ్మలో భిన్నాలుగా చూపించడ మైనది. నాలుగింటి మొత్తం సమానం.

వీటిని పరిశీలించి భిన్నాలను పెద్ద నుండి చిన్నవిగా రాయండి.

5.8.1 సజాతి భిన్నాల మధ్య పోలిక

రండి $\frac{3}{7}$ మరియు $\frac{5}{7}$ మధ్య పోలిక చూద్దాం.

క్రింద రెండు సమాన దీర్ఘచతురాకార బొమ్మలు గలవు మరియు ప్రతీ దానిని 7 సమాన భాగాలుగా చేయడమైనది. మొదటి దానిలో 3 భాగాలను రంగు వేసి $\frac{3}{7}$ భిన్నాలన్ని చూపించడమైనది.



చెప్పండి చూద్దాం : రెండు సజాతి భిన్నాల మధ్యలో పెద్ద భిన్నానిని ఎలా గుర్తించగలం ?

రెండవ చిత్రంలో గల రంగు వేసిన భాగాలు మొదటి చిత్రం కంటె పెద్దవి.

అందువలన మనం చూశాం : $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$

స్వయంగా చేసి చూడండి

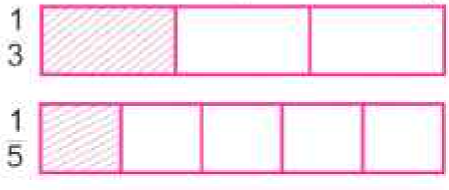
- బొమ్మ సహాయంతో $\frac{2}{5}$ మరియు $\frac{4}{5}$ లను పోల్చండి.
- సమాన ఆకారంలో గల రెండు కాగితపు ముక్కల తీసుకొండి. ప్రతీ దానిని ఎనిమిది మడతల చేసి $\frac{3}{8}$ మరియు $\frac{7}{8}$ మధ్య పోల్చచండి.

5.8.2. ఏక భిన్నాల మధ్య పోలిక

మనకు ముందుగా తెలుసు, ఏ భిన్నంలో లవం ఒకటి ఉండునో దానిని ఏక భిన్నం అందురు.

క) $\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{1}{5}$ ల మధ్యలో పోలిక చేద్దాం.

క్రింద రెండు సమాన దీర్ఘ చతురాకారపు బొమ్మలు గలవు. ఒక దానిని మూడు సమాన భాగాలు మరియు మరో దానిని ఐదు సమాన భాగాలు చేయడమైనది.



బొమ్మ ద్వారా తెలియుచున్నది $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$

బొమ్మ సహాయం లేకుండా మనం $\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{1}{5}$ మధ్యలో పెద్ద మరియు చిన్న భిన్నం చెప్పగలమా ?

రండి చూద్దాం -

ఒక యాపిల్‌ను 3 సమాన భాగాలుగా చేసిరి.

అదే ఆకారం గల మరో యాపిల్‌ను 5 సమాన భాగాలుగా చేసిరి.

ఏ యాపిల్ ముక్కలు చిన్నవి మరియు ఏ యాపిల్ ముక్కలు పెద్దవి అగును ?

తప్పని సరిగా యాపిల్ ఎన్ని ఎక్కువగా ముక్కలు అగునో, భాగాలు అంత చిన్నవిగా అగును.

దీనివలన తెలిసినది, $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$

అదే విధంగా $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$

> తెలుసుకోండి
> రెండు ఏక భిన్నాల మధ్యలో దేని హారం పెద్దదిగా ఉండునో ఆ భిన్నాం మరో దాని కంటె చిన్నది.

మనం చూశాం, $\frac{1}{5} > \frac{1}{3}$

అందువలన రెండు $\frac{1}{5}$ < రెండు $\frac{1}{3}$ అనగా $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$

మళ్ళీ తెలుసుకున్నాం, రెండు భిన్నాల యొక్క లవం సమానంగా ఉన్నచో, ఏ భిన్నం యొక్క హారం పెద్దగా ఉండునో ఆ భిన్నం రెండువ భిన్నం కంటె చిన్నది అగును.

ముందు గల సమాధానం వల్ల మనం తెలుసుకొగలం సమహారం గల రెండు భిన్నాల మధ్యలో (సజాతి భిన్నాలు) ఏ భిన్నం యొక్క లవం, వేరే దాని లవం కంటె పెద్దది అగునో ఆ భిన్నం మరో దాని కంటె పెద్ద భిన్నం అగును.

అనగా రెండు సజాతి భిన్నాల మధ్యలో పెద్ద లవం గల భిన్నం మరో దాని కంటె పెద్దది.

అభ్యాసం 1.1

1. క్రింది భిన్నాలను పోల్చండి.

క) $\frac{7}{10}, \frac{8}{10}$ ఖ) $\frac{11}{26}, \frac{15}{26}$ గ) $\frac{12}{105}, \frac{8}{105}$

2. ఊర్ధ్వ (పెద్ద) క్రమంలో రాయండి. (చిన్న నుండి పెద్ద)

క) $\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}$ ఖ) $\frac{12}{17}, \frac{5}{17}, \frac{10}{17}$

3. అదోః (చిన్న) క్రమంలో రాయండి. (పెద్ద నుండి చిన్న)

క) $\frac{1}{5}, \frac{11}{5}, \frac{3}{5}$ ఖ) $\frac{4}{13}, \frac{1}{13}, \frac{15}{13}$

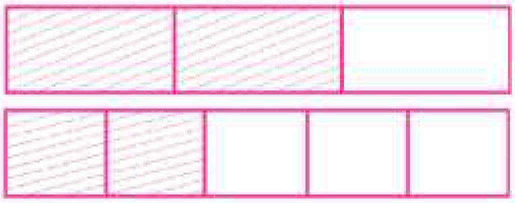
5.8.3. విజాతి భిన్నాల మధ్య పోలిక

మనం ముందు తెలుసుకున్నాం, ఏ భిన్నాల యొక్క హారం వేరుగా ఉండునో ఆ భిన్నాలను విజాతి భిన్నాలు అని అందురు.

క) క్రింద రెండు సమాన ఆకారంలో గల దీర్ఘ చతురస్రములను నిర్మించి ఒక దానిలో $\frac{2}{3}$ మరియు మరో దానిలో $\frac{2}{5}$ భాగాలలో రేఖలను తీయడమైనది.

$\frac{2}{3}$

$\frac{2}{5}$



ఇచ్చట కూడా బొమ్మల నుండి తెలుస్తుంది $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

మీరు తెలుసుకున్నారు, సమాన లవములు గల రెండు భిన్నాల మధ్యలో తక్కువ హారం గల భిన్నం, ఎక్కువ హారం గల భిన్నం కంటె పెద్ద.

ఖ) లవం వేరు మరియు హారం వేరు గల విజాతి భిన్నాలు

ప్రస్తుతం $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{4}$ మధ్యలో పోలిక చూద్దాం. మనం ముందుగా సజాతి భిన్నాల మధ్యలో పోలికలను చూశాం. అనగా సమహార భిన్నాల మధ్యలో పోలికలను చూచుట తెలుసు. ఒకవేళ $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{4}$ రెండు భిన్నాలను సమహన భిన్నాలుగా మార్చిన యడల పోలిక చేయడం సులువగును. మరో ప్రక్క రెండు భిన్నాలను సమలవం చేసినచో పరిస్థితి -1 లో గల పోలిక పద్ధతిని ప్రయోగించి రెండు సంఖ్యలను కూడా పోల్చగలం.

సమహార భిన్నాలుగా మార్చి పోల్చు పద్ధతి

రండి, $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{4}$ భిన్నాలను పోలిక చేద్దాం. దీని కొరకు సమభిన్నముల నిర్ణయించే పద్ధతి అవలంభించి రెండు భిన్నాలను సమహార భిన్నాలుగా మార్చాలి

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=\frac{12}{18}=\frac{14}{21}=\frac{16}{24}=\frac{18}{27}=..........$$

అదే విధంగా $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\frac{18}{24}=\frac{21}{28}=..........$

ప్రస్తుతం $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{4}$ ల యొక్క సమభిన్నాలను పరిశీలించండి. రెండు భిన్నాలను 12 హారం గల రెండు భిన్నాలు $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ మరియు $\frac{2}{4}=\frac{9}{12}$

$\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ అందువలన $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ అగును.

$\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{3}{4}$ యొక్క సమాన భిన్నంలో మరో సమహార భిన్నం లభిస్తుందా ?

మీరు చూడగలరు $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$ మరియు $\frac{3}{4}=\frac{18}{24}$

> **తెలుసా ?**
> ఒక జత భిన్నం కొరకు అనేక సమహార భిన్నాలు పొందగలం మరియు ఏదైనా జత తీసుకొని మనం పోల్చగలం.

ఉదాహరణ-3 : $\frac{4}{5}$ మరియు $\frac{5}{6}$ మధ్యలో ఏది పెద్దది నిర్ణయించండి.

> సమాధానం కొరకు సూచన :
> - $\frac{4}{5}$ యొక్క సమభిన్నాలను రాయండి.
> - $\frac{5}{6}$ యొక్క సమభిన్నాలను రాయండి.
> - $\frac{4}{5}$ మరియు $\frac{5}{6}$ యొక్క సమహారం గల సమభిన్నాలను రాయండి

సమాధానం :

$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{12}{15}=\frac{16}{20}=\frac{20}{25}=\frac{24}{30}=$..........

$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}=\frac{15}{18}=\frac{20}{24}=\frac{25}{30}=$..........

$\frac{4}{5}$ మరియు $\frac{5}{6}$ యొక్క సమహారం గల సమభిన్నాలు వరుసగా $\frac{24}{30}$ మరియు $\frac{25}{36}$

కాని $\frac{25}{30}>\frac{24}{30}$ అందువలన $\frac{5}{6}>\frac{4}{5}$

పై ప్రశ్న యొక్క సమాధానంను చూచి క్రింది ప్రశ్నల జవాబులను రాయండి.

క) $\frac{4}{5}$ మరియు $\frac{5}{6}$ రెండు భిన్నాల కొరకు సమహారం గల సమభిన్నాల రెండింటి హారంతో ఏ సంపర్కం గలదు ?

ఖ) ఎంచుకున్న సమహారం గల భిన్నాలో హారం ముందు భిన్నాల రెండింటి హారంతో ఏ సంపర్కం గలదు ?

మనం తెలుసుకున్నాం, ఇచ్చిన భిన్నాల కొరకు లభించిన సమహార భిన్నాల రెండింటి సాధారణ హారం 30, ఇచ్చిన భిన్నాల హారముల లబ్ధం (అనగా 5 X 6) తో సమానం. పరిశీలించండి - 30, 5 మరియు 6 యొక్క కనిష్ట సాధారణ గుణిజం అగును.

అందువలన రెండు భిన్నాలను పోల్చే సమయంలో మొదటిగా రెండు భిన్నాలను సమహారంలోకి మార్చాలి. సమహారం గల భిన్నాల రెండింటి సాధారణ హారం ఇచ్చిన భిన్నాల రెండింటి హారముల యొక్క లబ్ధంతో సమాన మగును. అనగా హారం రెండింటి సాధారణ గుణిజం అగును.

ఉదాహరణ-4 : $\frac{5}{6}$ మరియు $\frac{8}{15}$ మధ్యలో పెద్ద సంఖ్యను కనుగొనుము.

సమాధానం :

ప్రతీ భిన్నం యొక్క సమభిన్నాల పట్టికను తయారుచేద్దాం.

$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}=\frac{15}{18}=\frac{20}{24}=\frac{25}{30}=\frac{30}{36}=$..........

$\frac{8}{15}=\frac{16}{30}=\frac{24}{45}=$..........

> చెప్పండి చూద్దాం :
> ఒక భిన్నంనకు ఎన్ని సమభిన్నాలు ఉండును ?

రెండింటిలో గల రెండు సమహార భిన్నాలు -

$\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$ $\frac{8}{15}=\frac{16}{30}$

అందుకు 25 > 16 అందువలన $\frac{25}{30}>\frac{16}{30}$

$\therefore \frac{5}{6}>\frac{3}{15}$

> తెలుసా ?
> మనం ఇచ్చిన భిన్నాల రెండింటి హారముల క.సా.గు. నకు సమహారం గల భిన్నం పొందుటకు సాధారణ హారంగా ఎంచవలెను.

వికల్ప సమాధానం :

రెండు భిన్నాలు $\frac{5}{6}$ మరియు $\frac{8}{15}$ యొక్క హారముల క.సా.గు. నిర్ణయించ వలెను.

$6 = 2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

హారముల క.సా.గు= $2 \times 3 \times 5 = 30$

$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}$ (∴ 6 యొక్క 5 వంతులు 30)

$\frac{8}{15} = \frac{8 \times 2}{15 \times 2} = \frac{16}{30}$ (15 యొక్క 2 వంతులు 30)

కాని $25 > 16$ $\therefore \frac{5}{6} > \frac{8}{15}$

అభ్యాసం 5.7

1. క్రింది రెండు భిన్నాలను పోల్చండి.

క) $\frac{1}{5}$ మరియు $\frac{1}{6}$ ఖ) $\frac{1}{12}$ మరియు $\frac{1}{15}$

2. క్రింది భిన్నాల మధ్యలో ఏది పెద్దది ?

క) $\frac{3}{8}$ మరియు $\frac{5}{8}$ ఖ) $\frac{7}{15}$ మరియు $\frac{8}{15}$

3. క్రింది భిన్నాల మధ్యలో గల ఖాళీ గదిలో A మరియు = గుర్తులలో సరియైన గుర్తును పెట్టండి.

క) $\frac{5}{12}$ $\frac{5}{9}$ ఖ) $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$

గ) $\frac{4}{9}$ $\frac{8}{18}$ ఘ) $\frac{8}{11}$ $\frac{8}{13}$

4.క) ఊర్ధ్వః క్రమంలో (పెద్ద నుండి చిన్న) గూర్చి రాయండి.

$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}$

ఖ) అదో: క్రమంలో (చిన్న నుండి పెద్ద) అమర్చి రాయండి.

$\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}$

5. సమహారము గల భిన్నాలలోకి మార్చి భిన్నాలను పోల్చండి.

క) $\frac{3}{8}$ మరియు $\frac{5}{12}$ ఖ) $\frac{7}{15}$ మరియు $\frac{4}{9}$

5.9 భిన్నాల యొక్క కూడిక

ముందు తరగతిలో మనం సజాతి మరియు విజాతి భిన్నాల కూడిక మరియు తీసివేత గూర్చి ఆలోచించాం. ముందు గుర్తు తెచ్చుటకు రండి కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదాహరణ - 1 : $\frac{5}{7}$ మరియు $\frac{3}{7}$ ల యొక్క కూడికను కనుగొనుము.

సమాధానం : $\frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5+3}{7}=\frac{8}{7}$

అదే విధంగా $\frac{7}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7+3}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

> కూడికలో ఉపయోగించే పద్ధతి :
>
> కూడిక = $\frac{\text{లవముల మొత్తం}}{\text{సాధారణ హారం}}$

ఉదాహరణ - 2 : $\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{1}{2}$ ల కూడిక చేయుము.

సమాధానం : (మొదటి పద్ధతి)

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\times 2}{3\times 2}+\frac{1\times 3}{2\times 3}$$

$$=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$$

> కూడికలో ఉపయోగించే పద్ధతి :
>
> మొదట ఇచ్చిన విజాత భిన్నాన్ని సమహారం గల భిన్నం లోకి మార్చ వలెను, తరువాత ముందు చెప్పిన సూత్రంను తీసుకొని కూడిక చేయవలెను.

(వికల్ప పద్ధతి)

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\times 2+1\times 3}{6}$$

$$=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$$

> కూడికలో వాడే పద్ధతి :
>
> మొత్తం = $\frac{\text{మొదటి లవం}\times\text{రెండవ లవం + రెండవ లవం}\times\text{మొదటి హారం}}{\text{మొదటి హారం}\times\text{రెండవ హారం}}$

రెండు భిన్నాలను కూడిక చేయుటకు వేరువేరు ఉదాహరణలకు చూసారు. రెండు కంటె ఎక్కువ భిన్నాలను కూడిక చేయు అవసరం వచ్చును. అలాంటి ఉదాహరణను చూడండి.

ఉదాహరణ-3 : $\frac{2}{3},\frac{1}{4}$ మరియు $\frac{5}{6}$ ల యొక్క మొత్తంను కనుగొనుము.

> సమాధానం కొరకు సూచన :
>
> ఇచ్చట ఇచ్చిన రెండు భిన్నాలను సమహార భిన్నాలుగా మార్చవలెను.
>
> సమహార భిన్నాల సాధారణ హారం ఎంత అగునో చెప్పండి ?
>
> మీరు చేసిన కూడిక వల్ల తెలిసినది -
>
> సాధారణ హారం = ఇచ్చే భిన్నాల యొక్క హారాల లబ్ధం
>
> = 3 X 4 X 6 = 72
>
> అనగా సాధారణ హారం = భిన్నాల క.సా.గు.
>
> = 3, 4, 6ల క.సా.గు.
>
> = 12

సమాధానం :

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{2\times 4}{3\times 4}+\frac{1\times 3}{4\times 3}+\frac{5\times 2}{6\times 2}$$

$$=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}+\frac{10}{12}$$

$$=\frac{8+3+10}{12}$$

$$=\frac{21}{12}=1\frac{9}{12}=1\frac{3}{4}$$

[$\frac{9}{12}$ కనిష్ఠ రూపం $=\frac{3}{4}$]

కూడిక చేయుము.

1. క) $\frac{5}{2}+\frac{3}{7}$ ఖ) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$ గ) $\frac{6}{7}+\frac{5}{7}$

ఘ) $\frac{1}{4}+\frac{5}{7}$ ఙ) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ చ) $\frac{7}{8}+\frac{5}{9}$

5.10. భిన్నాల తీసివేత

సజాతి మరియు విజాతి భిన్నాల విషయంలో కూడిక వలె తీసివేత ప్రక్రియను ఏ విధంగా చేయవలెనో అది మనం ముందు తరగతిలో నేర్చుకున్నాం. రండి మరల గుర్తు తెచ్చుటకు కొన్ని ప్రశ్నల సమాధానాలు చేద్దాం.

ఉదాహరణ-1 : $\frac{3}{4}$నుండి $\frac{1}{2}$ తీసివేయుము.

సమాధానం : $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1\times 2}{2\times 2}$

$=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}$

$=\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}$

తీసివేయు పద్ధతి

మొదట రెండు భిన్నములను సమహారం గల సమభిన్నాలుగా మార్చి తీసివేత నిర్ణయించండి.

ఉదాహరణ-2 : $\frac{1}{5}$లో ఎంత కలిపిన ఆ మొత్తము $\frac{1}{2}$ అగును ?

సమాధానం :

నిర్ణయించు సంఖ్య = $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$

$=\frac{1\times(10\div 2)-1\times(10\div 5)}{2\times 5}$

$=\frac{1\times 5-1\times 2}{2\times 5}$

$=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$

తీసివేయు పద్ధతి

ఇచ్చిన ప్రశ్న సమాధానం కొరకు మొదటగా రెండు భిన్నాలను సమహార భిన్నాలుగా మార్చవలెను.

తీసివేయబడిన రెండు భిన్నాలను సమహర భిన్నాలుగా మార్చి పై సమాధానం చేయబడినది. పరిశీలించండి భిన్నాల యొక్క హారముల క.సా.గు. నిర్ణయించి ప్రతీ భిన్నం యొక్క హారంనకు నిర్ణయించిన క.సా.గు.ల సమహార భిన్నంలో మార్చి తీసివేతను చేయబడును.

తీసివేయుము -

క) $\frac{5}{6}$ నుండి $\frac{3}{4}$ ఖ) $\frac{5}{7}$ నుండి $\frac{1}{3}$

గ) $\frac{8}{15}-\frac{2}{5}$ ఘ) $\frac{5}{12}-\frac{1}{7}$

5.11 మిశ్రమ భిన్నాల కూడిక మరియు తీసివేత

మిశ్రమ భిన్నాని అపక్రమ భిన్నంగా మార్చిన తరువాత కూడిక లేక తీసివేతను చేయవలెను -

ఉదాహరణ-1

$\frac{3}{4}$ మరియు $1\frac{2}{3}$ ల యొక్క కూడిక చేయుము.

సమాధానం :

$1\frac{2}{3}$ మిశ్రమ భిన్నాన్ని అపక్రమ భిన్నంగా మారుద్దాం.

$$1\frac{2}{3} = \frac{1 \times 3 + 2}{3} = \frac{5}{3}$$

కూడిక = $\frac{3}{4} + 1\frac{2}{3} = \frac{3}{4} + \frac{5}{3}$

$$= \frac{3 \times 3 + 5 \times 4}{12}$$

$$= \frac{9 + 20}{12} = \frac{29}{12} = 2\frac{5}{12}$$

ఉదాహరణ-2 :

$2\frac{2}{5}$ మరియు $1\frac{3}{4}$ ల కూడిక చేయండి.

సమాధానం :

మొదటి పద్ధతి

$2\frac{2}{5} = \frac{12}{5}$ మరియు $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

మొత్తం = $2\frac{2}{5} + 1\frac{3}{4}$

$$= \frac{12}{5} + \frac{7}{4}$$

$$= \frac{12 \times 4 + 7 \times 5}{20}$$

$$= \frac{48 + 35}{20}$$

$$= \frac{83}{20} = 4\frac{3}{20}$$

రెండవ పద్ధతి

$$2\frac{2}{5} + 1\frac{3}{4}$$

$$= 2 + \frac{2}{5} + 1 + \frac{3}{4}$$

$$= (2 + 1) + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}$$

$$= 3 + \frac{2 \times 4 + 3 \times 5}{20}$$

$$= 3 + \frac{8 + 15}{20} = 3 + \frac{23}{20} = 3 + 1\frac{3}{20}$$

$$= 3 + 1 + \frac{3}{20} = 4 + \frac{3}{20} = 4\frac{3}{20}$$

రెండు పద్ధతులలో కూడిక విలువ సమానం. మొదటి పద్ధతి కంటె రెండవ పద్ధతిలో గల భేదం రాయండి.

$2\frac{1}{3}$ మరియు $2\frac{2}{3}$ ల కూడిక రెండు పద్ధతులలో నిర్ణయించండి.

ఉదాహరణ-3 :

$1\frac{1}{3}$ నుండి $1\frac{1}{4}$ ను తీసివేయుము.

సమాధానం :

మొదటి పద్ధతి :

$1\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}$

$=\frac{4}{3}-\frac{5}{4}$ (అపక్రమ భిన్నాలుగా మార్చడమైనది)

$=\frac{4\times 4-5\times 3}{3\times 4}$

$=\frac{16-15}{12}$

$=\frac{1}{12}$

వికల్ప పద్ధతి :

$1\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}$

$=(1+\frac{1}{3})-(1+\frac{1}{4})$

$=1+\frac{1}{3}-1-\frac{1}{4}$

$=(1-1)+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$

$=0+\frac{1\times 4-1\times 3}{12}=0+\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$

ఉదాహరణ - 4 :

1 నుండి $\frac{3}{4}$ తీసివేయుము

సమాధానం : $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{1}-\frac{3}{4}$ (1 నకు $\frac{1}{1}$ రూపంలో రాద్దాం)

$=\frac{1\times 4-3\times 1}{4}$

$=\frac{4-3}{4}$

$=\frac{1}{4}$

తెలుసా ?

భిన్నాల యొక్క సంకలన వ్యవకలన విషయంలో కూడిక మరియు తీసివేత కొరకు గల సంఖ్యలలో ఒకటి సహజ సంఖ్య అయినచో దానిని క్రింది విధంగా మార్చవలెను.

$1=\frac{1}{1},\ 2=\frac{2}{1},\ 3=\frac{3}{1},\ 8=\frac{8}{1}$ మొదలైనవి

మీ నోట్‌బుక్‌లో క్రింది ఇవ్వబడిన సంకలన-వ్యవకలన గదులను గీసి ఖాళీలను పూరించండి.

క) (+ →, − ↓)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

ఖ) (+ →, − ↓)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

అభ్యాసం 5.8

సంకలనం చేయండి.

1. $\frac{2}{3}$ మరియు $\frac{1}{3}$
2. $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$
3. $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{5}{9}$
4. $1\frac{2}{5}+2\frac{1}{5}$
5. $2\frac{1}{7}+3\frac{2}{7}$
6. $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$
7. $\frac{3}{8}+\frac{5}{16}$
8. $\frac{5}{8}+\frac{5}{12}$
9. $\frac{4}{9}+\frac{5}{12}$
10. $1\frac{3}{8}+2\frac{5}{12}$
11. $1\frac{2}{5}+2\frac{3}{10}+3\frac{1}{2}$
12. $1\frac{1}{10}+2\frac{1}{15}+3\frac{1}{6}$

వ్యవకలనం చేయండి. (తీసివేత)

13. $\frac{3}{8}-\frac{1}{8}$
14. $\frac{7}{12}-\frac{5}{12}$
15. $\frac{2}{3}-\frac{5}{12}$
16. $\frac{7}{18}-\frac{2}{9}$
17. $\frac{5}{12}-\frac{1}{6}$
18. $1\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$
19. $2\frac{3}{8}-1\frac{1}{4}$
20. $3\frac{5}{12}-2\frac{3}{8}$
21. $3\frac{7}{10}-2\frac{8}{15}$
22. $2-1\frac{3}{5}$
23. $3-2\frac{7}{8}$
24. $2-1\frac{5}{12}$
25. దుఖానం నుండి సరిత $\frac{2}{5}$ మీటర్ల పొడవు మరియు లలిత $\frac{3}{4}$ మీటర్ల పొడవు గల రిబ్బనులను కొనిరి. ఇద్దరు కలిపి మొత్తం ఎంత పొడవు గల రిబ్బను కొనిరి ?
26. విద్యాలయము యొక్క మైదానం చుట్టూ ఒకసారి నడిచి వచ్చుటకు నిలుకు $2\frac{1}{5}$ నిమిషాలు సమయం పట్టును. అదే దూరంను నడుచుటకు జిత్తుకు $\frac{7}{4}$ నిమిషాలు సమయం పట్టును. ఇద్దరి మధ్యలో ఎవరు తక్కువ సమయం తీసుకొందురు మరియు ఎంత తక్కువ సమయం తీసుకొందురు ?

ఆరవ అధ్యాయం

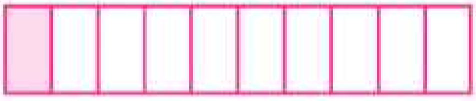
దశాంశ భిన్నాలు

6.1. మనకు తెలిసినవి

10 సమాన భాగాలలో ఒక భాగం $= \frac{1}{10} = 0.1$

100 సమాన భాగాలలో ఒక భాగం $= \frac{1}{100} = 0.01$

ఇచ్చట $\frac{1}{10}$ కు ఒక దశాంశము మరియు $\frac{1}{100}$ కు ఒక శతాంశము అని అందురు.



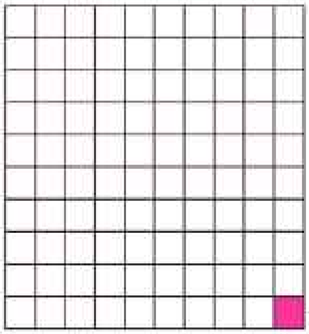
$\frac{1}{10}$

అదే విధంగా $\frac{2}{10}, \frac{3}{100}$ లకు వరుసగా 2 దశాంశము మరియు 3 శతాంశము అందురు.

భిన్నాలను దశాంశ భిన్నాలుగా మార్చిన లభించును.

$$\frac{2}{10} = 0.2 \text{ మరియు } \frac{3}{100} = 0.3$$

కనుక $\frac{2}{10}$ భిన్నము మరియు 0.2 దాని దశాంశము అగును.



$\frac{1}{100}$

క్రింది పట్టికలో గల ఖాళీలను పూరించండి.

భిన్నము	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{27}{10}$	$1\frac{1}{10}$	$2\frac{1}{100}$	$15\frac{3}{10}$
దశాంశ భిన్నం						

ముందు తరగతిలో ఒక దశాంశము, ఒక శతాంశము గూర్చి తెలిసిన కూడా దాని పునరావృత్తి ఇచ్చట అవసరము క్రింది ఉదాహరణమును పరిశీలించండి.

రవి మరియు శరత్ యొక్క పెన్సిల్ పొడవులు వరుసగా 7 సెం.మీ. 2 మి.మీ. మరియు 8 సెం.మీ. 3 మి.మీ. ఇచ్చిన వాటిని సెం.మీ.లలోకి మార్చగలమా ? వీటి కొరకు అవసరమైన సోపానాలలో జవాబులు రాయండి.

1 సెం.మీ. = ________ మి.మీ.

1 మి. మీ. = ________ సె.మీ.

రవి యొక్క పెన్సిల్ పొడవు = 7 సెం.మీ. 2 మి.మీ. ________ సెం.మీ.

శరత్ యొక్క పెన్సిల్ పొడవు = 8 సెం.మీ. 3 మి.మీ. = ________ సెం.మీ.

> **తెలుసా ?**
>
> 1 మి.మీ. = $\frac{1}{10}$ సె.మీ.
>
> 2 మి.మీ. = $\frac{2}{10}$ సె.మీ.

రవి యొక్క పెన్సిల్ పొడవు = 7 సెం.మీ. 2 మి.మీ.

$$= 7\frac{2}{10} = 7.2 \text{ సెం.మీ}$$

అదే విధంగా శరత్ యొక్క పెన్సిల్ పొడవు = 8 సెం.మీ. 3 మి.మీ.

$$= 8\frac{3}{10} \text{ సెం.మీ.} = 8.3 \text{ సెం.మీ.}$$

ముందు తరగతిలో మనం దశమిక సంఖ్య గల ప్రతీ అంకె యొక్క స్థాన విలువల గూర్చి ఆలోచన చేసాం. 2.35 ఒక దశమిక సంఖ్య. ఈ సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 2, దశాంశ స్థానంలో 3 మరియు శతాంశ స్థానంలో 5 గలవు.

2.35 యొక్క ఒకట్ల స్థానంలో 2 గలదు. అందువలన 2 యొక్క విలువ 2 ఒకట్లు లేక 2

దశాంశ స్థానంలో 3 గలదు. అందువలన 3 యొక్క విలువ 3 దశాంశాలు లేక $\frac{3}{10}$

శతాంశ స్థానంలో 5 గలదు. అందువలన 5 యొక్క విలువ 5 శతాంశాలు లేక $\frac{5}{100}$

> **తెలుసా ?**
>
> 2.35 నకు 2 దశమిక మూడు, ఐదు అని చదవవలెను.

2.35నకు విస్తరించి రాసిన

$$2.35 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$$

స్థాన విలువ పట్టికను ఉపయోగించి దశమిక సంఖ్యను రాద్దాం.

2.35నకు స్థాన విలువల పట్టికను ఉపయోగించి ఎలా రాయగలం ? పరిశీలించండి.

ఒకట్లు	దశాంశ	శతాంశం
2	3	5

మీరు 24.57నకు రెండుఅ అనగా విస్తరించి మరియు స్థాన విలువ పట్టికను ఉపయోగించి రాయండి.

అభ్యాసం - 6.1

1. ఈ క్రింది వాటిని దశాంశాలలో రాయండి.

వందల 100	పదులు 10	ఒకట్లు 4	దశాంశం $\frac{1}{10}$	దశమిక భిన్నం
2	3	4	5	
	1	5	7	
1	0	0	3	
		3	7	

2. ఖాళీలను పూరించండి.

క) 23 సెం.మీ. 5 సెం.మీ = ________ సెం.మీ. (ఖ) 55 మి.మీ. = ________ సెం.మీ.

3. ఈ క్రింది పట్టిక యొక్క ఖాళీలను పూరించండి.

సంఖ్య యొక్క విస్తారిత రూపం	సాధారణ భిన్నం	దశమిక సంఖ్య
2 ఒకట్లు 3 దశాంశాలు	$2\frac{3}{10}$	2.3
3 పదులు 5 ఒకట్లు 7 దశాంశాలు		
7 ఒకట్లు 5 దశాంశాలు		
	$8\frac{3}{10}$	
		2.3
	$15\frac{2}{7}$	
		2.3

ఉదాహరణ - 1

క్రింది సంఖ్యలను స్థాన విలువల ననుసరించి విస్తారిత రూపంలో రాయండి.

(క) 20.5 (ఖ) 31.57

సమాధానం :

సంఖ్య	పదులు (10)	ఒకట్లు (1)	దశాంశం	శతాంశం
20.5	2	0	5	
31.57	3	1	5	7

ఉదాహరణ-2

క్రింది విస్తరణ రూపంలో వ్రాయబడివున్న సంఖ్యలను దశమిక రూపంలో మార్చండి.

క) మూడు ఒకట్లు మరియు ఐదు దశంశాలు

ఖ) రెండు పదులు నాలుగు ఒకట్లు ఆరు దశంశాలు

సమాధానం :

క) మూడు ఒకట్లు మరియు ఐదు దశాంశాలు

$$= 3+\frac{5}{10}=3.5$$

ఖ) రెండు పదులు నాలుగు ఒకట్లు ఆరు దశాంశాలు

$$= 20+4+\frac{6}{10}=24.6$$

చెప్పండి చూద్దాం :
రెండు పదులు ఆరు దశాంశములను దశమిక సంఖ్యలో రాసిన ఏ సంఖ్య అగును ?

6.2 భిన్నాలను దశమిక సంఖ్యలలోకి మార్చుట

మనం తెలుసుకున్నాం ఏ విధంగా 10,000 మరియు 1000 హారం గల భిన్నాలను దశమిక సంఖ్యల లోనికి మార్చవచ్చును.

రండి ఒక భిన్నం యొక్క హారం 10 కాకుండా వేరే సంఖ్యలు అనగా 2,5 అగునో, అప్పుడు ఇచ్చిన భిన్నాన్ని ఏ విధంగా దశమిక సంఖ్యగా మార్చగలమో ఒక ఉదాహరణను తీసుకొని తెలుసుకుందాం.

క) $\frac{11}{5}=\frac{22}{10}$ (హారం 10గా చేయడమైనది)

$=2\frac{2}{10}$ (మిశ్రమ భిన్నంగా మార్చడమైనది)

ఖ) $=2+\frac{2}{10}=2.2$ (హారం 10గా చేయడమైనది)

$\frac{105}{2}=\frac{105\times 5}{2\times 5}=\frac{525}{10}$

$=52\frac{5}{10}=52+\frac{5}{10}$

$=50+2+\frac{5}{10}=52.5$

తెలుసా ?

దశాంశ భిన్నాలు సామాన్య భిన్నాల యొక్క మరో రూపం ఏ భిన్నాల యొక్క హారం 10 లేక 10 యొక్క గుణిజాలు అగునో వాటిని దశమిక సంఖ్యలుగా మార్చ వచ్చును.

క్రింది భిన్నాలను దశమిక సంఖ్యలలోకి మార్చండి.

$\frac{3}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{17}{5}$

6.2.1 దశమిక భిన్నాలలో గల సంఖ్యలను సాధారణ భిన్నాలుగా మార్చుట

10,2 మరియు 5 హారం గల భిన్నాలను ఏ విధంగా దశమిక భిన్నాలుగా మార్చ గలమో మనం తెలుసుకున్నాం. ప్రస్తుతం దశమిక సంఖ్యను ఏ విధంగా సాధారణ భిన్నంగా మార్చగలమో ఆలోచిద్దాం.

క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

క) $1.2=1+\frac{2}{10}=1\frac{2}{10}=\frac{12}{10}$

ఖ) 13.57

13.57నకు స్థాన విలువల పట్టికలో రాద్దాం.

పదులు (10)	ఒకట్లు (1)	దశాంశ	శతాంశం
1	3	5	7

ఇచ్చట పదుల స్థానంలో 1 గలదు. అందువలన 1 యొక్క స్థాన విలువ పది లేక 10.

ఒకట్ల స్థానంలో 3 గలదు. అందువలన 3 యొక్క స్థానిక విలువ 3 ఒకట్లు లేక 3

దశాంశ స్థానంలో 5 గలదు. అందువలన 5 యొక్క స్థానిక విలువ 5 దశాంశం లేక $\frac{5}{10}$

శతాంశ స్థానంలో 7 గలదు. అందువలన 7 యొక్క స్థానిక విలువ 7 శతాంశం లేక $\frac{7}{100}$

దీనిని ఈ విధంగా రాయగలం -

$$13.57 = 10 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$$

$$= 13 + \frac{57}{100} = 13\frac{57}{100} = \frac{1357}{100}$$

అభ్యాసం - 6.2

1. క్రింది భిన్నాలను దశాంశ సంఖ్యల రూపంలో రాయుండి.

క) $\frac{7}{10}$ ఖ) $\frac{7}{100}$ గ) $\frac{11}{100}$ ఘ) $\frac{135}{100}$

ఙ) $\frac{27}{5}$ చ) $\frac{16}{5}$ ఛ) $\frac{35}{2}$

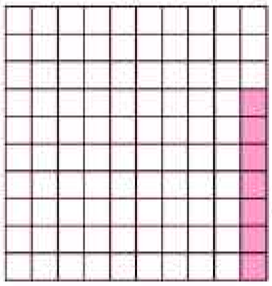
2. క్రింది దశాంశ సంఖ్యలను సాధారణ భిన్నాలలోనికి మార్చండి.

క) 12.3 ఖ) 17.53 గ) 8.23 ఘ) 31.7

6.3. దశాంశ భిన్నాల పోలిక

ప్రస్తుతం మీరు చెప్పగలరా 0.07 మరియు 0.1 మధ్యలో పెద్ద దశమిక సంఖ్య ఏది ?

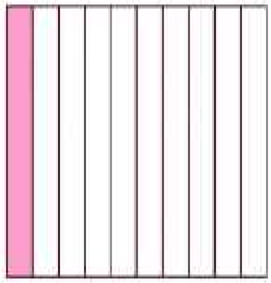
క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు చెప్పండి.



$0.07 = \frac{7}{100}$

- 0.07నకు సామాన్య భిన్నంలోనకి మార్చండి.
- 0.1నకు సామాన్య భిన్నంలోనికి మార్చండి.
- రెండింటి యొక్క భిన్నాల హారంను సమహారంలోనికి మార్చిన ఎంత అగును ?
- సమహార భిన్నాల రెండింటి లవములు రాయండి.
- రెండు భిన్నాలను పోల్చిన ఏ భిన్నం పెద్దది అగును ?

$0.1 = \frac{1}{10} = \frac{10}{100}$



ప్రస్తుతం పై ప్రశ్నల సమాధానాలను కలిపి రాసి సమాధానం చేద్దాం.

$$0.07 = \frac{7}{100} \text{ మరియు } 0.1 = \frac{1}{10}$$

0.07 మరియు 0.1 యొక్క సాధారణ భిన్నాలను సమహార భిన్నలుగా మార్చిన వరుసగా $\frac{7}{100}$ మరియు $\frac{10}{100}$ అగును.

ప్రస్తుతం చూడగా $\frac{10}{100} > \frac{7}{100}$

అనగా 0.1 > 0.07

తెలుసా ?

0.1 > 0.07 కు 0.07 < 0.1గా రాయవచ్చును. అదే విధంగా 0.1 > 0.01 > 0.001కు 0.001< 0.01 < 0.1గా రాయవచ్చును

అభ్యాసం - 6.3

1. ప్రతీ రెండు దశాంశ భిన్నాలను బొమ్మలలో చూపించండి మరియు పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించండి.

   క) 0.47 మరియు 0.3 ఖ) 0.5 మరియు 0.05 గ) 1.5 మరియు 0.68

2. క్రింది దశాంశ భిన్నాలులో ఏది పెద్దది ?

   క) 0.93 మరియు 0.093 ఖ) 1.1 మరియు 1.01

   గ) 0.83 మరియు 0.038 గ) 1.5 మరియు 1.50

   ఙ) 0.099 మరియు 0.19

3. మీరు స్వయంగా ఏవైనా రెండు దశమిక సంఖ్యలను తీసుకొనుము మరియు వాటి మధ్య పెద్ద సంఖ్యను ఎంచుము.

6.4. దశాంశ భిన్నాల వాడుక

6.4.1. సొమ్మును లెక్కించుటలో దశాంశ భిన్నాలు.

మనకు తెలుసు 100 పైసలనగా ఒక రూపాయి అగును.

అనగా 1 పైసా = $\frac{1}{10}$ రూపాయలు

అందువలన 65 పైసా = $\frac{65}{100}$ రూ. = 0.65 రూ.

మరియు 5 పై = $\frac{5}{100}$ రూ. = 0.05 రూ.

ప్రస్తుతం చెప్పగలరా 207 పై ఎన్ని రూపాయలు ?

207 పై = 2 రూ. 7 పై. = 2.09 రూ.

తెలుసా ?

ఒక పైసాను రూపాయిగా మార్చిన 0.01 రూపాయిలు అగును. కాని 10 పైసాలకు రూపాయిలలో 0.10 రూపాయులుగా రాయవచ్చు అందువలన 0.10 లేక 0.1 > 0.01

సమాధానాలు రాయండి.

క) 2 రూ. 5 పై. మరియు 2 రూ. 50 పై.లను రూపాయలలో మార్చండి.

ఖ) 20 రూ. 17 పై. మరియు 21 రూ. 75 పై.లను రూపాయలలోకి మార్చండి.

6.4.2 పొడవును కొలుచుటలో దశాంశ భిన్నాలు :

మనకు తెలుసు 100 సె.మీ. = 1 మీటరు

1 సె.మీ. = $\frac{1}{100}$ మీ. = 0.01 మీ.

అందువలన 56 సె.మీ. = $\frac{56}{100}$ మీ. = 0.56 మీ.

ప్రస్తుతం చెప్పగలరా 156 సె.మీ. ఎన్ని మీటర్లగును ?

150 సె.మీ = 100 సె.మీ + 56 సె.మీ.

= 1 మీ. + $\frac{56}{100}$ మీ.

= 1.56 మీ.

దశాంశ భిన్నాలలోనికి మార్చండి.

క) 4 మి.మీ.లను సె.మీ.లో మార్చండి.

ఖ) 7 సె.మీ. 5 మి.మీ.లను సె.మీ.లో మార్చండి.

గ) 52 మీటర్లను కి.మీ.లలో మార్చండి.

ఘ) 152 మీటర్లను కి.మీ.లలో మార్చండి.

6.4.3. బరువును కొలుచుటలో దశాంశ భిన్నాలు

శుభ్రత్ బజారు నుండి 500 గ్రాముల దుంపలు, 250 గ్రాముల ఉల్లి, 400 గ్రాముల దోశకాయలు మరియు 100 గ్రాముల కేరెట్ తెచ్చెను. అతను మొత్తం ఎంత బరువు కూరగాయలు తెచ్చెను ?

రండి మొత్తం బరువును తెలుసుకొనుటకు అతను తెచ్చిన కూరగాయల బరువులను కలుపుదాం.

500 గ్రా. + 200 గ్రా. + 400 గ్రా. + 100 గ్రా. = 1250 గ్రా.

మనకు తెలుసు, 1 కి.గ్రా. = 1000 గ్రా.

లేక 1000 గ్రా. = 1 కి.గ్రా.

అందువలన 1250 గ్రా. = 1000 గ్రా. + 250 గ్రా.

= 1 కి.గ్రా. + $\frac{250}{1000}$ కి.గ్రా.

= 1 కి.గ్రా. + 0.250 కి.గ్రా.

= 1.250 కి.గ్రా.

అనగా అతను మొత్తం 1.250 కి.గ్రా. బరువు గల కూరగాయలను తెచ్చెను.

మనకు తెలుసు 1000 గ్రాములు = 1 కి.గ్రా.

1 గ్రాము = $\frac{1}{1000}$ కి.గ్రా. = 0.001 కి.గ్రా.

18 గ్రాములు $\frac{15}{1000}$ కి.గ్రా. = 0.018 కి.గ్రా.

2350 గ్రా. = $\frac{2350}{1000}$ కి.గ్రా. = $\left(2+\frac{350}{1000}\right)$ కి.గ్రా.

= 2 కి.గ్రా. + 0.350 కి.గ్రా. = 2.350 కి.గ్రా.

ప్రస్తుతం చెప్పగలరా 2 కి.గ్రా. 9 గ్రా. ఎన్ని కి.గ్రా.తో సమానం

2 కి.గ్రా. 9 గ్రా. = 2 కి.గ్రా. + $\frac{9}{1000}$ కి.గ్రా.

= $\left(2+\frac{9}{1000}\right)$ కి.గ్రా.

= 2.009 కి.గ్రా.

దశాంశ భిన్నాలలోనికి మార్చండి.

క) 450 గ్రాములను కి.గ్రా.లోనికి మార్చండి.

ఖ) 2015 గ్రాములను కి.గ్రా.లోనికి మార్చండి.

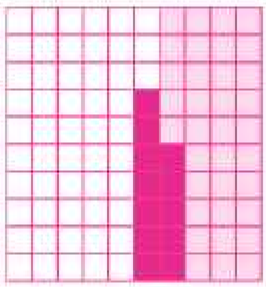
గ) 3 కి.గ్రా. 25 గ్రాములను కి.గ్రా.లోనికి మార్చండి.

6.5 దశాంశ భిన్నాల సంకలనము

దశాంశ భిన్నాల కూడికను సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

ఉదాహరణ - 1 0.35 మరియు 0.12 ల మొత్తంను కనుగొందాం

సమాధానం : రండి 100 గదుల గల ఒక బొమ్మను తయారుచేద్దాం.



- ఈ బొమ్మలో 0.35ను ఒక రంగులో చూపిద్దాం 0.35 అనగా $\frac{35}{100}$ లేక 100 భాగాలలో 35 భాగాలు
- అదే విధంగా 0.12ను మరో రంగుతో చూపిద్దాం.
- బొమ్మను చూచి చెప్పండి, మొత్తం ఎన్ని గదులను రంగు వేయడమైనది.
- పరిశీలించండి, 100 గదులలో 46 గదులను రంగు గలదు అనగా భిన్నంలో దీనిని $\frac{47}{100}$ గా రాయవచ్చును మరియు దశాంశ భిన్నాలను స్థాన విలువల ననుసరించి క్రిందకు రాయడమైనది.

సంఖ్య	ఒకట్లు	దశాంశం	శతాంశం
0.35 →	0	3	5
0.12 →	0	1	2
మొత్తం →	0	4	7

0.35లో 3 యొక్క స్థాన విలువ 3 దశాంశాల మరియు 5 యొక్క స్థాన విలువ 5 శతాంశాలు.

అదే విధంగా 0.12లో 1 యొక్క స్థాన విలువ 1 దశాంశం మరియు 2 యొక్క స్థాన విలువ 2 శతాంశాలు

$\therefore\ 0.35 + 0.12 = 0.47$

ఉదాహరణ - 2 ప్రస్తుతం 0.63 మరియు 1. 581 యొక్క కూడికను చేయగలరా ?

సమాధానం :

సంఖ్య	ఒకట్లు	దశాంశం	శతాంశం	సహాశాంశం
0.63	0	6	3	0
1.581	1	5	8	1
మొత్తం	2	2	1	1

తెలుసా ?
0.63కు కూడా 0.630 గా రాయవచ్చు. రెండింటి విలువల సమానం కారణ మేమి ?

$\therefore$ నిర్ణయించిన మొత్తము 0.63 + 1.581 = 2.211

మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం ?

ఏ దశమిక సంఖ్యలను సంకలనము చేయుటకు చెప్పబడునో వాటిని మొదట స్తాన విలువల ననుసరించి క్రింధ రాయవలెను. ఆ తరువాత సహజ సంఖ్యలను కలపునట్లు వాటిని కూడిక చేయవలెను.

ఉదాహరణ - 3

మిహిర్ ఒక పెన్సిల్ మరియు కలమును వరుసగా 2.50 రూ.లు మరియు 9. 50 రూ.లుకు కొనెను. అయిన అతను మొత్తం ఎంత డబ్బు ఖర్చు చేసెను ?

సమాధానం :

కలము యొక్క వెల = 9.50

పెన్సిల్ యొక్క వెల = 2.50

మొత్తం = 9.50 + 2.50

12.00 రూ.లు

ఉదాహరణ-4

సమ్‌నాన్ 5 కి.మీ. 52 మీ. బస్సులో మరాయు 2 కి.మీ. 265 మీ. కారణలో వెళ్లి ఒక స్థానముకు చేరెను. అతను మొత్తం ఎన్ని కిలోమీటర్లు దూరం అతిక్రమించెను ?

సమాధానం :

బస్సులో అతిక్రమించిన దూరం = 5 కి.మీ. 52 మీ.

= 5.052 కి.మీ.

కారులో అతిక్రమించిన దూరం = 2 కి.మీ. 265 మీ.

= 2265 మీ.

మొత్తం అతిక్రమించిన దూరం = (5.052 + 2265) కి.మీ

= 7.317 కి.మీ.

అభ్యాసం - 6.1

1. కూడిక చేయండి.

క) $8.5 + 0.03$

ఖ) $15 + 12.5 + 0.523$

గ) $0.75 + 10.531 + 3.7$

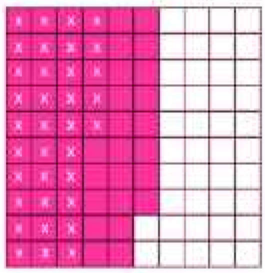
2. మమత పుట్టిన రోజున తన నాన్న రూ. 15.50 మరియు అమ్మ రూ. 23.75 ఇచ్చిరి. ఇద్దరు కలిపి మమతకు ఎంత డబ్బు ఇచ్చిరి ?

3. అక్బల్ ప్రతీ దినం ఉదయం 2 కి.మీ. 35 మీ. మరియు సాయంకాలం 1 కి.మీ. 7 మీ. నడుచును. అయిన అతను దినమునకు ఎంత దూరం నడుచును ?

4. సంజయ్ ప్రభుత్వ సరకుల విక్రయ దుఖానం నుండి 5 కి.గ్రా. 400 గ్రా. బియ్యం, 2 కి.గ్రా. 50 గ్రా. చీని మరియు 10 కి.గ్రా. 750 గ్రా. గోధుమలను కొనెను. అతను మొత్తం ఎంత బరువు గల వస్తువులను కొనెను ?

6.6. దశాంశ భిన్నాల వ్యవకలనం.

- 0.58ను భిన్నంలో మార్చిన $\frac{58}{100}$ అగును. దీని అర్థం 100 భాగాలలో 58 భాగాలు. ప్రక్క బొమ్మలో దీనిని రంగు వేసి చూపించడమైనది.
- ఇప్పుడు దాని నుండి 0.25ను తీసివేద్దాం. 0.35 లేక $\frac{35}{100}$. దీని అర్థం 100 భాగాలలో 35 భాగాలు.
- ముందుగా రంగు వేసిన 58 భాగాల నుండి 35 భాగాలను (X) గుర్తు ఇవ్వడమైనది. మిగిలిన రంగు గల భాగాలు ఎన్ని ?
- మిగిలిన 23 రంగు గల భాగాలను భిన్నాలలో మార్చిన $\frac{23}{100}$ అగును. దీనిని దశాంశ భిన్నాలలో రాసిన 0.23గా రాయవలెను.



రండి రెండు సంఖ్యలను ఒకదాని క్రింద మరొకటి స్థాన విలువల ననుసరించి రాద్దాం. క్రింది పట్టికను చూడండి.

సంఖ్య		ఒకట్లు	దశాంశం	శతాంశం
0.58	→	0	5	8
0.35	→	0	3	5
తీసివేత	→	0	2	3

$\therefore$ $0.58 - 0.35 = 0.23$ ।

ఉదాహరణ - 2 : 3.5 నుండి 1.73ను తీసివేయండి.

సంఖ్య		ఒకట్లు	దశాంశం	శతాంశం
3.5	→	3	5	0
1.74	→	1	7	4
మొత్తం	→	1	7	6

3.5 - 17.4 = 1.76

ఉదాహరణ - 3 :

రామ దగ్గర 7.75 రూ.లు ఉండెను. అందులో నుండి 5.25 రూ.ల చాక్లెట్లను కొనెను. ఆ తరువాత ఎంత డబ్బు మిగిలెను ?

సమాధానం :

రామ వద్ద రూపాయలు = 7.75

చాక్లెట్లను కొన్న రూపాయలు = 5.25

మిగిలిన రూపాయలు = 7.75 - 5.25

= 2-50 రూ.లు

ఉదాహరణ - 4

నిహార్ 5 కి.గ్రా. 200 గ్రాముల బరువు గల ఒక పుచ్చకాయను కొని దాని నుండి 2 కి.గ్రా. 750 గ్రాముల పుచ్చకాయను పొరుగువారికి ఇచ్చెను. అయిన ఎంత బరువు గల పుచ్చకాయ నిహార్ వద్ద మిగిలెను ?

సమాధానం :

పుచ్చకాయ బరువు = 5.200 కి.గ్రా.

పొరుగువారికిచ్చిన పుచ్చకాయ బరువు = 2.750 కి.గ్రా.

అతని వద్ద గల పుచ్చకాయ మిగిలిన బరువు = 5.200 కి.గ్రా. - 2.750 కి.గ్రా.

= 2.450 కి.గ్రా.

∴ నిహార్ వద్ద మిగిలిన పుచ్చకాయయు బరువు = 2.450 కి.గ్రా.

అభ్యాసం - 6.5

1. తీసివేయుము.

క) రూ. 18.50 నుండి రూ. 5.75

ఖ) 105.58 మీ. నుండి 97.65 మీ.

గ) 6.725 కి.గ్రా.ను 9.950 కి.గ్రా. నుండి

2. కవిత రూ. 33.65లతో ఒక పుస్తకంను కొని దుకాణదారుడికి 50 రూ.లు ఇచ్చెను. అతను కవితకు ఎంత డబ్బు తిరిగి ఇచ్చును ?

3. టీనా వద్ద 10 మీ. 5 సెం.మీ. పొడవు గల ఒక బట్ట గలదు. దాని నుండి ఆమె 4 మీ. 50 సెం.మీ. పొడవు గల బట్టను తీసి ఒక డ్రెస్ తయారు చేసెను. అయిన తన వద్ద ఇంకా ఎంత బట్ట మిగిలెను ?

4. ఒకే దినంలో ఒడిషాలో గల ఆరు పట్టణాలు యొక్క ఉష్ణోగ్రతలను క్రింది పట్టికలో ఇవ్వడమైనది.

పట్టణం	ఉష్ణోగ్రత
భువనేశ్వరం	
సంబల్‌పూర్	
మల్కన్‌గిరి	
టిటిలాగడ్	
కెందుఝర్	
పూరీ	

- ఏ పట్టణం యొక్క ఉష్ణోగ్రత అత్యధికం మరియు ఏ పట్టణం అత్యల్పం ?
- భువనేశ్వర్ యొక్క ఉష్ణోగ్రత పూరి ఉష్ణోగ్రత కంటె ఎంత అధికం ?
- మల్కనగిరి యొక్క ఉష్ణోగ్రత కెందుఝర్ ఉష్ణోగ్రత కంటె ఎంత అధికం ?
- టిటిలాగడ్ ఉష్ణోగ్రత మల్కనగిరి ఉష్ణోగ్రత కంటె ఎంత తక్కువ ?

మీరు ఇటువంటి అనేక ప్రశ్నలు తయారుచేసి మీ స్నేహితులకు వాటి సమాధానాలుఅ చేయమని చెప్పండి.

ఏడవ అధ్యాయం

వ్యాపార గణితం

7.1. అనుపాతము

7.1.1 మనకు తెలిసినవి :

ఇంట్లో అమ్మ టీ ఏ విధంగా తయారు చేయునో అది మీకు తెలుసు. నీరు, పాలు, చీని మరియు టీ గుండను వేసి టీ తయారు చేయబడును. కొన్ని సార్లు టీ భాగుండును మరికొన్ని సార్లు టీ బాగుండదు. కారణం ఎంత పరిమాణంలో వస్తువులు అవసరమో అంత పరిమాణంలో కలుపుట జరగదు. అదే విధంగా భోజీల లందు పాయసం తయారు చేయుటకు బియ్యం, అమూల్, చీని మొదలైనవి సరిగ్గా వేసిన పాయసం బాగుండును. అందువలన ఏది ఎంత భాగము కలపాలి అనేది తెలుసుకొనుట అవసరము. ఈ విధంగా నిత్య జీవితంలో కొన్ని సంఘటనలు జరుగును, వాటిలో మనకు అనేక వస్తువులను పోల్చే అవసరం పడును. మీరు ఇటువంటి ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

7.1.2. రెండు కొలతల మధ్య పోలిక

స్వయంగా చేసి చూడండి

- మీ తరగతిలో గల బాలురు మరియు బాలికల సంఖ్య మధ్య పోల్చండి.
- తరగతి గది యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులను పొల్చండి.
- నల్లబల్ల యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులను పొల్చండి.
- ఇద్దరు పిల్లలు యొక్క బరువులను పోల్చండి.

❖ అనేక సమయాలలో రెండు పరిమాణములల మధ్య పోలిక అవసరమగును. 21 మీటర్ల బట్ట మరియు 7 మీటర్ల బట్ట మధ్యలో క్రింది విధంగా పోలికలను చేయవచ్చును.

పోలిక చేయు మొదటి పద్ధతి

రెండు పరిమాణముల మధ్య భేదమును నిర్ణయించి ఒకటి మరొక దాని కంటె ఎంత ఎక్కువ లేక ఎంత తక్కువ అని తెలుసుకోగలం. రెండు పరిమాణముల మధ్య గల ఎక్కువ-తక్కువ అనే సంబంధము గూర్చి ఇచ్చిన పరిమాణమును పొల్చగలం.

21 మీ. - 7 మీ. = 14 మీ.

21 మీ. పొడవు గల బట్ట 7 మీ. పొడవు గల బట్ట కంటె 14 మీ. అధికం అని చెప్పగలం.

ఇది తీసివేత రూపంలో పోల్చగలం.

పోలిక చేయు రెండవ పద్ధతి

రెండు పరిమాణముల మధ్యలో అధిక పరిమాణంనకు తక్కువ గల పరిమాణం చే భాగించి, మొదటిది రెండవ దానికంటె ఎంత ఎక్కువ లేక రెండవది మొదటి దానిలో ఎన్ని భాగాలు అని తెలుసుకోగలం. ఎన్ని వంతులు లేక ఎన్ని భాగాలు అనే సంబంధము ద్వారా పరిమాణాలు రెండింటిని చెప్పగలం.

21 మీ. ÷ 7 మీ. = 3

21 మీ. బట్ట 77 మీ. బట్టకు 3 వంతులు అని చెప్పగలం.

ఇది భాగక్రియ రూపంలో పోల్చడం.

7.1.3. రెండు కొలతల మధ్య అనుపాతం

పై రెండు రకాల పోల్చుట మధ్యలో రెండవ పద్ధతి విషయంలో అనగా భాగక్రియ ద్వారా పోల్చే పద్ధతిలో వాటి విలువను ఏ విధంగా రాయాలి దానిని పరిశీలించండి.

క) నీవు మరియు నీ యొక్క స్నేహితుడు యొక్క పొడవుల వరుసగా 32 కి.గ్రా. మరియు 30 కి.గ్రా. అయిన నీ బరువు మరియు నీ స్నేహితునిని బరువుల అనుపాతం 32 ÷ 30 లేక $\frac{32}{20}=\frac{16}{15}$ లేక 16 : 15

16 : 15 నకు 16 అనుపాతం 15 అని చదవవలెను.

ఖ) ఒక తరగతిలో 15 మంది బాలురు మరియు 18 మంది బాలికలు గలరు. అయిన బాలురు మరియు బాలికల మధ్య అనుపాతం $\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$ లేక 5 : 6 దీనిని 5 అనుపాతం 6 అని చదవవలెను.

పై రెండు ఉదాహరణల వల్ల మనకు తెలిసెను.

- అనుపాతంను సూచించుటకు ' : ' గుర్తును వాడుదురు
- అనుపాతంలో రెండు పదాలు ఉండును, అనుపాతంలో గల మొదటి పదమును ముందు పదం అనిమరియు రెండవ పదమును తరువాత పదం అని అందురు.
- ఒక అనుపాతం రెండు సంఖ్యలతో ఏర్పడును. భిన్నాల మరొక రూపం అనుపాతం అగును.

రెండు కొలతలను పోలిక చేయునపుడు ఒక కొలత ఇంకొక దాని కొలత కంటె ఎన్ని భాగాలు లేక ఎన్ని అంగాలు అని మనం తెలుసుకోగలం. కొలతలు రెండు సమజాతులుఅ అయిన అనుపాతంలో ఎటువంటి యూనిట్ ఉండును.

సమజాతీయ కొలతలను ఒకటిగా రాయండి.

20 లీటర్లు, 72 గ్రాములు, 30 రూపాయలు, 40 గంటలు

80 పైసాలు, 120 డెస్సిగ్రాములు, 100 మి.లీ., 108 నిమిషాలు

సమజాతీయ కొలతలను పోల్చునపుడు వాటిని ఒకే కొలత యూనిట్‌లో మార్చాలి. అనగా రెండు బరువులను పోల్చునపుడు రెండింటిని కి.గ్రా.లలో లేక గ్రాములలో మార్చాలి. వేరు వేరు కొలతలతో కూడా కొన్ని సార్లు పోల్చుట జరుగును. అనగా దూరం మరియు సమయముల యొక్క అనుపాతమును తీసుకొని వేగమును నిర్ణయించుట జరుగును.

ఇచ్చిన కొలతల రెండింటిలో పోల్చండి. అనుపాతంలో మార్చండి.

అనగా 120 కి.గ్రా. మరియు 40 కి.గ్రా.ల అనుపాతం = 120 : 40 = 3 : 1

క) 108 మీ. మరియు 72 మీ.

ఖ) 30 గంటలు మరియు 80 గంటలు

గ) 72 లీటర్లు మరియు 100 లీటర్లు

క్రింద నీయబడిన జతల సంఖ్యలలో గల అనుపాతమును రాయండి మరియు వాటిని కనిష్ఠ ఆకారంలోకి మార్చండి

క) 33 మరియు 55

ఖ) 125 మరియు 175

గ) 108 మరియు 60

ఘ) 27 మరియు 108

> **తెలుసా ?**
> రెండు కొలతలు మధ్యలో అనుపాతమును నిర్ణయించు నపుడు రెండవ సంఖ్య '0' కాకూడదు.

రండి క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ - 1

గోవింధ వద్ద 50 పైసలు గలదు మరియు హరి వద్ద 2 రూపాయలు గలదు. గోవింధ మరియు హరి వద్ద గల పైసాల అనుపాతమెంత ?

సమాధానం :

గోవింధ వద్ద 50 పైసలు గలవు. హరి వద్ద 2 రూ.లు లేక 200 పైసలు గలవు.

అనుపాతం = $\frac{\text{గోవింధ వద్ద గల పైసలు}}{\text{హరి వద్ద గల పైసలు}} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$

గోవింధ యొక్క పైసలు : హరి యొక్క పైసలు = 1 : 4

$\therefore$ గోవింధ మరియు హరి వద్ద గల పైసల అనుపాతం 1 : 4.

ఉదాహరణ - 2

సీత మరియు గీత వద్ద గల మొత్తం ఇస్త్రీరాకులు 60. సీత వద్ద గల ఇస్త్రీరాకులు మరియు గీత వద్ద గల ఇస్త్రీరాకులు అనుపాతం 8 : 7 అయిన ఎవరి వద్ద ఎన్ని ఇస్త్రీరాకులు గలవు ?

సమాధానం :

సీత వద్ద గల ఇస్త్రీరాకులు = 8 వంతులు

గీత వద్ద గల ఇస్త్రీరాకులు = 7 వంతులు

సీత మరియు గీత వద్ద గల మొత్తం ఆకులు = 8 వంతులు + 7 వంతులు = 15 వంతులు

మొత్తం 15 వంతులకు సమానం 60

1 వంతుకు సమానం = 60 $\div$ 15 = 4 ఇస్త్రీరాకులు

అందువలన సీత వద్ద గల మొత్తం ఆకుల సంఖ్య = 8 X 4 = 32

గీత వద్ద గల మొత్తం ఆకులు సంఖ్య = 7 X 4 = 28

$\therefore$ సీత వద్ద 32 ఆకులు మరియు గీత వద్ద 28 ఆకులు గలవు.

మరో పద్ధతి :

సీత మరియు గీత యొక్క ఇస్త్రిరాకుల అనుపాతం = 8 : 7

ఒకవేల సీత యొక్క ఆకుల సంఖ్య 7 అగును.

$\therefore$ మొత్తం ఆకుల సంఖ్య = 8 + 7 = 15

మొత్తం ఆకుల సంఖ్య 15 అయిన, సీత యొక్క ఆకుల సంఖ్య 8

మొత్తం ఆకుల 1 అయిన, సీత యొక్క ఆకుల సంఖ్య = $\frac{8}{15}$

మొత్తం ఆకుల 60 అయిన, సీత యొక్క ఆకుల సంఖ్య = $\frac{8}{15} \times 60 = 8 \times 4 = 32$

అందువలన గీత యొక్క ఆకుల సంఖ్య = 60 - 32 = 28

తెలుసా ?

భాగక్రియ మరియు గుణనక్రియ గల సమీకరణమును సరళము చేయుట కొరకు ఒక ఉదాహరణ చూద్దాం.

$$8 \div 4 \times 3 = 2 \times 3 = 6$$

$$8 \times 3 \div 4 = 8 \times \frac{3}{4} = 6$$

అనగా భాగక్రియ మరియు గుణనక్రియల వరుసను మార్చిన కూడా సరియైన సమాధానం లభించెను. అందువలన $8 \div 4$ నకు మనం $\frac{8}{4}$ గా రాయవచ్చును. అందువలన $\frac{8}{4} \times 3$ లేక $8 \times \frac{3}{4}$ రెండు కూడా సమానం. ఫలితంగా ఒక భిన్నంతో ఒక పూర్ణసంఖ్యను గుణించి నపుడు భిన్నం యొక్క లవంతో పూర్ణసంఖ్యను గుణించాలి.

అభ్యాసం - 6.7

1. ఇవ్వబడిన కొలతలు మధ్య అనుపాతం నిర్ణయించండి.
   క) 600 గ్రాములు మరియు 20 గ్రాములు ఖ) 500 గ్రా. మరియు 2 కి.గ్రా.
   గ) 25 పైసలు మరియు 1 రూపాయి ఘ) 20 నిమిషాలు మరియు 5 గంటలు
   ఙ) 15 మీటర్లు మరియు 90 సెంటీమీటర్లు
2. ఒక తరగతిలో బాలురు సంఖ్య 40 మరియు బాలికల సంఖ్య 25 అయిన,
   క) బాలురు మరియు బాలికల సంఖ్యల అనుపాతం ఎంత ?
   ఖ) బాలికలు మరియు బాలురు సంఖ్యల అనుపాతం ఎంత ?
   గ) బాలుర సంఖ్య మరియు మొత్తం పిల్లల సంఖ్యల యొక్క అనుపాతం ఎంత ?
   ఘ) మరో 15 మంది బాలురు తరగతిలో చేరిన తరువాత బాలుర సంఖ్య మరియు బాలికల సంఖ్య యొక్క అనుపాతం ఎంత అగును ?
3. ఒక విద్యాలయంలో ఉపాధ్యాయుల సంఖ్య 28 మరియు విద్యార్థుల సంఖ్య 1176. ఆ విద్యాలయంలో ఉపాధ్యాయుల మరియు విద్యార్థుల సంఖ్యల అనుపాతం ఎంత ?

4. హరి 5 గంటలలో 17 కి.మీ. దూరం వెల్లును మరియు రాము 3 గంటలలో 34 కి.మీ. వెల్లును. వారి యొక్క గంటకు వేగముల అనుపాతం ఎంత ?

5. రాము మరియు శ్యాముల గంటకు వేగముల అనుపాతం 3 : 5. రాము 5 గంటలలో $22\frac{1}{2}$ కి.మీ. దూరం వెల్లును అయిన శ్యాము యొక్క గంటకు వేగము ఎంత ?

6. షకీలా ఒక వారంలో 1008 రూ.లు ఖర్చు చేయును మరియు ప్రతీ దినం 216 రూ.లు ఆదా చేయును. అయిన తన యొక్క ప్రతీ దినం యొక్క ఆదాయం మరియు ఖర్చుల అనుపాతంను కనుగొనుము.

7.2. సమానుపాతం

7.2.1. అనుపాతం మరియు సమానుపాతం మధ్యలో సంబంధం.

క్రింది ఈయబడిన ఉదాహరణలను పరిశీలించండి

5 పెన్నుల ఖరీదు 45 రూ.లు మరియుఅ 8 నోట్‌బుక్‌ల ఖరీదు 72 రూ.లు

పెన్నుల మరియు నోట్‌బుక్‌ల సంఖ్యల అనుపాతం = 5 : 8

పెన్నుల ఖరీదు మరియు నోట్‌బుక్‌ల ఖరీదు మధ్యలో గల అనుపాతం = 45 ÷ 72 లేక 5 : 8

($\frac{45}{72}=\frac{5}{8}$ అగుట వలన అనుపాతం 5 : 8)

45 రూ.

72 రూ.

మనం చూశాం, పెన్నులు మరియు నోట్‌బుక్‌ల అనుపాతం = వాటి యొక్క ఖరీదుల అనుపాతం

అనగా 5 : 8 = 45 : 72

దీనిని మనం క్రింది విధంగా కూడా రాయగలం.

5 : 8 : : 45 : 72

మనం చెప్పగలం 5, 8, 4, 5 మరియు 72 సమానుపాతాలుఅ.

రెండు అనుపాతాల మధ్య గల సమాన (=) గుర్తును : : రూపంగా రాయవచ్చును.

ఈ విధంగా రెండు అనుపాతముల యొక్క సమానతకు ఒక సమానుపాతం అని అందురు.

రెండు సంఖ్యల అనుపాతం మరో రెండు సంఖ్యల అనుపాతంతో సమానం అయిన, నాలుగు సంఖ్యలను సమానుపాతంలో గలవని అందురు.

పైన ఆలోచన వల్ల ఏమి తెలుసుకున్నాం ?

- ' : : ' గుర్తును సమానుపాతంలో గుర్తుగా వాడుదురు.
- ' : : ' గుర్తును చదువునపుడు సమానం అని చదవవలెను.

పైన ఆలోచించిన సమానుపాతంను మనం 5 : 8 = 45 : 72 లేక 5 : 8 : : 45 : 12 గా రాయగలం.

7.2.2. సమానుపాతంనకు సంబంధించిన కొన్ని పదాలు :

ఒక సమానుపాతంలో గల మొదటి అనుపాతం యొక్క ముందు పదం మరియు రెండువ అనుపాతం యొక్క పదాలను సమానుపాతం యొక్క చివరి పదాలు అందురు. అదే విధంగా మొదటి అనుపాతం యొక్క తరువాత పదం మరియు రెండువ అనుపాతం యొక్క ముందు పదాలను సమానుపాతం యొక్క మధ్య పదాలు అందురు. ఇంకా రెండువ అనుపాతంలో తరువాత పదంను నాల్గవ సమానుపాతము అందురు.

5 : 8 = 45 : 72 సమానుపాతంలో 5 మరియు 72 చివరి పదాలు మరియు 8 మరియు 45 మధ్య పదాలు అగును.

పై సమానుపాతంలో నాల్గవ సమానుపాతం 72 అగును.

క్రింది వాటిలో మొదటి అనుపాతంలో వేరే ఏ అనుపాతం ఒక సమానుపాతం చేయునో దానిని పొందండి మరియు కుడివైపు గల ఖాళీ నందు రాయండి. మొదటి ప్రశ్న సమాధానంను చూసి మిగిలిన ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

క)	1 : 2, 3 : 4, 8 : 20, 8 : 16	1 : 2 : : 8 : 16
ఖ)	3 : 4, 4 : 3, 30 : 40, 36 : 60	
గ)	8 : 11, 16 : 22, 24 : 13, 11 : 18	
ఘ)	10 : 21, 20 : 63, 30 : 63, 40 : 88	
ఙ)	5 : 9, 20 : 18, 20 : 36, 15 : 36	

7.2.3. ఒక సమానుపాతంలో చివరి పదాలు మరియు మధ్య పదాల మధ్య సంపర్కము.

5 : 6 : : 60 : 72 (60 : 72 నకు భిన్నంగా మార్చి కనిష్ట రూపంలో మార్చినచో $\frac{5}{6}$ అగును)

ఈ సమానుపాతంలో 5 మరియు 72 చివరి పదాలు మధ్య ఏ సంపర్కము గలదు ?

చివరి పదాల గుణఫలం = 5 X 72 = 360

మధ్య పదాల గుణఫలం = 6 X 60 = 360

స్వయంగా చేసి చూడండి

క్రింది సమానుపాతంలో చివరి పదాల గుణఫలం మరియు మధ్య పదాల గుణఫలం మధ్య ఏ సంపర్కము గలదు.

- 1 : 2 : : 8 : 16
- 3 : 4 : : 54 : 72
- 5 : 9 : : 15 : 27

ఏమి పరిశీలించిరో రాయండి.

మనం తెలుసుకున్నాం,

చివరి రెండు పదాల గుణఫలం = మధ్య రెండు పదాల గుణఫలం

రండి క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ - 1 : 10, 20, 30 60 సమానుపాతం అగునా ?

సమాధానం :

10 మరియు 20 ల అనుపాతం = 10 : 20 = $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

30 మరియు 60 ల అనుపాతం = 30 : 60 = $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

అందువలన 10 : 20 = 30 : 60

∴ 10, 20, 30 60 సమానుపాతం అగును.

ఉదాహరణ - 2 : 4, 7, 8, 14 సమానుపాతం అగునా ?

సమాధానం :

రెండింటి పద్ధతిలో సమాధానం	రెండవ పద్ధతిలో సమాధానం
4 మరియు 7ల అనుపాతం = 4 : 7 = $\frac{4}{7}$ 8 మరియు 14ల అనుపాతం = 8 : 14 = $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ అందువలన 4 : 7 = 8 : 14 4,7,8,14 సమానుపాతం అగును.	చివరి పదాల గుణఫలం = 4 X 44 = 56 మధ్య పదాల గుణఫలం = 7 X 8 = 56 చివరి పదాల గుణఫలం = మధ్య పదాల గుణఫలం అందువలన 4 : 7 : : 8 : 14 4,7,8,14 సమానుపాతం అగును.

ఉదాహరణ-3 : 190 : 76 : : 10 : 4 సమానుపాతం సరియైనదా కాదా పరీక్షించండి.

సమాధానం :

మొదటి అనుపాతం = 190 : 76 = $\frac{190}{76} = \frac{10}{4}$

మొదటి అనుపాతం = రెండువ అనుపాతం

∴ ఇచ్చిన సమానుపాతం సరియైనది.

ఉదాహరణ-4 : ఒక తరగతిలో బాలురు మరియు బాలికల అనుపాతం 2 : 3. బాలికల సంఖ్య 21 అయిన బాలుర సంఖ్య ఎంత ?

సమాధానం :

బాలుర సంఖ్య : బాలికల సంఖ్య = 2 : 3

బాలుర సంఖ్య 2 అయిన భాలికల సంఖ్య 3

బాలికల సంఖ్య 3 అయిన బాలుర సంఖ్య 2

బాలికల సంఖ్య 1 అయిన బాలుర సంఖ్య $\frac{2}{3}\times=14$

బాలికల సంఖ్య 3 అయిన బాలుర సంఖ్య = A

∴ బాలుర సంఖ్య = 14

అభ్యాసం - 7.2

1. ఏ సంఖ్యలు నాలుగు సమానుపాతములు ?

క) 10, 15, 20, 30 ఖ) 15, 20,3, 5

గ) 35, 30, 105, 120 ఘ) 18, 20, 90, 4

ఙ) 54, 72, 81, 108 చ) 15, 18, 10, 20

2. ఏ సమానుపాతములు సరియైనవో వాటిని మీ నోట్‌బుక్‌లో రాయండి.

(a) 16 : 36 :: 12 : 27 (b) 12 : 18 :: 28 : 42

(c) 21 : 6 :: 35 : 14 (d) 8 : 9 :: 24 : 27

(e) 15 : 18 :: 10 : 15 (f) 5.2 : 3.9 :: 4 : 3

3. క్రింది వాటిలో సరియైన వాటిని ఎంచి రాయండి.

క) 99 కి.గ్రా. : 45 కి.గ్రా. : : 44 రూ.లు : 20 రూ.లు

ఖ) 32 మీ. : 64 మీ. : : 6 సెకండ్లు : 12 సెకండ్లు

గ) 40 మంది : 200 మంది = 15 లీటర్లు : 75 లీటర్లు

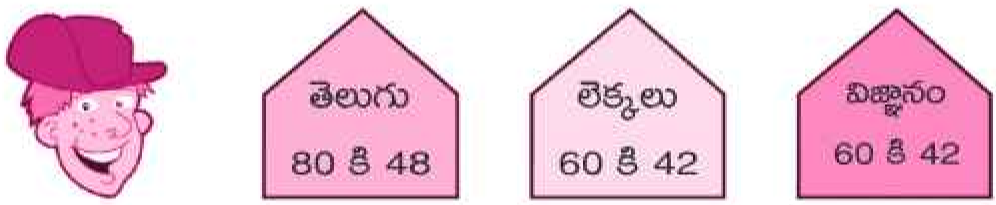
ఘ) 45 కి.మీ. : 60 కి.మీ. = 12 గంటలు : 15 గంటలు

4. హరి మరియు రాము వద్ద గల ఇస్త్రీరాకుల అనుపాతం 4 : 5. హరి వద్ద 60 ఇస్త్రీరాకులు ఉన్నచో రాము వద్ద ఎన్ని ఇస్త్రీరాకులు ఉండును ?

7.3 శాతము

7.3.1. శాతము యొక్క అవగాహన

ఒక పిల్లడు మూడు విషయాలలో ఏ మార్కులు తెచ్చెనో ఈ క్రింది ఇవ్వడమైనది.



అయిన అతడు ఏ విషయంలో అన్నిటికంటె మంచి మార్కులు తెచ్చెను ?

తెలుగులో అతనికి అన్నిటికంటె అధికం మార్కులు వచ్చెను. చెప్పగలమా, అతనికి తెలుగులో మిగిలిన రెండు విషయాలను పోల్చినచో మంచి మార్కులు వచ్చును ? ఒకవేల మూడు విషయాలలో మొత్తం మార్కులు సమానంగా ఉన్నచో అతని ఏ విషయంలో ఎక్కువ మార్కులు వచ్చెనో, ఆ విషయంలో అతనికి మంచి మార్కులు వచ్చెనని చెప్పగలం. రండి ప్రతీ విషయంలో మొత్తం 100 తీసుకొని అతనికి లభించిన మార్కులెన్ని, దానిని లెక్క చేద్దాం.

తెలుగు	లెక్కలు
మొత్తం మార్కులు 80కు అతనికి వచ్చినవి 48	మొత్తం మార్కులు 60కు అతనికి వచ్చినవి 42
మొత్తం మార్కులు 1కు అతనికి వచ్చినవి $\frac{48}{80}=\frac{6}{10}$	మొత్తం మార్కులు 1కు అతనికి వచ్చినవి = $\frac{42}{60}=\frac{7}{10}$
మొత్తం మార్కులు 100కు అతనికి వచ్చినవి $\frac{6}{10}\times 100=60$	మొత్తం మార్కులు 100కు అతనికి వచ్చినవి = $\frac{7}{10}\times 100=70$

విజ్ఞానం

మొత్తం మార్కులు 50కు అతనికి వచ్చినవి 40

మొత్తం మార్కులు 1కు అతనికి వచ్చినవి = $\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$

మొత్తం మార్కులు 100కు అతనికి వచ్చినవి = $\frac{4}{5}\times 100=80$

చెప్పండి చూద్దాం :
ఏ విషయంలో పిల్లవాడు మంచి మార్కులు తెచ్చెను ?

ప్రస్తుతం తెలిసెను. అతని అన్నిటికంటె విజ్ఞానంలో మంచి మార్కులు తెచ్చెను. వివిధ విషయాలలో పిల్లలకు తెచ్చిన మార్కులు -

తెలుగులో 100కి 60. దీనిని మనం 60 శాతం అంటాం.

లెక్కలలో 100కి 70. దీనిని మనం 70 శాతం అంటాం.

అదే విధంగా విజ్ఞానంలో అతను పొందెను 80 శాతం.

మనం ఏం తెలుసుకున్నాం ?

శాతం అర్థం 100 కు శాతం గుర్తు %

నూటికి 80 అనగా 80 శాతం, 80%గా రాయవచ్చును.

శాతం కూడా ఒక రకమైన పోల్చుట.

7.3.2. శాతమునకు భిన్నంగా అనుపాతంగా మరియు దశాంశముగా మార్చుట :

A) శాతమునకు భిన్నంగా మార్చుట.

75% యొక్క అర్థం 100కి 75. ఇచ్చట 75నకు 100తో పోల్చుట జరిగినది. భిన్నముల రూపంలో 75కు 100తో పోల్చిన మనం రాయగలం. $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$

$\therefore 75\%=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ $\quad 34\%=\frac{34}{100}=\frac{17}{50}$ $\quad 70\%=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$

అదే విధంగా,

$15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$ $\qquad$ $17\% = \frac{17}{100}$

$38\% = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$

తెలుసా ?

శాతం కూడా ఒక భిన్నం దీని హారం 100.

$19\% = \frac{19}{100}$

క్రింది శాతములను భిన్నములలోనికి మార్చండి.

క) 25% $\qquad$ ఖ) 20% $\qquad$ గ) 7% $\qquad$ ఘ) 150%

B) శాతములను అనుపాతములోనికి మార్చుట

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 3:4$ $\qquad$ (కారణం $\frac{1}{4}$ నకు 3 : 4 రాయుట గూర్చి మనకు తెలుసు)

క్రింది శాతములను అనుపాతంలోనికి మార్చండి.

క) 40% $\qquad$ ఖ) 45% $\qquad$ గ) 125% $\qquad$ ఘ) 75%

శాతములను మొదట భిన్నాలుగా రాసి, ఆ భిన్నాలను కనిష్ఠ ఆకారంలోనికి మార్చిన తరువాత దానిని అనుపాతంలోనికి రాయవలెను.

C) శాతములను దశాంశములోనికి మార్చుట.

క్రింద కొన్ని శాతములను దశాంశ భిన్నాలలోనికి మార్చడమైనది. పరిశీలించండి.

$2\% = \frac{2}{100} = 0.02$ $\qquad$ $70\% = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = 0.7$

$5\% = \frac{5}{100} = 0.05$ $\qquad$ $175\% = \frac{175}{100} = 1.75$

శాతములను 100 హారం గల భిన్నాలలోనికి మార్చిన తరువాత దశాంశములోనికి మార్చాలి.

క్రింది శాతములను సంఖ్యలలోనికి మార్చండి.

(a) 25% $\qquad$ (b) 20% $\qquad$ (c) 10% $\qquad$ (d) 5% $\qquad$ (e) 28%

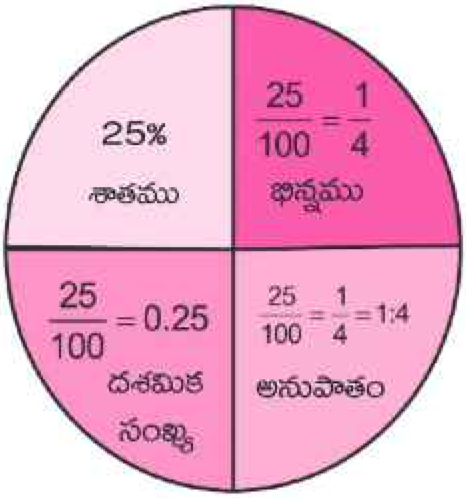
మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం ?

- శాతములు భిన్నాలలోకి మార్చిన యెడల, శాతము గుర్తును తీయవలెను మరియు ఆ సంఖ్యను 10చే భాగించాలి. తరువాత ఏర్పడిన భిన్నాన్ని కనిష్ఠ ఆకారంలోకి మార్చాలి.

- శాతమును అనుపాతములోనికి మార్చిన యెడల, శాతము గుర్తును తీయవలెను మరియు ఆ సంఖ్యను 100చే భాగించి కనిష్ఠ సంఖ్యగా మార్చాలి. ఏర్పడిన సంఖ్యను అనుపాతంలోనికి మార్చాలి.
- శాతమును దశాంశములోనికి వచ్చిన యడల, శాతం గుర్తును తీయవలెను మరియు దశమిక బిందువు యొక్క ఎడమవైపు రెండు స్థానములు మార్చవలెను. లభించిన సంఖ్య యొక్క కుడివైపు నుండి రెండు అంకెల తరువాత దశమిక బిందువును ఉంచవలెను. ఒకే అంకె గల శాతము సంఖ్య ఉన్నచో, శాతము గుర్తు తీసిన తరువాత కేవలం ఒకే అంకె ఉండును. దాని యొక్క ఎడమ ప్రక్కలను వ్రాసి 0 యొక్క ఎడమకు దశాంశ బిందువు పెట్టవలెను. ఈ క్రింది విధంగా,

8% →	8 →	08 →	.08
	శాతం గుర్తు తీయబడింది	8 యొక్క ఎడమప్రక్క 0 వ్రాయడమైనది	0 యొక్క ఎడమ ప్రక్క దశాంశ బిందువు పెట్టడమైనది

బొమ్మను పరిశీలించండి, 25%నకు వివిధ రూపాలలో మార్చడమైనది.



స్వయంగా చేసి చూడండి

ప్రక్కన గల బొమ్మలో చూపినట్లు 35% మరియు 75%లను వివిధ రూపాలలోకి మార్చండి.

అభ్యాసం - 7.3

1. భిన్నాలలోనికి మార్చండి.

   8%, 25%, 80%

2. అనుపాతంలోనికి మార్చండి.

   15%, 19%, 49%

3. దశమిక సంఖ్యలలోకి మార్చండి.

   3%, 7%, 26%, 123%, 200%

4. క్రింది పట్టికలో గల ఖాళీలను పూరించండి.

శాతము	భిన్నము	అనుపాతము	దశాంశము
4%			
38%			
25%			
100%			
320%			

7.4. భిన్నము, అనుపాతము మరియు దశాంశమును శాతములోనికి మార్చట.

శాతమును భిన్నము, అనుపాతము మరియుఅ దశాంశములోనికి మార్చిన పద్ధతిని మనం తెలుసుకున్నాం. ప్రస్తుతం భిన్నము, అనుపాతము మరియు దశమిక సంఖ్యలను శాతములోనికి మార్చే పద్ధతిని గూర్చి తెలుసుకుందాం.

7.4.1. భిన్నములను శాతములలోనికి మార్చుట.

రండి A ను శాతములోనికి మార్చుదాం.

ఇచ్చిన భిన్నం యొక్క హరంను మార్చి 100 చేసినచో మనం ఆ సంఖ్యను శాతములోనికి మార్చగలం.

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times25}{4\times25}=\frac{75}{100}=75\%$$

పై ఉదాహరణను పరిశీలించినచో మనం చూడగలం

$\frac{3}{4}$ యొక్క శాతం విలువ $\left(\frac{3}{4} \times 100\right)\% = 75\ \%$

- $\frac{5}{7}$ ను శాతములోనికి మార్చిన ఎంత అగును ?

$\frac{5}{7}$ యొక్క శాతం విలువ $=\left(\frac{5}{7} \times 100\right)\% = 71\frac{3}{7}\ \%$

> చెప్పండి చూద్దాం :
> $\frac{3}{4}$ మరియు $\frac{4}{5}$ లలో ఏది పెద్దది ?
> రెండింటిని శాతములలోనికి మార్చి చెప్పండి.

మనం తెలుసుకున్నాం,

ఇవ్వబడిన భిన్నాన్ని 100చే గుణించిన దాని యొక్క శాతము విలువ వచ్చును.

7.4.2. అనుపాతమును శాతములోనికి మార్చట.

రండి 2 : 5ను శాతములోనికి మార్చుదాం. $2:5=\frac{2}{5}=\left(\frac{2}{5}\times100\right)\%=\frac{200}{5}\%=40\%$

15 : 20ను శాతములోనికి మార్చిన, $15:20=\frac{15}{20}=\left(\frac{15}{20}\times100\right)\%=\frac{1500}{20}=75\%$

7.4.3. దశమిక సంఖ్యలను శాతములోనికి మార్చుట.

రండి, 0.25, 1.37 మరియు 1.5లను శాతములలోనికి మార్చుదాం.

క) $0:25 = \frac{25}{100} = \left(\frac{25}{100} \times 100\right)\% = 25\%$ అనగా 0.25 యొక్క శాతము విలువ = 25%

ఖ) $1:37 = \frac{137}{100} = \left(\frac{137}{100} \times 100\right)\% = 137\%$ అనగా 1.37 యొక్క శాతము విలువ = 137%

గ) $1:5 = \frac{15}{10} = \frac{150}{100} = \left(\frac{150}{100} \times 100\right)\% = 150\%$

మనం తెలుసుకున్నాం : **దశమిక సంఖ్య యొక్క దశాంశ బిందువునకు కుడివైపు రెండు స్థానాలను జరిపినచో శాతం విలువ లభిస్తుంది.**

శాతములోనికి మార్చండి.

క) $\frac{7}{20}, \frac{3}{5}, 2\frac{3}{2}, \frac{7}{9}$

ఖ) 3:4, 6:8, 11:12, 7:18, 5:7

గ) 0.2, 0.19, 0.123, 5.87, 2.05

7.5. శాతముల వాడుక

ఈ క్రింద నీయబడిన ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ - 1: 5 మీ. 60 సెం.మీ.ల యొక్క 25% ఎంత ?

సమాధానం : 5 మీ. 60 సెం.మీల యొక్క 25%

= (5 మీ. 60 సెం.మీ.)

= 560 సెం.మీ. × $\frac{25}{100}$

= 140 సెం.మీ. × $\frac{1}{4}$

= 1 మీ. 40 సెం.మీ.

∴ 5 మీ. 60 సెం.మీ. యొక్క 25% 1 మీ. 40 సెం.మీ. అగును.

ఉదాహరణ - 2 : రాము లెక్కలలో 80కు 48 మార్కులు పొందెను. అతను ఎంత శాతంను పొందెను ?

సమాధానం : రాము 80నకు 48 మార్కులు పొందెను.

రాము శాతము $= \left(\frac{48}{80} \times 100\right)\%$ (భిన్నాలను శాతముగా మార్చుటకు 100చే గుణించాలి)

$= \left(\frac{3}{5} \times 100\right)\%$

$= 60\%$

∴ రాము లెక్కలలో 60% మార్కులు తెచ్చెను.

ఉదాహరణ - 3

గోవిందుని యొక్క నెలకు ఆదాయము రూ. 6000.00 అతను తన ఆదాయంలో 20% ఆదా చేయును. అతని యొక్క నెలకు అయిన ఖర్చు ఎంత ?

సమాధానం : గోవిందుని యొక్క మిగులు = రూ. 6000.00 యొక్క 20%

$$= \text{రూ. } 600.00 \times \frac{20}{100}$$

= 1200 రూ.లు

ఖర్చు = 6000.00 - 1200.00 = 4800.00 రూ.లు

∴ గోవిందుని యొక్క నెలకు ఖర్చు రూ. 4800.00

> తెలుసా ?
> ఆదాయం-ఖర్చు=మిగులు
> ఆదాయం-మిగులు=ఖర్చు
> ఖర్చు-మిగులు=ఆదాయం

అభ్యాసం - 7.4

1. వివిధ విషయాలలో లభించిన మార్కులను ఆ విషయాలలో గల మొత్తం మార్కులను శాతములోనికి మార్చండి.

మొత్తం మార్కులు	100	100	200	200	500	600	800
పొందిన మార్కులు	64	32	64	124	230	486	336
మార్కుల శాతం							

2. ఆరు గ్రామాల యొక్క మొత్తం ప్రజలు మరియు అక్షరాస్యత సంఖ్య ఇవ్వడమైనది. ఆ అక్షరాస్యతను శాతములలోనికి మార్చండి.

మొత్తం ప్రజలు	1000	3000	2500	1500	1200	3200
అక్షరాస్యులు	590	1800	1600	1175	960	1856
అక్షరాస్యత శాతం						

3. ఒక షర్టు ఖరీదు 350 రూ.లు రాయబడివుంది. దుఖానదారుడు దానిని 20% డిస్కౌంట్‌ను ఇచ్చెను. షర్టు యొక్క అమ్మిన వెల ఎంత ?

> తెలుసా ?
> దుఖానంలో అమ్ముతున్న వస్తువులపై అప్పుడప్పుడు కొంచెం తగ్గించబడును. దీనిని డిస్కౌంట్ అందురు. డిస్కౌంట్ 10% అనగా రాసిన ఖరీదుపై 10%.

4. ఒక పట్టణం నుండి రాముని ఇల్లు 120 కి.మీ. దూరంలో గలదు. అతను బస్సులో 36 కి.మీ. వచ్చెను. అది మొత్తం దూరంలో ఎంత శాతము ?

5. మిత వార్షిక పరీక్షలో 600 మార్కులకు 500 మార్కులు తెచ్చెను మరియు గీత 500 మార్కులకు 415 మార్కులు తెచ్చెను. ఎవరి మార్కుల శాతము ఎక్కువ మరియు ఎంత ?

7.6. సరాసరి

క్రింది పరిస్థితులను పరిశీలించండి.

క) మీకు మీ అమ్మ మొదటి దినం 5 లడ్డులు మరియు రెండువ దినం 3 లడ్డులు తినడానికి ఇచ్చెను.

- ◆ మీకు మొత్తం ఎన్ని లడ్డులు ఇచ్చెను ?
- ◆ ఎన్ని దినములలో అన్ని లడ్డులు తినుటకు ఇచ్చెను ?
- ◆ మీకు ఒకవేల ప్రతీ దినం మీ అమ్మ సమాన సంఖ్య గల లడ్డులు ఇచ్చినచో ఆ లడ్డులు మీకు ప్రతీ దినం ఎన్ని ఇచ్చేది ?

ఇప్పుడు చెప్పండి ? మీ అమ్మ మీకు రెండు దినములలో ఎన్ని లడ్డులు ఇచ్చెను ? ఒకవేల ప్రతీ దినం సమానంగా లడ్డులు ఇచ్చినచో దినములో ఎన్ని ఇచ్చినచో, 2 దినములలో మొత్తం 8 లడ్డులు ఇచ్చును ?

తప్పనిసరిగా మీరు చెప్పగలరు $8 \div 2 = 4$ లెక్క లడ్డులు వచ్చును.

ఖ) ఒక దుఖాణదారుడు 5 దినములలో అమ్మిన ఫేన్‌లను క్రింద ఇవ్వడమైనది.

మొదటి దినం　రెండవ దినం　మూడువ దినం　నాల్గవ దినం　ఐదవ దినం

- ◆ మొత్తం ఎన్ని ఫేన్‌లు (ఫంకా) అమ్మబడెను ? సమాధానం : 4+5+3+6+2=20
- ◆ మొత్తం ఎన్ని దినములు ? సమాధానం : 5 దినములు
- ◆ ఒకవేల దుఖాణదారుడు ఆ ఐదు దినములలో సమాన సంఖ్య గల ఫంకాలు అమ్మినచో, అతను ప్రతీ దినం ఎన్ని ఫంకాలను అమ్ముతాడు ?

ఉదాహరణ (క) లో ప్రతీ దినం సమాన సంఖ్యలలో ఇచ్చిన లడ్డు సంఖ్యను దైనిక సరాసరి లడ్డు సంఖ్య అందురు.

ఉదాహరణ (ఖ) లో ప్రతీ దినం సమాన సంఖ్యలో అమ్మిన ఫంకాల సంఖ్యను దైనిక సరాసరి ఫంకాల సంఖ్య అందురు.

దీనివలన మనం ఏమి తెలుసుకున్నాం :

$$\text{అనేక సంఖ్యల సరాసరి విలువ} = \frac{\text{వాటి యొక్క మొత్తం}}{\text{మొత్తం సంఖ్యలు}}$$

క్రింది నిచ్చిన ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

ఉదాహరణ-1

ఒక విద్యాలయంలో మొదటి, రెండువ, మూడువ, నాల్గవ, ఐదవ, ఆరవ మరియు ఏడువ తరగతిలో వరుసగా 25, 32, 48, 38, 45, 56 మరియు 36 మంది పిల్లలు పేరు నమోదు అయ్యెను. ప్రతీ తరగతిలో సరాసరి ఎంత మంది పిల్లలు పేర్లు నమోదయ్యెను.

సమాధానం :

సరాసరి సంఖ్య = $\frac{\text{మొదటి నుండి ఏడువ తరగతి వరకు గల పిల్లల మొత్తం}}{\text{మొత్తం తరగతులు}}$

$= \frac{25+32+48+38+45+56+36}{7}$

$= \frac{280}{7}$

$= 40$

∴ ప్రతీ తరగతిలో సరాసరి 40 మంది పిల్లలు పేర్లు నమోదు చేసిరి.

ఉదాహరణ-2

నీ యొక్క ముగ్గురు స్నేహితుల లెక్కలలో సరాసరి సంఖ్య 80 అయిన వారు మొత్తం ఎన్ని మార్కులు తెచ్చెను ?

సమాధానం :

ముగ్గురు స్నేహితుల సరాసరి మార్కులు = 80

మనకు తెలుసు,

సరాసరి మార్కులు = $\frac{\text{మొత్తం మార్కులు}}{\text{పిల్లల సంఖ్య}}$

లేక $80 = \frac{\text{మొత్తం మార్కులు}}{3}$

లేక మొత్తం మార్కులు = 80 X 3 = 240

∴ ముగ్గురు స్నేహితులు కలిపి లెక్కలలో 240 మార్కులు తెచ్చిరి.

> **తెలుసా ?**
> రాశుల మొత్తం విలువకు రాశుల సంఖ్యచే భాగించిన సరాసరి విలువ వచ్చును. అందువలన ఈ భాగక్రియలో భాజ్యం=మొత్తం విలువ, భాజకం=రాశుల సంఖ్య, భాగఫలం=సరాసరి విలువ. మనకు తెలుసు భాజ్యం=భాజకం X భాగఫలం అందువలన మొత్తం విలువ = సరాసరి విలువ X రాశుల సంఖ్య

ఉదాహరణ-3

గోవింద, హరి, శ్యాం మరియు రాముల ఎత్తులు వరుసగా 124 సె.మీ., 128 సె.మీ., 123 సె.మీ. మరియు 121 సె.మీ. అయిన ప్రతీ పిల్లవాని సరాసరి ఎత్తు ఎంత ?

సమాధానం :

పిల్లల యొక్క ఎత్తుల మొత్తం = 124 సె.మీ.+128 సె.మీ.+123 సె.మీ.+121 సె.మీ.=496 సె.మీ.

$$ప్రతీ\ పిల్లవాని\ సరాసరి\ ఎత్తు = \frac{పిల్లల\ ఎత్తుల\ మొత్తం}{పిల్లల\ సంఖ్య}$$

$$= \frac{496}{4}$$

= 124 సె.మీ.

∴ ప్రతీ పిల్లవాని సరాసరి ఎత్తు 124 సె.మీ. అగును.

స్వయంగా చేసి చూడండి

క) ◆ నీ బరువు మరియు నీ యొక్క ముగ్గురు స్నేహితుల బరువులను నిర్ణయించండి.

◆ నలుగురి యొక్క మొత్తం ఎత్తును కనుగొనండి.

◆ ప్రతీ వాని యొక్క సరాసరి ఎత్తును నిర్ణయించండి.

ఖ) మీ నిత్య జీవితంలో వివిధ పరిస్థితులలో సరాసరి అనే దానిని ఉపయోగించు చుంటారు. వీటి యొక్క ఐదు ఉదాహరణలను ఇవ్వండి.

అభ్యాసం - 7.5

1. 35, 48, 31 మరియు 22ల సరాసరిని కనుగొనుము.
2. ఖలీల్ అతని యొక్క మూడు సైకిళ్ల కొరకు మూడు సీట్ కవర్లను కొనెను. ఒకదాని వెల 28 రూ.లు, మరోదాని వెల 24 రూ.లు మరియు మూడవ దాని వెల 23 రూ.లు అయిన అతను కొన్న సీట్‌కవర్ల యొక్క ప్రతీ దాని సరాసరి వెల ఎంత ?
3. ఒక క్రికెట్ ఆటగాడు ఐదు ఒక దినము ఆటలలో (వన్‌డే) 45,30,102,113 మరియు 70 పరుగులు చేసెను. అయిన అతని ప్రతీ ఆట యొక్క సరాసరి ఎన్ని పరుగులు చేసెను ?
4. ఆరుగురు పిల్లలు గల ఒక దళంలో ప్రతీ పిల్లవాని యొక్క సరాసరి వయసు 10 సంవత్సరములు అయిన వారి యొక్క మొత్తం వయసు ఎంత ?
5. పన్నెండు ప్యాకెట్‌లలో గల మొత్తం చీని (పంచదార) బరువు111 కిలో. 600 గ్రాములు అయిన ప్రతీ ప్యాకెట్ యొక్క సరాసరి బరువు ఎంత ?
6. ఏడు పుస్తకాల మొత్తం వెల 310 రూపాయలు మరియు మరో మూడు పుస్తకాలలో ప్రతీ పుస్తకం యొక్క సరాసరి వెల 68 రూపాయలు అయిన మొత్తం పది పుస్తకాలలో ప్రతీ దాని సరాసరి వెల ఎంత అగును ?

ఎనిమిదివ అధ్యాయం

పూర్ణ సంఖ్యలు

8.1. మనకు తెలిసినవి

వస్తువులను లెక్కించుట కొరకు మనిషి అనేక గుర్తులను సృష్టించెను. దీని వలన కర్రలు, రాయిలు లేక విత్తనముల సహాయంతో అతనికి ఎన్ని పశువులు లేక ఎన్ని చెట్లు లేక కుటుంబంలో ఎంత మంది గలరో మొదలైనవన్ని లెక్కించు సమస్య దూరమయ్యెను.

ఎన్ని వస్తువులో అన్ని సంఖ్యలు ఇది కూడా ఒక సమస్యగా మారెను. అనేకమైన గుర్తులను గుర్తుంచుట కష్టమయ్యెను. దీని నుండి బయట పడుట కొరకు స్థాన విలువల వ్యవస్థ మరియు సున్నా సృష్టి అయ్యెను.

ఆ తరువాత అవసరము ననుసరించి కూడిక తీసివేత, గుణించుట, భాగించుట మొదలైన ప్రక్రియలు సృష్టి అయ్యెను. సంఖ్యలతో పై ప్రక్రియ ప్రయోగము ద్వారా సహజ సంఖ్యలు వ్యవస్థ లేక సంప్రసారిత సంఖ్యల వ్యవస్థ మనిషికి చాలా అవసరమయ్యెను.

8.2. రెండు సంఖ్యలలో వ్యతిరేక సంఖ్యల వృద్ధి

కొన్ని పరిస్థితులు ఏర్పడెను. ఆ పరిస్థితులలో సున్నాను విడిచి పెట్టినచో మిగిలిన సహజ సంఖ్యలు రెండు వ్యతిరేక పరిస్థితులలో గలవు. ఈ విధమైన కొన్నిన పరిస్థితులను ఈ క్రింద వ్రాయవలెను.

మొదటి పరిస్థితి

శాలపడ, హాతిబంధ మరియు టుకుణా అనే పేరు గల మూడు స్థానాలను కలుపుతూ ఒక దారి గలదు. దీనిని కొలుచుట కొరకు మనం అనేక రకాలుగా ప్రయత్నిస్తాం. తరువాత పుటలలో గల బొమ్మలు 8.1, 8.2, మరియు 8.3లను చూడండి.

అవి : (i) శాలపడ నుండి హరిబంధ మీదుగా టుకుణాకు వెలుతున్న దారి.

(ii) టుకుణా నుండి హరిబంధ మీదుగా శాలపడకు వెల్లుదారి రెండు సార్లు.

దారి పొడవు కొలుచుటకు -

(i) వ దానిలో దారి ఆరంభంలో శాలపడకు సున్నా (0) ద్వారా గుర్తించవలెను. వరుసగా ఒక కి.మీ. దూరంలో కి.మీ.ల రాయిలను పాతవలెను మరియు వాటిని 1, 2, 3 ...... మొదలైన సంఖ్యల ద్వారా గుర్తించవలెను.

దీనివలన మనం చెప్పగలం -

శాలపడ నుండి 4 కి.మీ. దూరంలో హతిబంధ గలదు.

శాలపడ నుండి 9 కి.మీ. దూరంలో టుకునా గలదు.

(ii) వ దానిలో దారి ఆరంభంలో టుకునాకు సున్నా ద్వారా (0) గుర్తించబడినది. వరుసగా ఒక కి.మీ. దూరంలో కి.మీ. రాయిలను పాడవలెను మరియు వాటిని 1,2,3 ...... మొదలైన సంఖ్యల ద్వారా గుర్తించ వలెను.

దీనివలన మనం చెప్పగలం -

టుకునా నుండి 5 కి.మీ. దూరంలో హతిబంద గలదు.

టుకునా నుండి 9 కి.మీ. దూరంలో శాలపడ గలదు.

హతిబంధ నుండి 4 కి.మీ. దూరంలో శాలపడ గలదు.

(iii) వ దానిలో మనం దారి ఆరంభం హతిబంధ వద్ద తీసుకున్నాం. అందువలన హతిబందను 0 ద్వారా గుర్తించాలి. హతిబంధ నుండి వరుసగా ఒక కి.మీ. దూరంలో శాలపడ వైపు కి.మీ.ల రాయులను పెట్టవలెను మరియు వాటిని వరుసగా 1,2,3 .... మొదలైన సంఖ్యల ద్వారా గుర్తించాలి. మళ్లీ హతిబంధ నుండి ఆరంభించి టుకునా వైపు 1 కి.మీ. దూరంలో కి.మీ.ల రాయిలను పెట్టవలెను మరియు వాటికి 1,2,3 ...... మొదలైన సంఖ్యల ద్వారా గుర్తించ వలెను.

దీని వలన మనం చెప్పగలం -

హతిబంధ నుండి కుడివైపు 5 కి.మీ. దూరంలో టుకునా గలదు.

హతిబంధ నుండి ఎడమవైపు 4 కి.మీ. దూరంలో శాలపడ గలదు.

ఈ పరిస్థితులలో, దారిపై 1 గుర్తు గల రెండు బిందువులు 2 గుర్తు గల రెండు బిందువులు, 3 గుర్తు గల రెండు బిందువులు మొదలైనవి కనబడుచున్నవి. అనగా ఒక 1 గుర్తు గల బిందువు హతిబంధ నుండి కుడివైపుకు గలదు మమరియు మరో 1 గుర్తు గల బిందువు హతిబంధ నుండి ఎడమ వైపునకు గలదు.

అందువలన రెండు 1 గుర్తులయిన ఉన్నను కూడా వాటి మధ్యలో స్థాన భేదము గలదు.

ఈ భేదమును చూపించుటకు మనం క్రింది పద్ధతిని అనుసరించ వచ్చును.

ప్రస్తుతం చూశాం, ఒక 1 కుడివైపు మరియు మరో 1 ఎడమవైపు అదే విధంగా ఒక 2 కుడివైపు మరియు మరో 2 ఎడమవైపు.

ఈ భేదాన్ని సంక్షిప్తంగా చేయుటకు మనం కుడివైపునకు (+) గుర్తు, ఎడమవైపు (-) గుర్తు ఉపయోగించుటకు ఆలోచించుట జరిగింది. ఫలితంగా పై దారిలో కి.మీ.ల రాయలను ఈ క్రింది విధంగా గుర్తించ గలం.

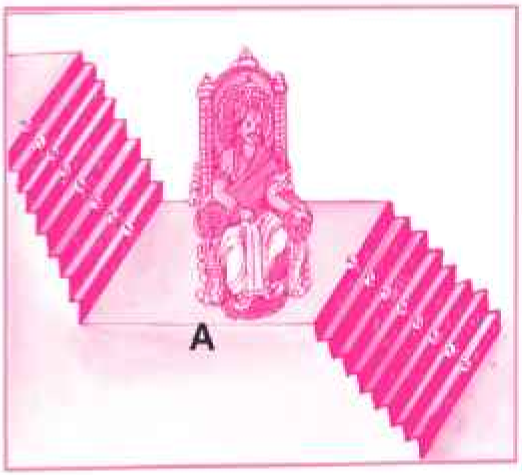
ఇచ్చట హాతిబంధ రెండు వ్యతిరేక వైపులకు గల దారి యొక్క ఆరంభ బిందువు అగుట వలన దానిని పెట్టడం జరిగింది. దీని కొరకు A ఆంగ్లేయ అక్షరం ఉపయోగించుట జరిగింది.

దీనిని విన్న తరువాత శరత్ చెప్పెను, నేనొక పరిస్థితిని చెప్పెదను. అతను క్రింది పరిస్థితిని చెప్పెను.

రెండువ పద్ధతి

ఒక రోజు అతని యొక్క ధనరత్నాలను సంరక్షించుటకు భూమి క్రింద ఒక గది కట్టించెను. భూమి నుండి గది పైకి వెళ్ళుటకు మెట్లు మరియు గదిపై నుండి లోపలికి వెల్లుటకు మెట్లు వేయించెను.

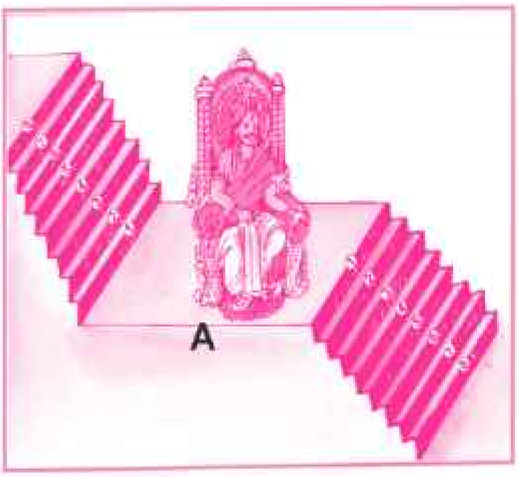
రెండ్లు మెట్ల యొక్క ఆరంభ బిందువు A అను పేరు గల స్థానం నుండి జరిగెను.



A నుండి పై మెట్లను 1,2,3 ... మొదలైన సంఖ్యల ద్వారా A నుండి క్రింద మెట్లను కూడా 1,2,3 ... మొదలైన సంఖ్యల ద్వారా గుర్తించెను. అందువలన క్రిందకు 3వ నంబరు మెట్టు లేక పైకి 3వ నెంబరు మెట్టు అని చెప్పని యడల ఏ 3వ నెంబరు మెట్టు అని తెలియకుండెను.

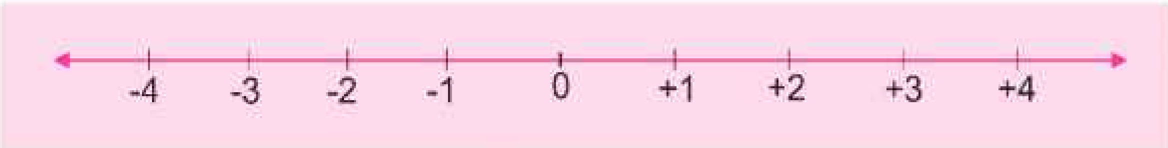
ఈ సమస్యలు దూరం చేయుటకు మంత్రి చెప్పెను-

ఎచ్చట మెట్లు ఆరంభమయ్యెనో ఆ స్థానంను సున్నా (0) ద్వారా గుర్తించాలి. మరియు పైకి గల మెట్లను +1, +2, +3 ..... మొదలైన సంఖ్యల ద్వారా మరియు క్రిందకు గల మెట్లను -1, -2, -3 ..... మొదలైన సంఖ్యల ద్వారా గుర్తించాలి. ఫలితంగా క్రొత్తగా ఏర్పడిన బొమ్మను చూపించడమైనది.



8.3. పూర్ణ సంఖ్యల వ్యవస్థ.

మనం చూశాం, రెండు వ్యతిరేక పరిస్థితులను సూచించుట +1, +2, +3 ... మరియు -1, -2, -3 ... మొదలైన సంఖ్యలను వాడుట జరిగెను. ఇచ్చట మనం చూశాం ఎక్కడ వ్యతిరేఖ గుర్తులను ఆరంభమయ్యెనో దానిని మూల బిందువు అందురు మరియు దీనిని సంఖ్య (0) ద్వారా గుర్తించుట జరిగెను.



మనకు లభించిన సంఖ్యల సమూహం - {......, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...}

ఈ సంఖ్యలను పూర్ణ సంఖ్యల సమూహం అందురు. వీటిని సూచించుటకు ఆంగ్లేయ అక్షరం 'Z' ఉపయోగించుట జరిగింది.

పూర్ణ సంఖ్యల సమూహంలో గల -1, -2, -3 ..... మొదలైన సంఖ్యలను ఋణాత్మక సంఖ్యలు అని పేరు పెట్టడం జరిగింది మరియు +1, +2, +3 ... మొదలైన సంఖ్యలను ధనాత్మక సంఖ్యలని పేరు పెట్టడం జరిగింది.

ధనాత్మక మరియు ఋణాత్మక సంఖ్యల పేర్లు ఎందుకు ?

మన వద్ద గల రూపాయిలు మరియు వేరు వేరు సంపదను మనం మన ధనం అని చెప్పుదాం. కాని ఒకవేల మనం అప్పు తీసుకున్నచో దానిని మనం కొంచెం మనకు గల ధనంలో తీసి అప్పును తీర్చుకుంటాం. అందువలన అప్పు లేక ఋణం అనేది ధనం యొక్క వ్యతిరేక స్థితి. కారణమేమనగా ధనం మన సంపదను పెంచును కాని ఋణం మన సంపధను తగ్గించును లేక తెంచును.

ఈ కారణము చేత పూర్ణ సంఖ్యలలో గల +1, +2, +3 .... మొదలైన సంఖ్యలను ధనాత్మక సంఖ్యలు మరియు -1, -2, -3 ..... మొదలైన సంఖ్యలను ఋణాత్మక సంఖ్యలుగా పేర్లు పెట్టడం జరిగెను.

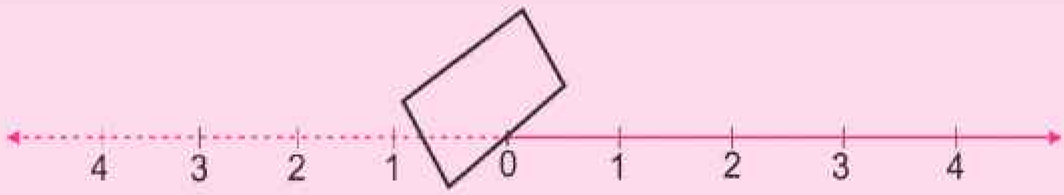
క్రింద ఒక దుఖాణదారుని యొక్క కొన్ని వస్తువులను అమ్ముట వలన వచ్చిన లాభ నష్టాలను ఈ క్రింద ఇవ్వడమైనది. లాభము మరియు నష్టము అనేవి రెండు వ్యతిరేక స్థితులు, లాభమును '+' గుర్తు ద్వారా మరియు నష్టము '-' గుర్తు ద్వారా సూచించెదరు. కొన్ని పరిస్థితులను వివరించడమైనది. వాటిని గుర్తులను ఉపయోగించి రాయండి.

వస్తువు పేరు	లాభం	నష్టం	సరియైన గుర్తు ఉపయోగించి గుర్తించుట
సరసాల నూనె	150 రూ.లు		
బియ్యం		250 రూ.లు	
లవంగాలు	225 రూ.లు		
గోధుములు	200 రూ.లు		
దుంపలు		50 రూ.లు	

స్వయంగా చేసి చూడండి

- ఒక తెల్ల కాగితంపై ఒక రశ్మిని నిర్మించి దానిపై సంప్రసారిత సహజ సంఖ్యలను చూపించండి. (క్రింది బొమ్మ వలె)

- ఒక అద్దంను తీసుకొని దాని ఒక ప్రక్కను కాగితంనకు లంబంగా ఉంచుము మరియు సంఖ్యారేఖకు కూడా లంబంగా ఉంచవలెను.
- ప్రస్తుతం అద్దం యొక్క ఒక ప్రక్క సంఖ్యా రేఖ యొక్క (0)ను తగిలించుము. అద్దం యొక్క పరావర్తన ఫలకం సంఖ్యలకు ఎదురుగా ఉండవలెనుఅ. ఈ క్రింది విధంగా అగును.



- మీరు అద్దంలా మీరు నిర్మించిన రశ్మి మరియు దీనిపై గల 1,2,3 మొదలైన సంఖ్యలను చూడగలరు. అవి 0 నుండి ఎడమవైపు వరుసగా ఉన్నట్లు కనిపించును.
- అద్దంనకు వెనుక భాగంలో కనిపిస్తున్న 1,2,3 ... మొదలైన సంఖ్యలను -1, -2, -3, ... మొదలైన సంఖ్యలుగా తీసుకోగలం.

ఈ పని ద్వారా పరిశీలించండి -

- మీరు నిర్మించిన రశ్మి మరియు అద్దంలో కనిపిస్తున్న ప్రతిబింబం (రశ్మి ప్రతిబింబం) రెండు ఒక సరళరేఖను ఏర్పరుచును మరియు ఈ రేఖపై గల సున్నా (0) గుర్తు గల బిందువు నుండి కుడిప్రక్కకు 1,2,3, ... మొదలైన మీరు రాసిన సంఖ్యలు ఉండును మరియు ఎడమకుఅ ఈ సంఖ్యల యొక్క ప్రతిబింధ సంఖ్యలు 1,2,3 ..... మొదలైనవి ఉండును.
- అద్దంను తీసి మరియు మీరు ముందుగా నిర్మించిన రశ్మిని ఎడమ ప్రక్కకు పెరిగించిన ఏమగును ? ముందుగా నిర్మించిన రశ్మినకు కలిపిన భాగం ముందు గల రశ్మికి వ్యతిరేక రశ్మి అగును. రెండు రశ్మిలు కలిసి ఒక సరళరేఖ అద్దంలో చూసిన ప్రతిబింధ రశ్మి అగును. దీనిపై ముందు తీసుకున్న వరుస సంఖ్యలను సూచించు బిందువుల మధ్య భేదము సమానంగా తీసుకొని బిందువులను గుర్తించ వలెను మరియు వాటిని ఆ బిందువు నుండి సరిగ్గా ఎడమకు గల బిందువుల నుండి ఆరంభించి -1, -2, -3 ... మొదలైన సంఖ్యల ద్వారా పేర్లు పెట్టండి. మీరు ఈ క్రింది బొమ్మను పొందగలరు.

అనగా ఈ బొమ్మలో 0 (సున్నా) గుర్తు గల బిందువు యొక్క కుడిప్రక్క గల బిందువుల వద్ద ముందు 1,2,3, ... మొదలైన సంఖ్యలు గలవు. ప్రస్తుతం వాటితో (+) గుర్తును రాయండి. ఫలితంగా +1, +2, +3 ... గా అగును. (కాని +1 మరియు 1 మధ్య ఎటువంటి బేధం లేదు)

పూర్ణసంఖ్యల సమూహంలో +1 మరియు -1 పరస్పరం వ్యతిరేకం. ఈ వ్యతిరేక సంఖ్యల జతను మనం (+1, -1)గా రాయగలం. అదే విధంగా మిగిలిన వ్యతిరేక జత సంఖ్యలు (+2,-2) (+3,-3) (+4,-4).

+5 యొక్క వ్యతిరేక పూర్ణసంఖ్య -5

-5 యొక్క వ్యతిరేక పూర్ణసంఖ్య +5

తెలుసా ?

0 యొక్క వ్యతిరేఖ సంఖ్య 0 అగును. అనగా 0=-0

ఎచ్చట రెండు వ్యతిరేక పరిస్థితులు ద్వారా సంఖ్యలు ఏర్పడునో అచ్చట ఒక పరిస్థితి ద్వారా ధనాత్మ సంఖ్యలు మరియు వ్యతిరేక పరిస్థితి ద్వారా ఋణాత్మక సంఖ్యలను రాయాలి. వ్యతిరేక పరిస్థితి యొక్క ఉదాహరణలను ఈ క్రింద నీయడమైనది.

దూరం విషయంలో కుడి-ఎడమ, క్రింద-పైన, ముందు-వెనుక, ఎత్తు-లోతు మొదలైనవి వ్యతిరేక పరిస్థితులు అగును.

సాధారణంగా -

కుడి కొరకు ధనాత్మ సంఖ్యలు మరియు ఎడమ కొరకు ఋణాత్మక సంఖ్యలు

పై కొరకు ధనాత్మక సంఖ్యలు మరియు క్రింద కొరకు ఋణాత్మక సంఖ్యలు

ఎత్తు కొరకు ధనాత్మక సంఖ్యలు మరియు లోతు కొరకు ఋణాత్మక సంఖ్యలు వాడుదురు.

ఈ ఆలోచన తరువాత, రమన అడిగెను - +4 మరియు -7 లకు పరస్పరం వ్యతిరేక సంఖ్యల అనగలమా ? రమన అడిగిన ప్రశ్న యొక్క సమాధానం తెలుసుకొనుటకు క్రింది నిచ్చిన పనిని చేద్దాం.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- పైన గల సంఖ్యారేఖను చూసి క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు ఇవ్వండి.

  సున్నా (0) గుర్తు గల బిందువు నుండి కుడిప్రక్కకు 3 యూనిట్లు వెల్లిన, ఏ సంఖ్యను పొందెదరు ?

  సున్నా (0) గుర్తు గల బిందువు నుండి ఎడమ ప్రక్కకు 3 యూనిట్లు వెల్లిన ఏ సంఖ్యను పొందెదరు ?

- సున్నా గుర్తు గల బిందువు నుండి దీనికి వ్యతిరేక ప్రక్కలలో గల సంఖ్యలను పరస్పరం వ్యతిరేక సంఖ్యలు అందురు. అందువలన +3 మరియు -3 పరస్పరం వ్యతిరేక సంఖ్య అగును.

  అందువలన +4 మరియు -7 సంఖ్యలు రెండు 0 నుండి సమాన దూరంలో లేవు. కనుక వాటిని పరస్పరం వ్యతిరేఖ సంఖ్యలు అనగలమా ?

పరస్పరం వ్యతిరేక సంఖ్యలు తెలుసుకొనుటకుఅ మరొక పనిని చేద్దాం.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- నీవు మరియు నీ స్నేహితుడు ఒక దగ్గర కూర్చొండి.
- నీ వద్ద -1,-2,-3 .... -8 గల సంఖాకార్డులను ఉంచుము. అయిన నీ వద్ద ఎన్ని సంఖ్యాకార్డులు గలవు ?
- అదే విధంగా నీ స్నేహితునికి +1,+2,+3 ... +8 గల సంఖ్యాకార్డులను ఇవ్వుము.
- నీవు -1 కార్డును చూపించిన యడల నీ స్నేహితునికి -1 యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్యాకార్డును చూపించుటకు చెప్పుము. పరస్పరం వ్యతిరేక సంఖ్య గల రెండు కార్డులను ఒకటి చేయుము.
- అదే విధంగా నీ స్నేహితుడు ఒక కార్డు చూపించిన నీవు ఆ కార్డు యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్యను చూపించుము. ఈ విధంగా అన్ని సంఖ్యాకార్డులు అయినంత వరకు ఈ పనిని చేయుము.
- ఈ విధంగా ఆడి పరస్పరం వ్యతిరేక సంఖ్యల జతలను నిర్ణయించండి.

8.3.1. ఋణాత్మక గుర్తు (-) యొక్క అర్థం.

ఇప్పటి వరకు తీసివేత కొరకు (-) గుర్తు వాడుట జరిగెను. మన కొరకు 5-3 యొక్క అర్థం 5 నుండి 3ను తీసివేయుట కాని -3 కొరకు ఏ అర్థం లేకుండెను. మనం కేవలం సహజ సంఖ్యల గూర్చి తెలుసుకున్నాం.

ప్రస్తుతం '-' గుర్తు యొక్క వేరే అర్థం మనం తెలుసుకున్నాం. ఇది వ్యతిరేక స్థితి యొక్క గుర్తు.

అనగా, +5 యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్య -5

+5 మరియు -5 పరస్పరం వ్యతిరేక సంఖ్యలు అందువలన -5 యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్య = +5

లేక -(-5) = +5

అదే విధంగా - (-7) = +7

8.4. పూర్ణసంఖ్యలలో పెద్ద-చిన్న క్రమం.

సహజ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై చూపించినపుడు మనం చూశాం.

ప్రతీ సంఖ్య కంటె పెద్ద సంఖ్య సంఖ్యారేఖపై గల గుర్తు బిందువు నుండి కుడి ప్రక్కకు ఉండును మరియు ఆ సంఖ్య కంటె చిన్న సంఖ్య గుర్తు బిందువునకు ఎడమప్రక్క ఉండును.

సంఖ్యారేఖపై పూర్ణసంఖ్యలను చూపించునపుడు కూడా సంఖ్యల గూర్చి ఆ నియమాన్ని పాటిద్దాం. అందువలన మనం చూశాం -

0 కంటె -1 చిన్నది

-1 కంటె -2 చిన్నది

-2 కంటె -3 చిన్నది

-8 కంటె -9 చిన్నది

క్రింది రెండు విషయాలను పరిశీలించండి -

-8 కంటె 9 పెద్దది (ఇది మనకు తెలుసు)

-8 కంటె -9 చిన్నది (ఇప్పుడు తెలుసుకున్నాం)

తరగతిలో ఈ ఆలోచనలను విని రమేష్ అడిగెను - ఒక పరిస్థితిని చెప్పండి -9 కంటె -8 పెద్దదిగా తెలియును ? సీమ సమాధానం చెప్పెను -

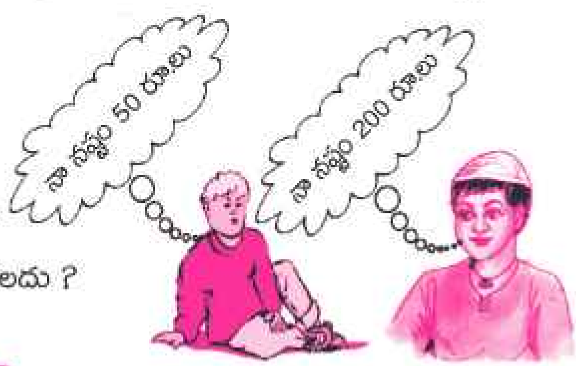
మనకు తెలుసు, లాభలను ధనాత్మక సంఖ్య ద్వారా తెలియ జేయుదురు మరియు నష్టంను ఋణాత్మక సంఖ్య ద్వారా తెలియ జేయబడును అందరూ చెప్పిరి అవునని. రహీమ్ మరియు శంకర్ ఒకొక్కరు 5000 రూ.లుతో వ్యాపారం చేసిరి.

ఒక వారం తరువాత తెలిసెను-

రహీమ్‌కు 200 రూ.లు నష్టం వచ్చెను.

మరియు శంకర్‌కు 50 రూ.లు నష్టం వచ్చెను.

అయిన చెప్పండి, ప్రస్తుతం ఎవరి వద్ద ఎంత గలదు ?



రహీమ్ యొక్క ప్రస్తుతం పెట్టుబడి = 5000 రూ.లు - 200 రూ.లు

= 4800 రూ.లు

శంకర్ యొక్క ప్రస్తుత పెట్టుబడి

= 5000 రూ.లు - 50 రూ.లు

= 4950 రూ.లు

అయిన 200 రూ.లు నష్టం వచ్చిన వ్యాపారస్తుని పెటుటబడి అధికం లేక 50 రూ.లు నష్టం వచ్చిన వ్యాపారస్తుని పెట్టుబడి అధికమా ?

అందువలన నష్టం 200 లేక (-200) కంటె నష్టం 50 లేక (-50) ఎక్కువ. -50 > - 200

చిన్న గుర్తును (<) ఉపయోగించి ప్రస్తుతం పూర్ణ సంఖ్యల వరుస అగును,

1 < 2
0 < 1 → (మనకు తెలుసు)

-1 < 0
-2 < -1
-3 < -2
-12 < -11 → (ప్రస్తుతం తెలుసుకున్నాం)

క్రింది పూర్ణ సంఖ్యల యొక్క వరుస గూర్చి కొన్ని విషయాలను తెలుసుకున్నాం.

- ప్రతీ ధనాత్మక సంఖ్య 0 (సున్నా) కంటె పెద్దది అగును.
- ప్రతీ ధనాత్మక సంఖ్య, ఏదైనా ఋణాత్మక సంఖ్య కంటె పెద్ద అగును.
- 0 (సున్నా), ప్రతీ ఋణాత్మక సంఖ్య కంటె పెద్దది అగును.
- 9 > 7 లేక -9 < -7,   5 > - 3 లేక -5 < 3,   -7 < -4 లేక 7 > 4

  అనగా రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మధ్యలో ఏ రకమైన అసమానత (పెద్ద లేక చిన్న) ఉండునో, రెండు సంఖ్యల వ్యతిరేక సంఖ్యల మధ్యలో ముందు గల అసమానత యొక్క వ్యతిరేక అసమానత కనిపించును.
- ప్రతీ రెండు వరుస సంఖ్యలను సూచించు బిందువుల మధ్య భేదము 1 అగును.

  అనగా 6-5 = 1 (మనకు తెలుసు)

  అలాగే -2 - (-3) = 1

  -3 - (-4) = 1 మొదలైనవి
- సంఖ్యారేఖపై గల రెండు సంఖ్యల మధ్యలో కుడిప్రక్క గల సంఖ్య, ఎడమ ప్రక్క గల సంఖ్య కంటె పెద్దది అగును. ఫలితంగా ఎడమప్రక్క సంఖ్య కుడిప్రక్క సంఖ్య కంటె చిన్నది అగును.

అభ్యాసం - 8.1

1. ఈ క్రింది పరిస్థితులకు వ్యతిరేక పరిస్థితులను రాయండి.

   క) జన సంఖ్య పెరుగుట　　　ఖ) బ్యాంకులో రూపాయలు జమ చేయుట

   గ) ఖర్చు చేయుట　　　ఘ) ఉత్తర దిక్కు వెళ్ళుట

   ఙ) ఉష్ణోగ్రత తగ్గుట　　　చ) 500 క్రీస్తుశకం

2. '+' లేక '-' గుర్తులను ఉపయోగించి రాయండి.

   క) 400 రూపాయల లాభం　　　ఖ) కుడి ప్రక్కకు 4 కి.మీ.

   గ) బ్యాంకు నుండి 300 రూ.లు తీయట　　　ఘ) 5 గోల్స్‌తో ఓడుట

   ఙ) భూతలు నుండి 200 మీ. ఎత్తు　　　చ) 2,00,000 రూపాయలు ఆదాయం

3. క్రింది జతల సంఖ్యలలో ఏవి వ్యతిరేక జతల సంఖ్యలో గుర్తించుము.

   (2, -3),　(-5, 5),　(-7, -8),　(-1, 0),　(-11, +11),　(17, -17)

4. ఒక నిర్దిష్ట దినములో భారతదేశంలో ఆరు స్థానాలలో గల ఉష్ణోగ్రతలను ఇవ్వడమైనది.

ప్రాంతం	ఉష్ణోగ్రత
సియాచిన్	0^0C నుండి 10^0C తక్కువ
భువనేశ్వర్	0^0C నుండి 22^0C అధికం
సిమ్లా	0^0C నుండి 3^0C తక్కువ
ధారంగబడి	0^0C నుండి 1^0C తక్కువ
కొరాపుట్	0^0C నుండి 8^0C అధికం
లడక్	0^0C నుండి 8^0C తక్కువ

   క) ప్రతీ ప్రాంతం యొక్క ఉష్ణోగ్రతను పూర్ణసంఖ్యలలో రాయండి.

   ఖ) ఒక సంఖ్యారేఖకు నిర్మించి ప్రతీ ప్రాంతం యొక్క ఉష్ణోగ్రతను దానిలో చూపించండి.

   గ) ఏ ప్రాంతం ఉష్ణోగ్రత అన్నిటికంటె అధికం మరియు ఏ ప్రాంతం ఉష్ణోగ్రత అన్నిటికంటె తక్కువ ?

5. క్రింది గల వరుసలలో ఏ వరుస సరియైనదో రాయండి.

   3 < 4,　-7 > -8,　-9 > +5 ,　-3 < 0,　-8 < +2,　+1 > -300,　-0 < 0

6. ఇచ్చిన సంఖ్యల యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్యలను రాయండి.

   క) 7　ఖ) -9　గ) -10　ఘ) 0　ఙ) 17

7. క్రింది పూర్ణ సంఖ్యల రెండింటి మధ్యలో గల పూర్ణసంఖ్యలను చిన్న నుండి పెద్ద క్రమంలో రాయండి.

క) 2 మరియు 8 ఖ) -3 మరియు -7

గ) -5 మరియు +2 ఘ) -1 మరియు +1

ఙ) -7 మరియు 0

8. ఖాళీలను >,< మరియు = గుర్తులలో సరియైన దానిని ఎంచి రాయండి.

క) 2 ☐ - 5 ఖ) -7 ☐ 3 గ) 0 ☐ - 4

ఘ) 0 ☐ - 0 ఙ) -0 ☐ - 3 చ) - 3 ☐ - 7

9. క్రింది వాటిలో సరియైన దానిని ఎంచి మీ నోట్‌బుక్‌లో రాయండి.

క) అన్నిటి కంటె చిన్న పూర్ణసంఖ్య ఖ) -225 కంటె -80 చిన్నది

గ -444 కంటె 0 చిన్నది ఘ) -2 < 0 < 7

ఙ) -0 = 0 చ) సున్నా (0) ధనాత్మకం లేక ఋణాత్మకం కాదు

10. క) చిన్న నుండి పెద్ద క్రమంలో రాయండి.

5, 0, -11, 14, -20, 25, - 4

ఖ) పెద్ద నుండి చిన్న క్రమంలో రాయండి.

- 8, 2, 5, -6, 0, 15, -111

11. సంఖ్యారేఖను చూసి, క్రింది ప్రశ్నల జవాబులను చెప్పండి.

క) +5 గుర్తు గల బిందువు నుండి కుడిప్రక్కకు 3 యూనిట్లు దూరం వెళ్లినచో ఏ సంఖ్య లభించును ?

ఖ) +5 గుర్తు గల బిందువు నుండి ఎడమ ప్రక్కకు 3 యూనిట్లు దూరం వెళ్లినచో ఏ సంఖ్య లభించును ?

గ) +7 గుర్తు గల బిందువు నుండి ఎంత దూరం వెళ్లినచో -4 గుర్తు గల బిందువు వచ్చును ?

ఘ) -7 గుర్తు గల బిందువు నుండి ఎంత దూరంలో -4 గుర్తు గల బిందువు గలదో, -7 గుర్తు గల బిందువు నుండి ఎడమ ప్రక్కకు అదే దూరంలో ఏ సంఖ్య గలదు ?

12. సంఖ్యారేఖపై

క) -3 మరియు -8 గుర్తు గల బిందువుల మధ్యలో దూరమెంత ?

ఖ) -2 మరియు -3 గుర్తు గల బిందువుల మధ్యలో దూరమెంత ?

8.5. పూర్ణసంఖ్యల యొక్క సంకలనం మరియు వ్యవకలనం.

8.5.1 పూర్ణసంఖ్యల సంకలనం (కూడిక) :

సహజ సంఖ్యల యొక్క కూడిక మీకు తెలుసు.

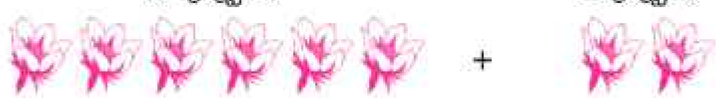
+5 మరియు 5 మధ్య ఎటువంటి భేదం లేదు. అందువలన 5+3 మరియు (+5) + (+3) మధ్యలో ఏ భేదము లేదు. కనుక మీరు చెప్పగలరు : (+5) + (+3) = +8

అయితే ఈ కూడికను ఎలా వచ్చిందో రండి చూద్దాం

5 పువ్వులు + 3 పువ్వులు

మూడు పువ్వులలో ఒక దానిని తెచ్చి 5 పువ్వులతో కలిపిన -

6 పువ్వులు + 2 పువ్వులు



రెండు పువ్వులతో ఒక దానిని తెచ్చి 6 పువ్వులతో కలిపిన -

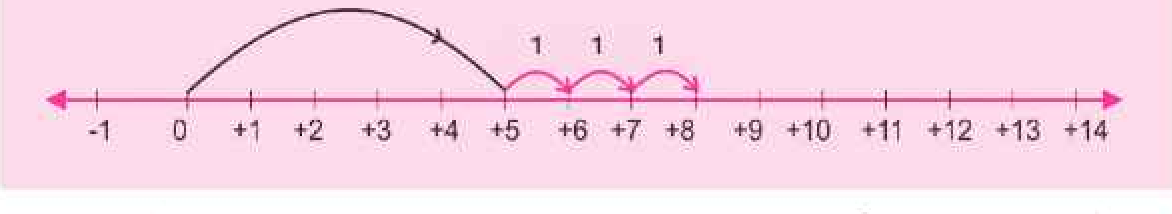
7 పువ్వులు + 1 పువ్వు

చివరగా గల ఒక పువ్వును తెచ్చి 7 పువ్వులతో కలిపిన -

8 పువ్వులు

సంఖ్యల వరుస ననుసరించి 3 నుండి 1,1 మరియు 1 తెచ్చి 5తో క్రమంగా కలిపిన 8 లభించెను.

దీనిని సంఖ్యారేఖపై క్రింది విధంగా చేయగలరు.



మొదటి సంఖ్యను చూపించుటకు సున్నా (0) గుర్తు గల బిందువు నుండి ఆరంభించి మొదటి సంఖ్య గుర్తు బిందువు వరకు వెళ్లాలి.

(+5) మరియు (+3)ల కూడికను నిర్ణయించుటకు సున్నా గుర్తును బిందువు నుండి కుడిప్రక్కకు వెల్లి +5 బిందువు దగ్గరకు చేరిన తరువాత, లెక్కించి 3 లేక 3 యూనిట్ల గదులను కుడిప్రక్కకు వెల్లాలి. ప్రస్తుతం +8 దగ్గరకు చేరుకున్నాం.

అందువలనె తెలుసుకున్నాం, (+5) + (+3) = +8

ఈ పద్ధతిలో క్రింది కూడికను చేద్దాం.

క) (-3) + (+5) = ?

కూడికలో మొదటి సంఖ్య -3 కనుక (0) గుర్తు నుండి -3 వరకు వెల్లి -3 బిందువు వద్దకు చేరవలెను.

+5 ను కూడిక చేయుటకు ఒకొక్క యూనిట్‌ను తీసుకొని 5 యూనిట్లను లెక్కించి కుడిప్రక్కకు జరగాలి. మనం ఏ సంఖ్య దగ్గరకు చేరామో అది +2 అగును.

అందువలన (-2) + (-5) = +2

చెప్పండి చూద్దాం :
సంఖ్యారేఖను ఉపయోగించి
-4లో -6 కలిపిన ఎంత అగును ?

8.5.2. పూర్ణసంఖ్యల వ్యవకలనం (తీసివేత)

మనకు తెలుసు, లంభంను ధనాత్మక సంఖ్య ద్వారా మరియు నష్టంను ఋణాత్మక సంఖ్య ద్వారా గుర్తించ వచ్చును. ఒక సాధారణ విషయం ద్వారా సహజంగా దీనిని అర్థం చేసుకొవచ్చు. అది ఏమనగా నష్టం అధికం అయిన లాభం తగ్గును. దీని కొరకు ఒక ఉదాహరణను చూద్దాం.

గోవింధ దుంపలను అమ్మి 10 రూ.లు లాభం పొందెను మరియు ఉల్లి అమ్మి 4 రూ.లు నష్టం పొందెను.

అయిన అతని యొక్క మొత్తం లాభం = 10 రూ.లు - 4 రూ.లు = 6 రూ.లు

తరువాత దినం అతనికి దుంపలు అమ్ముట వలన 10 రూ.లు లాభం వచ్చెను కాని ఉల్లి అమ్ముట వలన 5 రూ.లు నష్టం వచ్చెను, అనగా అతనికి నష్టం 1 రూపాయి అధికం వచ్చెను.

మొత్తం లాభం = 10 రూ.లు - 5 రూ.లు = 5 రూ.లు

ప్రస్తుతం చూశాం,

రెండువ దినం అతనికి నష్టం 1 రూపాయి పెరుగుట వలన (4 రూ.లు కాకుండా 5 రూ.లు నష్టం అగుట వలన) అతనికి లాభం 1 రూపాయి తగ్గెను. (6 రూపాయిలు కాకుండా 5 రూ.లు లాభం వచ్చెను) అందువలన మనం తెలుసుకున్నాం నష్టం ఎంత పెరుగునో లాభం అంత తగ్గును.

దీనివలన మనం ఏం తెలుసుకున్నాం ? -3 కూడిక చేయుట అనగా +3 తీసివేయుట అగును.

అందువలన (-5) + (-3) = -5 - (+3)

మనం 7 నుండి 3 ఏ విధంగా తీసివేయగలం ?

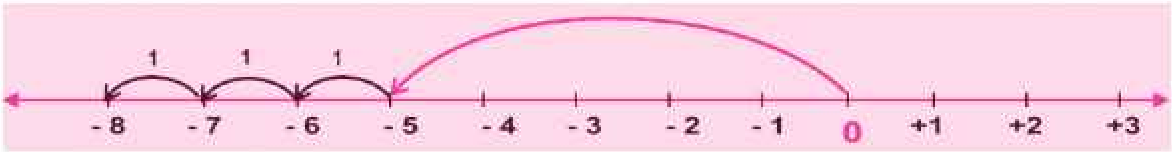
7 - 3 = (7-1)-2

= (6-1)-1

= 5-1 = 4

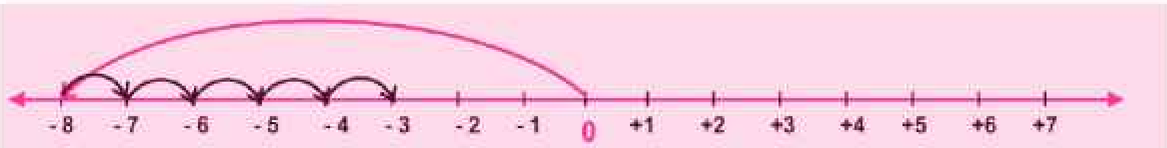
అనగా 7 నుండి ప్రతీసారి మూడు ఒకట్లను తగ్గించి 7 నుండి 3 తీసివేయగలం. 1 తగ్గించడం అనగా లభించిన సంఖ్య, సంఖ్యారేఖపై ఎడమ ప్రక్క ఉండును. అందువలన తీసివేయునపుడు మనం ఎడమ ప్రక్కకు జరుగుతాం.

క) (-5) + (-3) = -5 - (+3)



(0) గుర్తు గల బిందువు నుండి -5 గుర్తు గల బిందువు వరకు వెళ్లిన తరువాత +3ని తీసివేయుటకు 3 ఒకట్లు ఎడమ ప్రక్కకు వెళ్లవలెను. -5 + (-3) = -5 - (+3) = -8

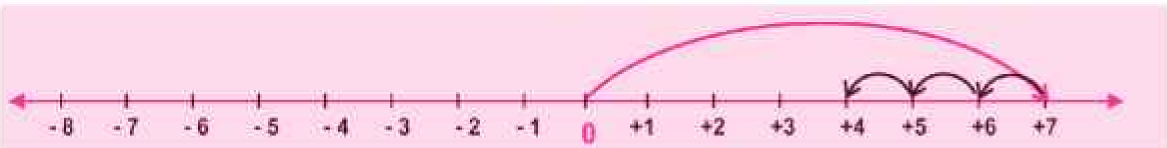
ఖ) (-8) + (+5) = ?



మనం చూశాం : -8 + (+5) = -3

గ) (+7) = (+3) = ?

మనకు తెలుసు +3ని తీసివేయుటకు 3 ఒకట్లు ఎడమ ప్రక్కకు వెళ్లవలెను.

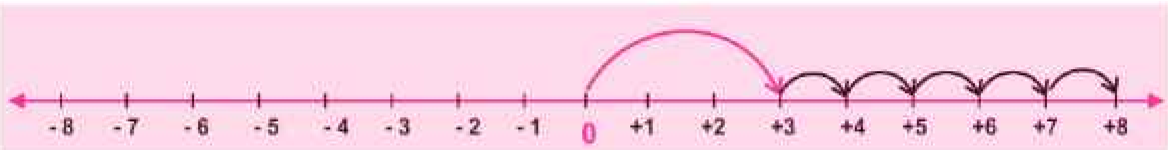


(+7) - (+3) = +4

ఘ) (+3) - (-5) = ?

-5ను తీసివేయుట అనగా -5 యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్య +5ను కూడిక చేయుట.

(o3) - (-5) = (+3) + (+5)



అందువలన (+3) - (-5) = (+3) + (+5) = +8

సంఖ్యారేఖ సహాయంతో సంకలన మరియు వ్యవకలన పని గూర్చి కొన్ని విషయాలు

- కూడిక మరియు తీసివేత చేయునపుడు మనం సున్నా (0) గుర్తు గల బిందువు నుండి ఆరంభం చేస్తాం.
- ధనాత్మక సంఖ్యలను కూడిక చేయునపుడు మనం కుడి ప్రక్కకు వెలతాం.
- ధనాత్మక సంఖ్యలను తీసివేయునపుడు మనం ఎడమ ప్రక్కకు వెలతాం.
- ఏ ధనాత్మక సంఖ్యను కూడిక చేయుదుమో, ఒకొక్క ఒకట్ల గదులను లెక్కించి మనం కుడిప్రక్కకు వెలతాం.
- ఏ ధనాత్మక సంఖ్యను, తీసివేయుదుమో, ఒకొక్క ఒకట్ల గదులను లెక్కించి మనం ఎడమ ప్రక్కకు వెలతాం.
- ఒక ఋణాత్మక సంఖ్యను కూడిక చేయు అనగా ఆ సంఖ్య యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్యను తీసివేయుట. అందువలన ఎచ్చట ఋణాత్మక సంఖ్యను కూడిక చేయుదుమో, అచ్చట ఆ సంఖ్య యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్యను తీసివేయవలెను. అనగా (+5) + (-7) = (+5) - (+7)
- ఎచ్చట ఋణాత్మక సంఖ్యను తీసివేయుట జరుగునో అచ్చట ఆ సంఖ్య యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్యను కూడిక చేయవలెను. అనగా (+3) - (-5) = (+3) + (+5)

అభ్యాసం - 8.2

1. ఒక సంఖ్యారేఖను నిర్మించి అందులో పూర్ణ సంఖ్యలను గుర్తించండి. ఆ సంఖ్యారేఖ సహాయంతో క్రింది ప్రశ్నలు సమాధానాలు ఇవ్వండి.

క) -3 గుర్తును బిందువు నుండి ఆ సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమం (లేక వ్యతిరేక సంఖ్య) గుర్తు గల బిందువు యొక్క దూరం ఎన్ని యూనిట్లు.

ఖ) -7 గుర్తు గల బిందువు మరియు -4 గుర్తు గల బిందువు మధ్య దూరమెంత ?

గ) +7 గుర్తు గల బిందువు మరియు +4 గుర్తు గల బిందువు మధ్య దూరమెంత ?

2. సంఖ్యారేఖను నిర్మించి అందులో పూర్ణసంఖ్యలను గుర్తించుము. ఆ సంఖ్యారేఖను చూసి ఈ క్రింది ప్రశ్నల జవాబులు చెప్పండి.

క) -2 గుర్తు గల బిందువు నుండి 4 యూనిట్లు ఎడమకు వెల్లినచో ఏ సంఖ్య గుర్తు గల బిందువు వద్దకు చేరుకొగలం ?

ఖ) +4 గుర్తు గల బిందువు నుండి 4 యూనిట్లు ఎడమకు వెల్లినచో ఏ సంఖ్య గుర్తు గల బిందువు వద్దకు చేరుకొగలం ?

గ) -5 గుర్తు గల బిందువు నుండి 4 యూనిట్లు కూడికి వెల్లినచో ఏ సంఖ్య వద్దకు చేరుకొగలం ?

ఘ) -2 గుర్తు గల బిందువు నుండి 5 యూనిట్లు కుడికి వెల్లినచో ఏ సంఖ్య దగ్గరకు చేరుకొగలం ?

3. సంఖ్యారేఖ సహాయంతో కూడిక చేయండి. ప్రతీ ప్రశ్న సమాధానం కొరకు ఒకొక్క సంఖ్యారేఖను నిర్మించండి.

క) (+3) + (+2) ఖ) (-2) + (+5) గ) (+8) + (-3)

ఘ) (-7) + (+4) ఙ) (-3) + (-4) చ) (+5) + (0)

4. ప్రతీ ప్రశ్న కొరకు ఒకొక్క సంఖ్యారేఖను నిర్మించి తీసివేయండి.

క) (+5) - (+3) ఖ) (+7) - (-4) గ) (+5) - (+8)

ఘ) (+4) - (-7) ఙ) (-4) - (+3) చ) (-6) - (-5)

8.6. పూర్ణసంఖ్యలలో సంకలన ప్రక్రియ యొక్క వివిధ నియమాలు :

క) మనం ఏ కూడిక ప్రక్రియను చేయుచున్నామో, వాటి ద్వారా మనం చూశాం.
రెండు పూర్ణసంఖ్యల మొత్తము ఒక పూర్ణసంఖ్య అగును. అందువలన సంకలన ప్రక్రియ సంవృత ధర్మం పాటించుఅను.

ఖ) సంకలన ప్రక్రియలో వినిమయ లేక భిత్యాంతర ధర్మం.

ଚିନ୍ତା କରି ଦେଖ

- ఏవైనా రెండు ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకొండి. మొదటి సంఖ్యలో రెండవ సంఖ్యను కలపండి. ఇప్పుడుఅ రెండువ సంఖ్యలో మొదటి సంఖ్యను కలపండి. రెండింటి మొత్తం సమానమా ?
- ఒక ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్య మరియు ఒక ఋణాత్మక పూర్ణసంఖ్యను తీసుకొని ఆ విధంగా కలపండి. రెండింటి మొత్తములలో ఏమి పరిశీలించు చున్నారు ?
- రెండు ఋణాత్మక పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకొని మొదటి సంఖ్యతో రెండవ సంఖ్యను కలిపి ఆ మొత్తము ఎంత వచ్చెనో రాయండి. ఇప్పుడు రెండవ సంఖ్యలో మొదటి సంఖ్యను కలిపి ఆ మొత్తంను నిర్ణయించండి. రెండింటి మొత్తం సమానం అగునా ?
- పైన చేసిన మూడు పనుల వలన ఏమి తెలుసుకున్నారు ?

మనం చూశాం -

రెండు పూర్ణసంఖ్యలను ఏదైనా క్రమంలో కూడిక చేసినా కూడా ఆ మొత్తము సమానం అగును. అందువలన సంకలన ప్రక్రియ వినిమయ లేక స్థిత్యంతర ధర్మంను పాటించెను.

చెప్పండి చూద్దాం :
పూర్ణసంఖ్యలో తీసివేత ప్రక్రియ వినిమయ నియమం పాటించాలి.

గ) $\{(+2) + (-3)\} + (+6) = (-1) + (+6) = +5$

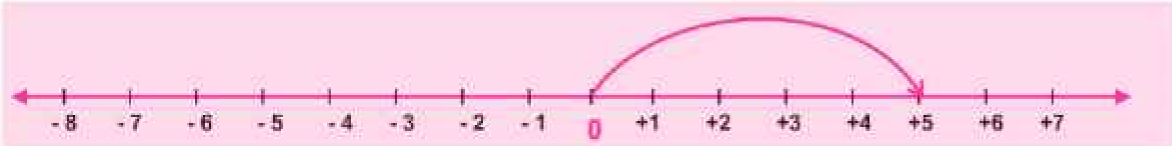
మరల $(+2) + \{(-3) + (+6)\} = (+2) + (+3) = +5$

మనం చూశాం, మూడు సంఖ్యలలో మొదటి మరియు రెండువ దాని మొత్తంను మూడువ సంఖ్యతో కలిపినచో ఎంత లభించునో మొదటి సంఖ్యను రెండువ మరియు మూడువ సంఖ్యల మొత్తంలో కలిపిన అదే మొత్తం లభించును.

అనగా సంకలన ప్రక్రియ సహచర ధర్మంను పాటించును.

ఘ) ఒక పూర్ణసంఖ్యతో సున్నా (0)ను కలుపుదాం.

(+5) + (0) = ?



(+3)లో (0) సున్నాను కూడిక చేయునపుడు, మొదట సంఖ్యారేఖపై +5 గుర్తుగల బిందువు వద్దకు చేరాలి. సున్నాను కలుపుట అనగా ముందుకు (కుడి ప్రక్కకు) వెల్ల కూడదు. అందువలన +5లో సున్నా కలిపిన ఆ మొత్తము +5 అగును.

$(+5) + (0) = +5$

అదే విధంగా $(0) + (+5) = +5$

అందువలన $(+5) + 0 = 0 + (+5) = +5$

> **తెలుసా ?**
> సున్నా (0) ఒక సంకలన తత్సమాంశం

అనగా పూర్ణసంఖ్యలలో సంకలన ప్రక్రియ యొక్క సంకలన తత్సమాంశ ధర్మం పాటించును.

మనం చూశాం -

ఏదైనా పూర్ణసంఖ్య +0 = 0 + ఆ సంఖ్య = ఆ సంఖ్య అగును.

ఙ) రెండు వ్యతిరేక సంఖ్యల సంకలనం

సంఖ్యారేఖ సహాయంతో కొన్ని జతల వ్యతిరేక సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

- (+4) + (-4) =
- (-7) + (+7) =
- (+ 8) + (- 8) =

పైన గల మూడు కూడికల వలన ఏమి పరిశీలిస్తున్నారు ?

రెండు పరస్పర వ్యతిరేక సంఖ్యల మొత్తం సున్నా (0) అగును.

దీనిని సంకలన ప్రక్రియలో విలోమ నియమం అందురు.

8.7. పూర్ణసంఖ్యల పరమమానం

సంఖ్యారేఖపై గల 0 (సున్నా) గుర్తు నుండి +3 గుర్తు గల బిందువు వరకు వెళ్లినచో ఎన్ని ఒకట్ల దూరమును అతిక్రమించి గలరు ? జవాబు అగును : 3 ఒకట్లు.

మరల (0) సున్నా గుర్తు గల బిందువు నుండి -3 గుర్తు గల బిందువు వరకు వెళ్లినచో ఎన్ని ఒకట్ల దూరమును అతిక్రమించగలం. జవాబు అగును : 3 ఒకట్లు.

అనగా +3 గుర్తు 0 నుండి 3 ఒకట్లు కుడిప్రక్కకు గలదు మరియు -3 గుర్తు 0 నుండి 3 ఒకట్లు ఎడమ ప్రక్కకు గలదు. ఇచ్చట '+' గుర్తు కుడి ప్రక్కకు గుర్తు మరియు '-' గుర్తు ఎడమ ప్రక్కకు గుర్తు అగును.

కాని రెండు సంఖ్యలు +3 మరియు -3 యొక్క ఒక సాధారణ గుణం ఏమనగా ప్రతీ సంఖ్య సున్నా (0) నుండి 3 ఒకట్లు దూరంలో గలవు.

అందువలన మనం చూశాం, +3 మరియు -3 ప్రతీ సంఖ్య 3తో కూడినది. 3నకు +3 మరియు -3ల యొక్క పరమమానం అందురు. సంకేతంలో

-3 యొక్క పరమమానంనకు $|-3|$ వలె రాయవచ్చు మరియు

$|-3| = 3$

అదే విధంగా +3 యొక్క పరమమానంను $|+3|$గా రాయుదురు.

$|+3| = 3,\ |+2| = 2,\ |-2| = 2,\ |-15| = 15,\ |+15| = 15$

> తెలుసా ?
>
> ◆ పరమమానం అనగా పరిమాణం అనే విలువ
>
> ◆ 0 యొక్క పరమమానం మనకు తెలుసు 0=-0
>
> అందువలన $|0| = |-0| = 0$

✎ -12, +6, -1394 మరియు +1579 పరమమానంను నిర్ణయించండి.

8.8. సంఖ్యారేఖను ఉపయోగించకుండా పూర్ణసంఖ్యల సంకలన మరియు వ్యవకలన ప్రక్రియ.

క) పూర్ణసంఖ్యల సంకలనం

మనం సంఖ్యారేఖ సహాయంతో పూర్ణసంఖ్యల సంకలనం మరియు వ్యవకలనం చేశాం. ప్రస్తుతం సంఖ్యారేఖ లేకుండా పూర్ణసంఖ్యల యొక్క సంకలనం మరియు వ్యవకలనం చేద్దాం.

సంఖ్యల యొక్క విశ్లేషణ సహాయంతో సంకలన ప్రక్రియ :

దీని కొరకు మొదట ఒక సంఖ్య యొక్క విశ్లేషణతో పరిచయం అవుదాం. ఒక సంఖ్యను విశ్లేషణ చేయుట అనగా దానిని రెండు లేక ఎక్కువ సంఖ్యల మొత్తంగా చూపించుట.

అనగా +5 = (+4) + (+1), అదే విధంగా మనం +5 $= (+3) + (+2)$

$= (+2) + (+3)$

$= (+1) + (+4)$

ఇది +5 యొక్క వివిధ విశ్లేషణ. అనగా +5ను ఎన్ని రకాలుగా రెండు ధనాత్మక సంఖ్యల మొత్తంగా రాయవచ్చునో ఇచ్చట చేయడమైనది.

✎ +8ను వివిధ రకాలుగా రెండు ధనాత్మక సంఖ్యల మొత్తంగా రాయండి.

దీనివలన మనం తెలుసుకోగలం 1 రూపాయి నష్టం మరియు 1 రూపాయి నష్టం అయిన మొత్తం నష్టం 2 రూపాయల అగును. అనగా, (-1) + (-1) = -2

2 రూపాయల నష్టంతో మరో 1 రూపాయి నష్టం వచ్చినచో, మొత్తం నష్టం 3 రూపాయలు అగును. అనగా, (-2) + (-1) = -3

దీనివలన మనం తెలుసుకున్నాం -

$$-3 = (-2) + (-1)$$
$$= (-1) + (-2)$$

అదే విధంగా

$$-5 = (-4) + (-1)$$
$$= (-3) + (-2)$$
$$= (-2) + (-3)$$
$$= (-1) + (-4)$$

ఇది -5 యొక్క విశ్లేషణ అగును.

ప్రస్తుతం మనం సంఖ్యల విశ్లేషణ సహాయంతో సంకలన ప్రక్రియను చేద్దాం.

ఉదాహరణ-1 **(-3) + (+5) = ?**

$(-3) + (+5) = (-3) + (+3) + (+2)$ (+5 ను (+3) + (+2) గా రాసాం.)

$= 0 + (+2)$ (వ్యతిరేక సంఖ్యలు (-3) + (+3) = 0)

$= +2$ (తత్సమాంశ నియమం, 0 + (+2) = +2

ఇలా కూడా రాయవచ్చు (-3) + (+5) = (+5) + (-3)

= 5 - 3 = 2

ఉదాహరణ - 2 **(-8) + (+6) = ?**

$$(-8) + (+6) = (-2) + (-6) + (+6)$$
$$= (-2) + \{(-6) + (+6)\}$$
$$= (-2) + 0$$
$$= -2$$

> **తెలుసా ?**
> ఒక ధనాత్మక మరియు ఒక ఋణాత్మక సంఖ్యను కూడిక చేయునపుడు ఏ సంఖ్యను విశ్లేషం చేయాలి ? దీనిని తెలుసుకొనుటకు రెండు సంఖ్యల పరమమానం నిర్ణయించి ఏ సంఖ్య పరమమానం అధికమో ఆ సంఖ్యను విశ్లేషణ చేయాలి.

పరిశీలించండి : ఉదాహరణ (1)లో +5నకు విశ్లేషణ చేయడమైనది, కాని ఉదాహరణ (2)లో -8ను విశ్లేషణ చేయడమైనది.

ఖ) సంఖ్యల విశ్లేషణ సహాయంతో వ్యవకలన ప్రక్రియ

ఒక సంఖ్యను తీసివేయుట అనగా దీని సంకలన విలోమం లేక దీని వ్యతిరేక సంఖ్యను కూడిక చేయుట.

అనగా,

(i) $+5 - (-3) = +5 + (+3)$

(ii) $-3 - (+5) = -3 + (-5)$

ఈ విధంగా ప్రతీ తీసివేత ప్రక్రియను ఒక కూడికగా మార్చవచ్చు. తీసివేతను కూడికగా మార్చిన తరువాత సంకలన పద్ధతిలో చేయవలెను.

(iii) $(-5) - (+3) = (-5) + (-3)$
$= (-5) + (-1) + (-2)$
$= (-6) + (-1) + (-1)$
$= (-7) + (-1)$
$= -8$

(iv) $(-3) - (-5) = (-3) + (+5)$
$= (-3) + (+3) + (+2)$
$= 0 + (+2)$
$= +2$

> తెలుసా ?
> - +3 యొక్క సంకలన విలోమం -3.
> - -5 యొక్క సంకలన విలోమం +5.
> - ఏదైనా పూర్ణసంఖ్య మరియు దాని సంకలన విలోమంల మొత్తం '0' అగును.

అభ్యాసం - 6.1

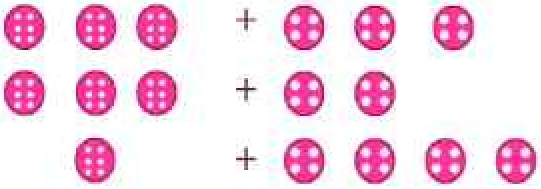
1. క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు చెప్పండి.

క) 5 ఒక పూర్ణసంఖ్య, (-6) ఒక పూర్ణసంఖ్య.
5 + (-6) = (-1) ఇచ్చట పూర్ణసంఖ్యల రెండింటి మొత్తం ఒక పూర్ణసంఖ్య.
దీనివలన సంకలన ప్రక్రియ యొక్క ఏ ధర్మం పాటించుట జరిగినది ?

ఖ) పూర్ణసంఖ్యలలో సంకలన ప్రక్రియ తత్సమాంగ నియమం పాటించును - ఒక ఉదాహరణను ఇచ్చి వివరించండి.

గ) ఒక ధనాత్మక పూర్ణసంఖ్యను తీసుకోండి. దీని యొక్క సంకలన విలోమంను నిర్ణయించండి. మీరు తీసుకున్న ధనాత్మక సంఖ్య మరియు దాని సంకలన విలోమం యొక్క మొత్తం ఎంత అగునో నిర్ణయించండి.

2. ఇది (+1)ను సూచించును. అదే విధంగా ఇది (-1)ని సూచించును.
అయిన క్రింది కూడికలను చేయండి.



= ______ + ______ = ______

= ______ + ______ = ______

= ______ + ______ = ______

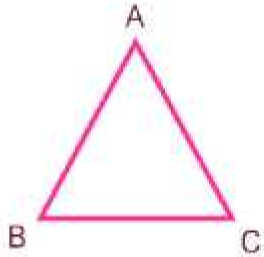
= ______ + ______ = ______

తొమ్మిదవ అధ్యాయం

సమతలంపై గల జ్యామితీయ ఆకృతులు

9.1. త్రిభుజం

9.1.1. పరిచయం



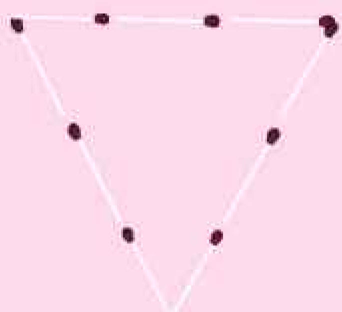
A,B,C ఒక రేఖలో గల మూడు బిందువులు. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ మరియు $\overline{CA}$ రేఖాఖండాల ద్వారా ఏర్పడిన చిత్రం ఒక త్రిభుజం అగును. ప్రతీ త్రిభుజానికి మూడు భుజములు, మూడు శీర్ష బిందువులు మరియు మూడు కోణాలు ఉండును.

మనకు కూడా వివిధ రకాల త్రిభుజాల గూర్చి తెలుసు. భుజం పొడవు ననుసరించి త్రిభుజంను మూడు తరగతులుగా విభజించడం జరిగింది. అవి (క) సమబాహు త్రిభుజం (ఖ) సమద్విబాహు త్రిభుజం (గ) విషమబాహు త్రిభుజం

అదే విధంగా కోణాల పరిమాణం ననుసరించి త్రిభుజంను మూడు భాగాలుగా విభజించడం జరిగింది. అవి (క) సమకోణ త్రిభుజం (ఖ) సూక్ష్మకోణ త్రిభుజం (గ) స్థూలకోణ త్రిభుజం.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- కొన్ని అగ్గిపుల్లలను తీసుకొనుము. వీటిని ఉపయోగించి త్రిభుజకారముగా చేయుటకు ప్రయత్నించండి.
- మీరు అనేక సార్లు ఈ క్రింది సంఖ్య గల అగ్గిపుల్లలకు తీసుకొండి.



  మూడు పుల్లలు

  నాలుగు పుల్లలు

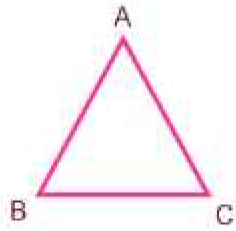
  ఐదు పుల్లలు

  ఆరు పుల్లలు

  (గుర్తుంచుము ప్రతీసారి మీరు తీసుకున్న అన్ని అగ్గిపుల్లలను ఉపయోగించ వలెను)

- ప్రతీసారి తయారు చేసిన త్రిభుజాలను పేర్లు పెట్టండి. ఒకవేల మీరు త్రిభుజాలను తయారు చేయలేక పోయినచో దాని కారణంను ఆలోచించండి.

ప్రక్కగల బొమ్మను పరిశీలించండి. $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CB}$ ల సాధారణ బిందువు 'B'. 'B' బిందువు త్రిభుజం యొక్క ఒక శీర్ష బిందువు 'B' బిందువు వద్ద గల కోణం $\angle ABC$ ను $\angle A$ అని అందురు. ఇచ్చట $\angle B$ నకు ఎదురుగా గల భుజం $\overline{AC}$.



$\overline{AC}$ యొక్క పొడవును 'b' అందురు.

క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు చెప్పండి.

క) $\angle A$ యొక్క ఎదురుగా గల భుజం ఏమి ?

ఖ) ఏ భుజం యొక్క పొడవును 'a' గా పేరు పెట్టవచ్చును ?

గ) $\overline{BC}$ యొక్క పొడవును ఏ విధంగా పేరు పెట్టవచ్చును ?

ఘ) $\overline{AB}$ మరియు $\overline{AC}$ లు ఖండించుట ద్వారా ఏర్పడిన శీర్ష బిందువు పేరు ఏమిటి ?

> **తెలుసుకోండి !**
>
> $\overline{BC}$ యొక్క సంలగ్న కోణాలు $\angle ABC$, $\angle ACB$
>
> $\overline{AC}$ యొక్క సంలగ్న కోణాలు $\angle BAC$, $\angle ACB$
>
> $\overline{AB}$ యొక్క సంలగ్న కోణాలు $\angle ABC$, $\angle BAC$

$\overline{BA}$ మరియు $\overline{CA}$ రెండు భుజాల అంతర్గత కోణము $\angle BAC$.

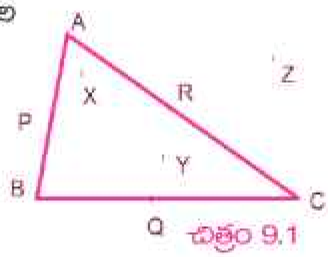
అదే విధంగా $\overline{AB}$ మరియు $\overline{BA}$ ల అంతర్గత కోణం $\angle ABC$.

$\overline{BC}$ మరియు $\overline{AC}$ ల అంతర్గత కోణం పేరు పెట్టండి.

9.1.2. త్రిభుజం యొక్క అంతఃభాగం మరియు బాహ్యభాగం

ప్రక్కన గల ABC త్రిభుజంను చూడండి మరియుఅ ఈ క్రింది గల ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

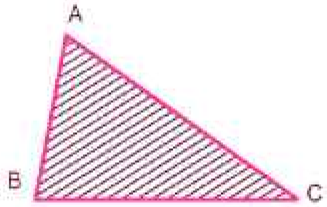
- ΔABC _____, _____ మరియు _____ మూడు రేఖా ఖండాల సమూహం.
- P బిందువు _____ భుజంపై గలదు.
- Q బిందువు _____ భుజంపై గలదు.
- R బిందువు _____ భుజంపై గలదు.
- A,B,C బిందువులు కాకుండా బొమ్మలో _____, _____ మరియు _____ మూడు బిందువులు గలవు.



చిత్రం 9.1

చిత్రం 9.1లో మనం చూశాం X,Y మరియు Z మూడు బిందువులు త్రిభుజంపై (అనగా త్రిభుజం యొక్క ఏదైనా భుజంపై) లేవు. అయిన అవి ఎక్కడ గలవు ?

మీరు తప్పని సరిగా చెప్పగలరు X,Y బిందువులు ABC త్రిభుజంలో గలవు. X మరియు Y వలె అనేక బిందువులు ABC త్రిభుజం లోపల గలవు. ఆ మొత్తం బిందువులను తీసుకొని ABC త్రిభుజం యొక్క అంతఃభాగము ఏర్పడినది.



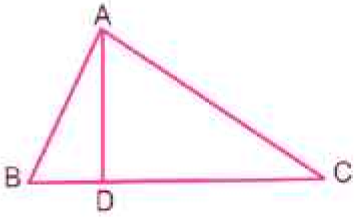
చిత్రం 9.2

చిత్రం 9.2లో గల భాగం త్రిభుజం యొక్క అంతఃభాగం. కనుక చిత్రం 9.1లో Z బిందువు ABC అంతఃభాగం లేక త్రిభుజంపై లేదు. ఇది త్రిభుజం యొక్క బాహ్యభాగంలో గలదు.

ABC త్రిభుజం మరియు దీని యొక్క అంతఃభాగమును విడిచి మిగిలిన అన్ని భాగాలను ABC త్రిభుజం యొక్క బాహ్యభాగం అని అందురు.

అభ్యాసం - 9.1

1. ΔABC చిత్రంను నిర్మించండి. ఈ త్రిభుజం యొక్క అంతఃభాగంలో P బిందువు మరియు బాహ్యభాగంలో A బిందువును గుర్తించండి. A బిందువు ΔABC అంతఃభాగం లేక బాహ్యభాగంలో గలదా ?



2.క) ప్రక్క బొమ్మను చూసి మూడు త్రిభుజాల పేర్లు రాయండి.

ఖ) ఈ బొమ్మలో గల ఏడు కోణాలు పేర్లు రాయండి.

గ) ఆరు రేఖాఖండాల పేర్లు రాయండి.

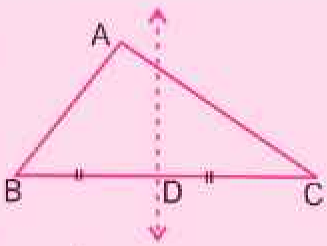
ఘ) ఏ రెండు త్రిభుజాలకు $\angle B$ ఒక సాధారణ కోణం అగును ?

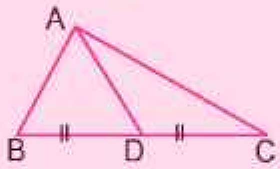
9.1.3. త్రిభుజం యొక్క మధ్యమం

కాగితంను మడత పెట్టి ఇచ్చిన రేఖాఖండం యొక్క లంబంను తెచ్చు ఉపాయము మనకు తెలుసు.

ନିଜେ କରି ଦେଖ

- ఒక కాగితం నుండి ΔABC ఆకారంలో కట్ చేయండి (బొమ్మ చూడండి)
- కాగితంను మడతపెట్టి $\overline{BC}$ భుజం యొక్క సమద్విఖండ లంబంను గుర్తించండి.
- ఆ కాగితం మడత $\overline{BC}$ నకు ఏ బిందువు వద్ద ఖండించునో దాని పేరు 'D' పెట్టండి.
- ప్రస్తుతం A బిందువు మరియు D బిందువులు కలిపిన $\overline{AD}$ లభించును. ఈ $\overline{AD}$ ను త్రిభుజం యొక్క మధ్యమం అందురు.





ΔABC యొక్క భుజం BC మధ్య బిందువు D. $\overline{BC}$ యొక్క ఎదురుగా గల శీర్ష బిందువు A రేఖాఖండం $\overline{AD}$ ని త్రిభుజం యొక్క మధ్యమం అందురు. అదే విధంగా $\overline{AC}$ భుజం మధ్య బిందువు G మరియు శీర్ష బిందువు B ని కలుపు రేఖాఖండం $\overline{BE}$ త్రిభుజం యొక్క మరొక మధ్యమం.

త్రిభుజం యొక్క ఒక శీర్ష బిందువు నుండి దాని ఎదురుగా గల భుజం యొక్క మధ్య బిందువుతో కలిపిన రేఖాఖండంను త్రిభుజం యొక్క మధ్యమం అందురు.

ఒక త్రిభుజం యొక్క ప్రతీ శీర్ష బిందువు నుండి కేవలం ఒకే మధ్యమంను నిర్మించగలం.

తెలుసా ?

- ఒక త్రిభుజంలో మొత్తం మూడు మధ్యమాలు ఉండును.
- ఒక మధ్యమం యొక్క రెండు చివరి బిందువులు విడిచి మిగిలిన అన్ని బిందువులు త్రిభుజం యొక్క అంతభాగంలో ఉండును.

అభ్యాసం - 9.2

1. ఒక త్రిభుజం యొక్క మధ్యమం పూర్తిగా త్రిభుజం యొక్క అంతఃభాగంలో ఉండునా ? మీ సమాధానానికి సరియైన కారణం ఇవ్వండి.

2. బొమ్మను నిర్మించి చూపించండి.

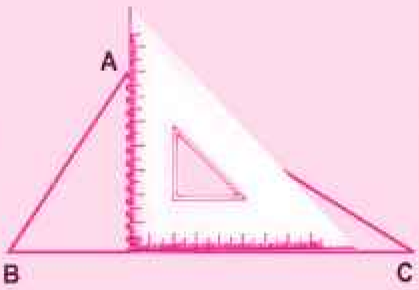
క) ΔABC ని నిర్మించండి. దాని AB=AC (ఏదైనా కొలత తీసుకోండి)
మధ్యమం $\overline{AD}$ నిర్మించండి. ప్రొట్రాక్టర్ సహాయంతో $\angle ADB$ యొక్క పరిమాణమును నిర్ణయించండి.

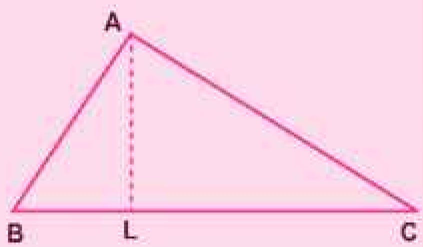
ఖ) AB=AC ని తీసుకొని మరో త్రిభుజంను నిర్మించండి. $\overline{BE}$ మరియు $\overline{CF}$ మధ్యమములను నిర్మించండి. నిర్మించిన రెండుఅ మధ్యమాలు యొక్క పొడవులలో మీరు ఏమి పరిశీలించారు ?

9.1.4. త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు

ନିଜେ କରି ଦେଖ

- ఒక కార్డుబోర్డుతో ΔABC ని తయారుచేయండి.
- దానిని ఒక టేబుల్‌పై లంబంగా పట్టుకొని ఉంచండి.
- త్రిభుజం యొక్క శీర్షబిందువు టేబుల్‌పై ఎంత ఎత్తులో గలదో ఒక స్కేల్ సహాయంతో కొలవండి.
- శీర్షబిందువు A నుండి భూమి BC యొక్క అతి తక్కువ దూరం లేక లంబ దూరమును త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు అందురు.
- ఒక సెట్‌స్క్వేయర్ సహాయంతో ఈ లంబంను నిర్మిద్దాం మరియు పొడవును కొలుద్దాం. ఈ పొడవు త్రిభుజం యొక్క భూమి BC పై ఎత్తు $\overline{AL}$ త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు అగును.



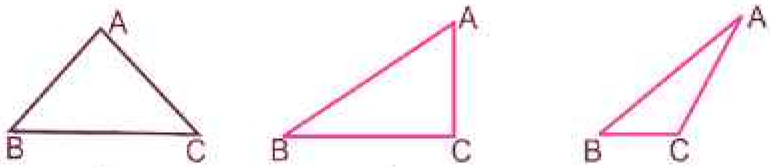


ఏదైనా త్రిభుజం యొక్క ఒక శీర్షబిందువు నుండి దాని వ్యతిరేక భుజంపై లంబంగా నిర్మించిన రేఖాఖండం పొడవును ఆ భుజం యొక్క పై ఎత్తు అందురు మరియు ఈ రేఖాఖండంను ముందు భుజంపై లంబం అందురు. ప్రతీ శీర్షబిందువు నుండి దాని వ్యతిరేక భుజంపై ఒక నిర్దిష్టమైన ఎత్తు ఉండును.

అభ్యాసం - 9.3

1. ఒక త్రిభుజంను ఎన్ని ఎత్తులు ఉండును ?

2.క. ప్రక్క పేజీలో గల చిత్రం 9.3లో ఇచ్చినట్లు రెడు త్రిభుజాలను నిర్మించండి మరియు సెట్‌స్క్వేయర్‌ను ఉపయోగించి బొమ్మలలో A బిందువు నుండి $\overline{BC}$ పై లంబంలను నిర్మించండి మరియు వాటి పేర్లు AD పెట్టండి.



అల్పకోణం (i) సమకోణం (ii) అధికకోణం (iii)

ఖ. సమకోణం త్రిభుజం ΔABC లో D బిందువు యొక్క స్థానం ఎచ్చట ఉండుటను చూడగలుగు చున్నారు ?

గ. అధిక కోణ త్రిభుజంలో A బిందువు నుండి వ్యతిరేక భుజం $\overline{BC}$ పై లంబం నిర్మించుట సంభవం అయ్యింది ?

(సూచన : $\overleftrightarrow{BC}$ రేఖను నిర్మించండి మరియు Q తరువాత $\overline{AD}$ లంబ,ను నిర్మించండి.)

3. ప్రశ్న నెం. 2లో నిర్మి,చిన చిత్రంను చూచి జవాబు లివ్వండి.

క) ఏ రకమైన త్రిభుజంలో శీర్షబిందువు A నుండి $\overline{BC}$ పై నిర్మించిన లంబం యొక్క చివరి బిందువులు రెండు విడిచి మిగిలిన భాగాలు ΔABC యొక్క అంతఃభాగంలో గలవు ?

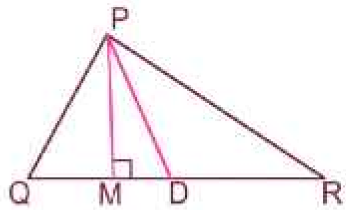
ఖ) ఏ విధమైన త్రిభుజంలో శీర్షబిందువు A నుండి $\overline{BC}$ పై గల లంబం చివరి బిందువు A విడిచి మిగిలిన భాగాలు ΔABC యొక్క బాహ్యభాగంలో గలవు ?

గ) ఏ విధమైన త్రిభుజంలో శీర్షబిందువు నుండి $\overline{BC}$ పై నిర్మించిన లంబం ΔABC యొక్క ఒక భుజంలో పూర్తిగా కలిసిపోయెను ?

4. ఏ విధమైన త్రిభుజం యొక్క రెండు శీర్షబిందువుల నుండి వ్యతిరేక భుజంపై గీసిన లంబం మరియు మధ్యమం వేరుగా ఉండును ?

6. ΔPQR లో D బిందువు $\overline{QR}$ యొక్క మధ్యబిందువు.

$\angle PMR$ యొక్క పరిమాణం 90° అయిన



క) $\overline{PM}$ త్రిభుజం యొక్క ______ శీర్షబిందువు నుండి ______ భుజంపై ______

ఖ) $\overline{PD}$ త్రిభుజం యొక్క ______ శీర్షబిందువు నుండి ______ భుజంపై ______

గ) $\overline{QM}$ మరియు $\overline{MR}$ యొక్క కొలత సమానమా ?

7. ఒక త్రిభుజంను నిర్మించి, క్రింది వాటిని గుర్తించండి.

క) ΔABC యొక్క, $\overline{BE}$ మధ్యమం.

ఖ) ΔPQR లో శీర్షబిందువు P నుండి $\overline{QR}$ పై లంబం $\overline{PM}$ మరియు శీర్షబిందువు Q నుండి $\overline{PR}$ పై లంబం A.

గ) ΔXYZలో శీర్షబిందువు Y నుండి వ్యతిరేక భుజంపై గీసిన లంబం యొక్క Y, బిందువు విడిచి మిగిలిన భాగాలు త్రిభుజం యొక్క బాహ్యభాగంలో ఉండును.

ఘ) ΔPQRలో శీర్షబిందువు P నుండి దీని వ్యతిరేక భుజంపై గల ఎత్తు $\overline{PQ}$తో సమానం మరియు శీర్షబిందువు R నుండి దీని వ్యతిరేక భుజంపై గల ఎత్తు $\overline{RQ}$తో సమానం.

మీ కొరకు పని :

ఒక కాగితంలో వివిధ రకాల త్రిభుజాకార ఆకృతము అనగా సమబాహు త్రిభుజం, సమద్విబాహు త్రిభుజం, విషమబాహు త్రిభుజంలను కట్ చేయండి మరియు వాటి యొక్క ప్రతీ శీర్షబిందువు నుండి వ్యతిరేక భుజంపై గల లంబం మరియు మధ్యమాలను చూపించండి. వాటి పాదవులను నిర్ణయించండి. వాటిలో గల ప్రత్యేకత గూర్చి స్నేహితులతో ఆలోచన చేయండి.

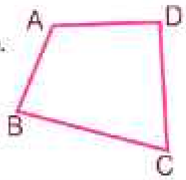
9.2. చతుర్భుజం

9.2.1. మనకు తెలిసినవి

మనకు అనేక రకాల జ్యామితిక చిత్రాల గూర్చి తెలుసు. ముందు మనం త్రిభుజం గూర్చి ఆలోచన చేశాం. త్రిభుజం మూడు రేఖా ఖండాల ద్వారా ఏర్పడిన చిత్రం. కాని ఇచ్చట నాలుగు రేఖాఖండాల ద్వారా ఏర్పడిన ఒక చిత్రం గూర్చి తెలుసుకుందాం.

మీ నోట్‌బుక్‌లో నాలుగు బిందువులు A,B,C మరియు D తీసుకొనుము. వాటి మధ్యలో ఏ మూడు బిందువులు ఒక రేఖలో ఉండకూడదు. ఇప్పుడు $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ రేఖాఖండాలను నిర్మించుము. మీరు ఒక బొమ్మను పొందిరి.

ప్రక్క చిత్రంను చూడండి. ఇది నాలుగు రేఖాఖండాల ద్వారా ఏర్పడిన చిత్రం. దానిని చతుర్భుజం అందురు.

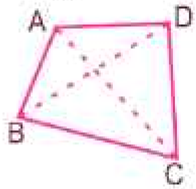


ନିଜେ କରି ଦେଖ

- రెండు కర్రపుల్లలను తీసుకొనుము. ఆ రెండు కర్రపుల్లల ఒకొక్క చివరలను కలపండి మరియు మరో రెండు చివరలు దూరముగా ఉండును. అవి ఒక సరళరేఖలో ఉండకూడదు.

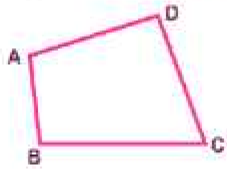
- మరో రెండు కర్రపుల్లలను తీసుకొని ఒకొక్క చివరకు ముందుగా గల దూరంగా ఉన్న చివరలతో కలపండి.
- ప్రస్తుతం రెండు కర్రపుల్లల మరో రెండు చివరలను కలపండి. దగ్గరగా గల (అనగా చివరలు కలిపిన) కర్రపుల్లలు రెండు ఒక సరళరేఖలో ఉండవు.

ముందు చేసిన పనిలో నాలుగు కర్రపుల్లలు ఒక సరళరేఖీయ ఆకృతిని తయారు చేసెను. ప్రతీ కర్రపుల్ల ఒక సరళరేఖ స్థితి ఈ ఆకారం ఒక చతుర్భుజంను సూచించును. ప్రతీ కర్రపుల్ల ఈ చతుర్భుజం యొక్క ఒకొక్క భుజం అగును.



ఈ చతుర్భుజంనకు నాలుగు శీర్షబిందువులు, నాలగు భుజాలు మరియు నాలుగు కోణాలు గలవు. రెండు వ్యతిరేక శీర్షబిందువులను కలుపు రేఖాఖండంను చతుర్భుజం యొక్క కర్ణం అందురు. ప్రక్క చిత్రంలో గల ABCD చతుర్భుజంలో $\overline{AC}$ మరియు $\overline{AD}$ ఒకొక్క కర్ణమగును.

పై ఆలోచన వల్ల మనం తెలుసుకున్నాం ఒక సమతలం (కాగితం తలం లేక నల్లబల్ల)పై నాలుగు బిందువులు A,B,C,D ఉన్నచో మరియు ఆ నాలుగు బిందువుల మధ్యలో ఏ మూడు కూడా ఒక సరళరేఖలో లేనిచో $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, మరియు $\overline{DA}$ ద్వారా ఏర్పడిన చిత్రంను ఒక చతుర్భుజం అందురు.



ఏదైనా చతుర్భుజంనకు నాలుగు భుజాలు, నాలుగు శీర్షబిందువులు మరియు నాలుగు కోణాలు ఉండును. ప్రక్క చిత్రంలో గల చతుర్భుజం యొక్క పేరేమిటి ?

- ఒక చతుర్భుజం యొక్క ఏ రెండు భుజములను ఒక సాధారణ చివరి బిందువు ఉండునో, ఆ రెండు భుజాలను సన్నిహిత భుజాలు అందురు. $\overline{AB}$ మరియు $\overline{BC}$ ఒక జత సన్నిహిత భుజాలు. ప్రతీ చతుర్భుజంనకు నాలుగు జతల సన్నిహిత భుజాలు ఉండును.

పై చిత్రంలో గల నాలుగు జతల సన్నిహిత భుజాలను రాయండి.

- ఏ రెండు భుజాలకు ఒక సాధారణ చివరి బిందువు ఉండదో ఆ రెండింటిని వ్యతిరేక భుజాలు అందురు. $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CD}$ ఒక జత వ్యతిరేక భుజాలు. ప్రతీ చతుర్భుజంలో రెండు జతల వ్యతిరేక భుజాలు ఉ ండును.

పై చిత్రంలో గల చతుర్భుజం యొక్క రెండు జతల వ్యతిరేక భుజాలను రాయండి.

- ఏదైనా చతుర్భుజంలో ఒక భుజం యొక్క రెండు చివరి బిందువులను ఆ చతుర్భుజం యొక్క ఒక జత వరుస శీర్షబిందువు లందురు. ఏ శీర్షబిందువులు వరుసగా ఉండదో ఆ రెండింటిన వ్యతిరేక శీర్షబిందువు లందురు. A మరియు B ఒక జత వరుస శీర్షబిందువులు, A మరియు C ఒక జత వ్యతిరేక శీర్షబిందువులు.

ఇంకా ఏ (రెండు జత శీర్షబిందువులు సన్నిహితం మరియు ఏ జత శీర్షబిందువులు వ్యతిరేక శీర్షబిందువును బొమ్మను చూసి రాయండి.

- వరుస శీర్షబిందువులలో గల రెండు కోణాలను వరుస కోణాలు మరియు వ్యతిరేక శీర్షబిందువులలో గల కోణాలను వ్యతిరేక కోణాలు అందురు.

పై చిత్రంలో గల చతుర్భుజంలో వరుస కోణాలు మరియు వ్యతిరేక కోణాల పేర్లు రాయాలి.

అభ్యాసం - 9.4

1. ఒక చతుర్భుజం యొక్క బొమ్మను నిర్మించి దాని పేరు PQRS పెట్టండి. దీని అన్ని భుజాలు, కోణాలు, శీర్షబిందువులు మరియు కోణాల పేర్లు రాయండి.

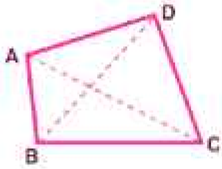
2.క) ∠B యొక్క వ్యతిరేక కోణం ________ మరియు ∠A యొక్క వ్యతిరేక కోణం ________

ఖ) $\overline{DA}$ భుజంనకు తగిలియున్న రెండు కోణాలు ________ మరియు ________

గ) చతుర్భుజంలో ఒక భుజంనకు ________ సంలగ్న కోణాలు ఉండును.

ఘ) శీర్షబిందువు B యొక్క వ్యతిరేక శీర్షబిందువు ________

ఙ) ________ కర్ణం యొక్క పొడవు ________ కర్ణం యొక్క పొడవుల కంటె అధికం.



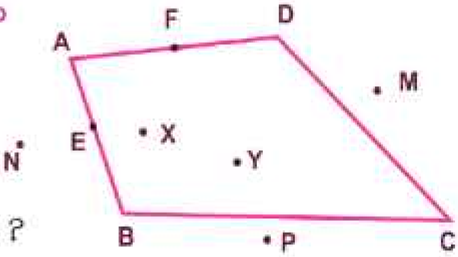
9.2.2. చతుర్భుజం యొక్క అంతఃభాగం మరియు భాహ్యభాగం

ప్రక్క బొమ్మను చూసి జవాబులు ఇవ్వండి.

క) ఏ బిందువులు చతుర్భుజంపై గలవు.

ఖ) ఏ బిందువులు చతుర్భుజంనకు అంతఃభాగంలో గలవు ?

గ) ఏ బిందువులు చతుర్భుజం యొక్క బాహ్యభాగంలో గలవు ?



ABCD చతుర్భుజంలో X,Y బిందువులు వలె అనేక అంతర బిందువులు గలవు. ఆ అన్ని బిందువుల మొత్తంలో ABCD చతుర్భుజం యొక్క అంతర్భాగము ఏర్పడినది. ఒక చతుర్భుజం యొక్క అన్ని అంతర బిందువుల మొత్తంలో ఏర్పడిన భాగమును చతుర్భుజం యొక్క అంతఃభాగం అందురు.

కాగిత తలం (సమతలం) యొక్క ఏ ప్రాంతం ABCD చతుర్భుజంనకు వెలుపల ఉండునో దానిని ABCD చతుర్భుజం యొక్క బాహ్యభాగం అందురు. చతుర్భుజం యొక్క నాలుగు భుజాలు దాని అంతఃభాగం మరియు బాహ్యభాగం మధ్య గల కొలరేఖలు చతుర్భుజం మరియు దాని అంత: భాగమును విడిచి చతుర్భుజంనకు చుట్టు గల సమతలం యొక్క మిగిలిన ప్రాంతంను చతుర్భుజం యొక్క బాహ్యభాగం అందురు. అందువలన అంతఃభాగం పరిమిత ప్రాంతం అయినపుడు బాహ్యభాగం అపరిమిత ప్రాంతం అగును.

> **తెలుసా ?**
> ఏదైనా చతుర్భుజము మరియు దీని అంత:-భాగముతో ఒక చతుర్భుజాకార క్షేత్రం ఏర్పడును.

9.3.3. కొన్ని ప్రత్యేక విధమైన చతుర్భుజాలు

స్వయంగా చేసి చూడండి

- మీ జ్యామితీ బొమ్మలో రెండు సెట్‌స్క్వేయర్లు గలవు. ఒక దానిని 30°ల సెట్‌స్క్వేయర్ మరియు మరో దానిని 45°ల సెట్‌స్క్వేయర్ అని అందురు.
- నీ మరియు నీ స్నేహితుని యొక్క 30° సెట్‌స్క్వేయర్ రెండింటిని బొమ్మలో చూపినట్లు కలిపి ఉంచండి.
- ప్రస్తుతం చెప్పండి, ఏర్పడిన చతుర్భుజం యొక్క ప్రతీ కోణం పరిమాణం ఎంత ?

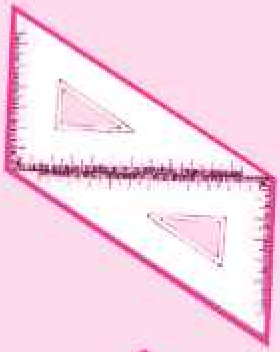
  ఏర్పడిన చతుర్భుజం యొక్క వ్యతిరేక భుజాల మధ్యలో ఏ విధమైన సంబంధం గలదు ?

ఈ విధమైన చిత్రంను దీర్ఘ చతురుస్రం (చతుర్భుజం) అందురు. దీనివలన మనం తెలుసుకున్నాం, ఏ చతుర్భుజంలో ప్రతీ కోణం పరిమాణం 900 అగునో దానిని దీర్ఘ చతురస్రం (చతుర్భుజం) అందురు.

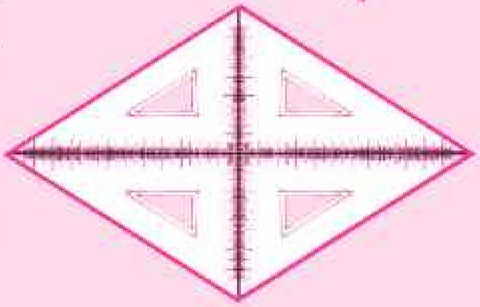
స్వయంగా చేసి చూడండి

- 45° సెట్‌స్క్వేయర్ రెండింటిని చిత్రంలో చూపినట్లు జత చేసి ఉంచినచో మనం ఒక రకమైన చతుర్భుజంను పొందగలము. దీనిని పరిశీలించినచో చూడగలరు, దీనిలో ప్రతీ కోణం పరిమాణం 90° మరియు అన్ని భుజాల పొడవులు సమానంగా ఉండును. ఈ విధమైన చతుర్భుజంను సమచతురస్రం అని అందురు.

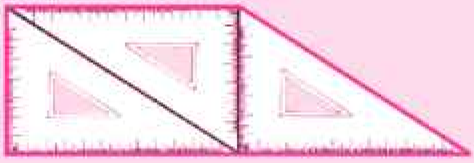
- ఇప్పుడు రెండు 30° సెట్‌స్క్వేయర్లను చిత్రంలో చూపినట్లు కలపండి. పరిశీలించండి, చిత్రంలో గల ఈ చతుర్భుజం యొక్క వ్యతిరేక భుజాల సమాంతరం మరియు సమానం. ఈ విధమైన చతుర్భుజంను సమచతురస్రం అని అందురు.



- నాలుగు 300ల సెట్‌స్క్వేయర్లను చిత్రంలో చూపినట్లు జత చేసిన అవి ఒక చతుర్భుజం వలె కనిపించును. ఈ చిత్రంలో గల చతుర్భుజం యొక్క వ్యతిరేక భుజాలు పరస్పరం సమాంతరం మరియు అన్ని భుజాలు సమానం. చతుర్భుజంను రోంబస్ అని అందురు.



- మూడు 900 సెట్‌స్క్వేయర్లను చిత్రంలో చూపినట్లు జత చేయండి. ఇవి కూడా ఒక చతుర్భుజంగా ఏర్పడును. ఈ చతుర్భుజంను ట్రపీజియమ్ అని అందురు. దీనిలో ఒక జత వ్యతిరేక భుజాలు సమాంతరం.



9.2.4. వివిధ రకాల చతుర్భుజాల యొక్క కోణములు మధ్యలో సంబంధం

ప్రతీ విధమైన చతుర్భుజంలో ఏ బొమ్మలను ముందుగా ఇవ్వడమైనదో ఆ బొమ్మలలో కోణాలు పరిమాణంను మీ ప్రొట్రాక్టర్ సహాయంతో కొలవండి. పట్టికలో గల ఖాళీ గదులందు (✓) లేక (×) రాయండి.

చతుర్భుజం పేరు	వ్యతిరేక కోణాల పరిమాణం సమానం	నాలుగు కోణాల పరిమాణం సమానం
దీర్ఘచతురస్రం		
సమచతురస్రం		
సమాంతరస్రం		
రాంబస్		
ట్రపీజియమ్		

మీరు తప్పని సరిగా చూసి ఉంటారు, దీర్ఘచతురస్రం మరియు సమచతురస్రం రెండింటి యొక్క అన్ని కోణాలు పరిమాణం సమానం మరియు ప్రతీ కోణం 90°. దీర్ఘచతురస్రం, సమచతురస్రం, సమాంతరస్రం మరియుఅ రాంబస్‌ల వ్యతిరేక కోణాల పరిమాణం సమానం.

అభ్యాసం - 9.5

1. క్రింద నీయబడిన పట్టికను పూరించండి, సమాంతరస్రం గూర్చి అవున లేక కాదు అని రాయబడినట్లు ఖాళీలను నింపండి.

చతుర్భుజం	వ్యతిరేక భుజాలు		అన్ని భుజాలు	వ్యతిరేక కోణాలు	రెండు కర్ణాలు	
	సమాంతరం	సమానం	సమానం	సమానం	సమానం	
సమాంతరస్రం	అవును	అవును	కాదు	అవును	కాదు	కాదు
దీర్ఘచతురస్రం						
సమచతురస్రం						
రాంబస్						
ట్రపిజియమ్						

2. ప్రతీ బొమ్మ క్రింద గల బ్రాకెట్ల మధ్యలో సరియైన దానిని ఎంచి ఖాళీలను పూరించండి.

క) ఒక సమాంతరస్రంలో .... సమానం అయిన అది ఒక రాంబస్ అగును.
(కోణముల పరిమాణం, అన్ని భుజాలు పొడవులు, రెండు కర్ణాల పొడవులు)

ఖ) ఒక .... యొక్క కోణాలు సమకోణాలు అయినచో అది ఒక దీర్ఘచతురస్రం అగును.

(సమచతురస్రం, సమాంతరస్రం, రోంబస్)

గ) ఒక దీర్ఘచతురస్రంలో .... సమానం అయిన అది ఒక సమచతురస్రం అగును.

(అన్ని భుజాల పొడవులు, అన్ని కోణాల పరిమాణాలు)

ఘ) ఏదైనా చతురస్రంలో ఒక జత వ్యతిరేక భుజాలు సమాంతరం అయిన అది .... అగును.

(రోంబస్, సమచతురస్రం, ట్రపిజియమ్)

ఙ) ఏదైనా చతుర్భుజంలో రెండు జతల వ్యతిరేక భుజాలు సమాంతరం అయిన అది .... అగును.

(సమచతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతరస్రం)

చ) ABCD చతుర్భుజంలో $\overline{AB}$ సమాంతరం $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ సమాంతరం $\overline{BC}$ మరియు $\angle ABC$ యొక్క పరిమాణం 90° అయిన చతుర్భుజం ఒక .... అగును.

(రోంబస్, దీర్ఘచతురస్రం, సమచతురస్రం)

3. క్రింది వాటిలో సరియైన దాని ప్రక్కన (✓) గుర్తు మరియు తప్పు అయిన దాని ప్రక్కన (×) గుర్తును పెట్టండి.

క) దీర్ఘచతురస్రం యొక్క ప్రతీ కోణం ఒక సమకోణం.

ఖ) దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వ్యతిరేక భుజాల పొడవులు సమానం.

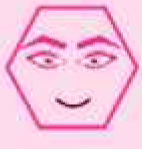
గ) ఒక సమచతురస్రంలో రెండు కోణాలు పరస్పరం సమానం.

ఘ) ఒక రోంబస్‌లో అన్ని భుజాల పొడవులు సమానం.

ఙ) ఒక సమాంతరస్రంలో అన్ని భుజాలు సమాంతరం.

చెప్పండి చూద్దాం.
సమచతురస్రంను ఒక ప్రత్యేక రకమైన దీర్ఘచతురస్రం అని అంటాము ? కారణమేమిటి ?

4. ఒక చతుర్భుజంలో అన్ని భుజాలుఅ సమానం మరియు అన్ని కోణాలు సమానం అయిన మనం దానిని సమచతుర్భుజం అని అంటాం. అయిన సమచతుర్భుజం ఏమిటి ?



నేనొక సుసమషడ్భుజం

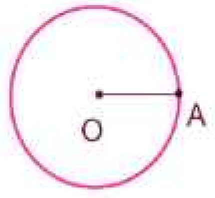
9.3. వృత్తం

ముందు తరగతిలో మీరు మీ చేతితో మరియు కంపాస్ ద్వారా ఏ విధంగా వృత్తంను నిర్మించగలము అని మీకు తెలుసు. ఈ పాఠంలో మనం వృత్తంనకు సంబంధించిన కొన్ని విషయాలను తెలుసుకుందాం.

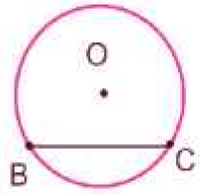
9.3.1. వృత్తం మరియు వృత్త సంబంధ కొన్ని పదాలు

మీ నోట్‌బుక్‌లో ఒక తలంపై ఒక బిందువును తీసుకొనుము. ఆ బిందువు వద్ద కంపాస్ యొక్క మొనను ఉంచి ఒక వృత్తంను నిర్మించండి. బిందువు పేరు 'O' పెట్టండి. ఈ 'O' బిందువును నిర్మించిన వృత్తం యొక్క కేంద్రం అగును. వృత్తంపై మరో బిందువు A తీసుకొనుము.

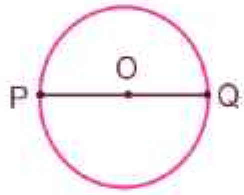
స్కేల్ సహాయంతో $\overline{OA}$ నిర్మించుము. $\overline{OA}$ నకు వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థం అని అందురు. వృత్తకేంద్రము మరియు వృత్తంపై ఏదైనా బిందువును కలిసిన రేఖాఖండం పొడవును వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థము అందురు. వృత్త వ్యాసార్థము అందురు. వృత్త వ్యాసార్థము ఒక పొడవును తెలియజేయును.



వృత్తంపై రెండు బిందువులు B మరియు C లను తీసుకొనుము. BC రేఖాఖండంను నిర్మించుము. ఇప్పుడు $\overline{BC}$ నకు వృత్తం యొక్క ఒక జ్యా అందురు. అనగా వృత్తంపై గల ఏవైనా రెండు బిందువులను కలుపు రేఖాఖండంను వృత్తం యొక్క జ్యా అందురు.



వృత్తంపై రెండు బిందువులు P మరియు Q లను తీసుకొనుము వాటితో ఏర్పడిన $\overline{PQ}$ జ్యా వృత్త కేంద్రము 'O' మధ్య గుండా వెల్లునుఅ. $\overline{PQ}$ను వృత్తం యొక్క వ్యాసం అని అందురుఅ. అనగా కేంద్రం నుండి పోవు జ్యాను వృత్తం యొక్క అతి పెద్ద జ్యా అగును. వృత్తంలో ఏదైనా వ్యాసం పొడవును ఆ వృత్తం యొక్క వ్యాసం అని అందురు. అందువలన వృత్తం వ్యాసం ఒక పొడవును తెలియజేయును.



స్వయంగా చేసి చూడండి

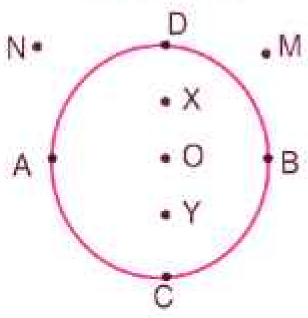
- 3 సెం.మీ., 4 సెం.మీ. మరియు 5 సెం.మీ.ల పొడవు గల వ్యాసార్థంలతో మూడు వేరు వేరు వృత్తములను నిర్మించండి. (కంపాస్ సహాయంతో) వాటిని మొదటి, రెండువ, మూడువ వృత్తాలుగా పేర్లు పెట్టండి.
- ప్రతీ వృత్తంలో వ్యాసార్థము మరియు వ్యాసంను నిర్మించండి.
- ప్రతీ వృత్తంలో వ్యాసార్థము మరియు వ్యాసాలను కొలిచి వాటి మధ్యలో గల సంబంధంను నిర్ణయించండి.

మనం తెలుసుకున్నాం, = 2 X వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థం
ఏదైనా వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థం 3.5 సె.మీ.
అయిన దాని వ్యాసం = 3.5 X 2 = 7 సె.మీ. అగును

చెప్పండి చూద్దాం :
వృత్తం వ్యాసం తెలిసినచో దాని వ్యాసార్థం ఎలా వస్తుంది ?

9.3.2. వృత్తం యొక్క అంతరం మరియు బాహ్యం

బొమ్మను చూచి జవాబులను ఇవ్వండి.



క) C,D,A మరియు ______ బిందువులు వృత్తంపై గలవు.

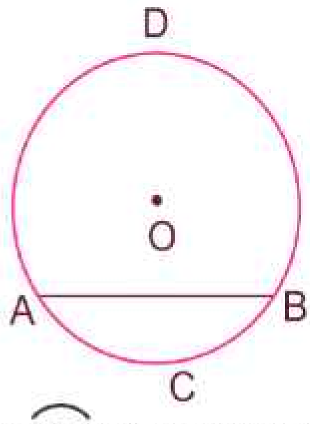
ఖ) M మరియు ______ బిందువులు వృత్తం యొక్క బాహ్యబిందులు అగును.

గ) X,O మరియు ______ బిందువులు వృత్తం యొక్క అంతర బిందువులగును.

> **తెలుసుకొండి**
> ఏ సమతలంలో వృత్తం నిర్మించబడునో ఆ సమతలం వృత్తం, వృత్తం యొక్క అంతరం మరియు వృత్తం యొక్క బాహ్యం అను మూడు భాగాలుగా విభజించబడును.

వృత్తం యొక్క అంతర బిందువుల మొత్తంతో వృత్తం యొక్క అంతఃభాగం ఏర్పడును. ఇది వృత్తం ద్వారా కలిపిన పరిమిత భాగంను సూచించును. ఇది ఒక పరిమిత ప్రాంతం. వృత్తం మరియు వృత్త అంతరం కలిపి వృత్తాకార భాగంను ఏర్పరచును. వృత్తం యొక్క బాహ్యబిందువుల మొత్తంచే వృత్తం యొక్క బాహ్యభాగం ఏర్పడును. ఇది ఒక అపరిమిత ప్రాంతంను సూచించును.

9.3.3 వృత్త చాపం



$\overline{AB}$ వృత్తం యొక్క ఒక చాపం A మరియు B బిందువులను విడిచి వృత్తంపై 'C' మరొక బిందువు తీసుకొనుము. వృత్తం యొక్క ACB భాగంను వృత్తం యొక్క ఒక చాపం అందురు. దీనిని $\overset{\frown}{ACB}$ గుర్తు ద్వారా తెలియజేయుదురు. $\overline{AB}$ జ్యాకకు ఏ ప్రక్క C బిందువు గలదో దాని వ్యతిరేక ప్రక్క వృత్తంపై ఒక బిందువు 'D' తీసుకొనుము. $\overset{\frown}{ADB}$ మరో చాపం అగును. $\overset{\frown}{ACB}$ మరియు $\overset{\frown}{ADB}$ రెండు చాపాలు పరస్పరం వ్యతిరేక చాపాలగును. చిత్రంలో $\overset{\frown}{ACB}$ ఒక చిన్న చాపం మరియు $\overset{\frown}{ADB}$ ఒక పెద్ద చాపం అగును. $\overset{\frown}{ACB}$ మరియు $\overset{\frown}{ADB}$ రెండు చాపాలకు A మరియు B రెండు సాధారణ చివరి బిందువు లగును. చిత్రంలో గల వృత్తంను ACB లేక CBD లేక BCD పేరు పెట్టవచ్చును. అనగా వృత్తంపై గల మూడు బిందువుల ద్వారా వృత్తం పేరు పెట్టబడును.

సమాధానాలు రాయండి.

క) $\overset{\frown}{DAC}$, $\overset{\frown}{DBC}$ ________ మరియు ________ వృత్తం యొక్క చాపాలు.

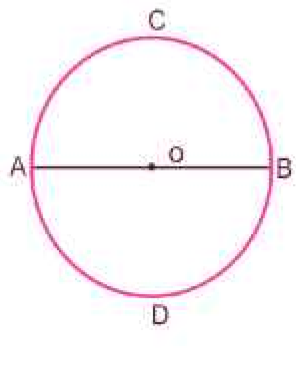
ఖ) $\overset{\frown}{DBC}$ చాపం యొక్క ________ మరియు ________ రెండు చివరి బిందువులు.

గ) $\overset{\frown}{ADB}$ చాపం మరియు ________ చాపం కలియుట వల్ల వృత్తం ఏర్పడును.

ఘ) $\overset{\frown}{ACB}$ చాపం యొక్క A బిందువు మరియు ________ బిందువులను విడిచి అన్ని బిందువులు చాపం యొక్క అంతర బిందువు లగును.

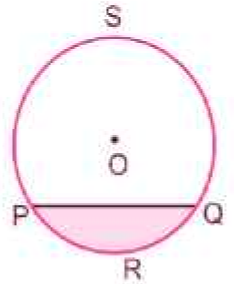
అర్ధవృత్తం

వృత్తం యొక్క ఒక వ్యాసం వృత్తంనకు ఏ రెండు భాగాలుగా చేయునో, ఆ రెండింటిలో ప్రతీ భాగాన్ని అర్ధవృత్తం అందురు.



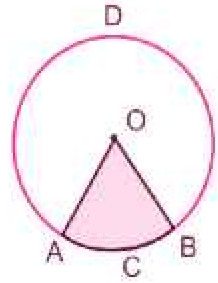
$\overline{AB}$ వృత్తం యొక్క వ్యాసం $\overset{\frown}{ACB}$ మరియు $\overset{\frown}{ADB}$ రెండు అర్ధవృత్తాలు. అనగా వృత్తవ్యాసం వృత్తంనకు రెండు అర్ధవృత్తాలుగా చేయును. ప్రతీ చాపంనకు ఒక పొడవు ఉండును. $\overset{\frown}{ACB}$ మరియు $\overset{\frown}{ADB}$ రెండు చాపాల పొడవు సమానం. $\overset{\frown}{ACB}$ మరియు $\overset{\frown}{ADB}$ రెండు చాపాల పొడవుల మొత్తం వృత్తం పొడవుతో సమానం. వృత్తం యొక్క మొత్తం పొడవును వృత్త పరిధి లేక వృత్త చుట్టుకొలత అందురు.

వృత్తఖండం



ప్రక్క చిత్రంలో $\overline{PQ}$ జ్యా మరియు $\overset{\frown}{ARQ}$ చాపం ద్వారా ఏర్పడిన దానిని వృత్తఖండం అందురు. అదే విధంగా $\overline{PQ}$ జ్యా మరియు $\overset{\frown}{PSQ}$ చాపం ద్వారా మరొక వృత్త ఖండం ఏర్పడును. అందువలన ఏదైనా వృత్తం యొక్క ఒక చాపం మరియు దీనితో కలిసివున్న జ్యా ద్వారా ఏర్పడిన దానిని వృత్తం యొక్క ఒక వృత్తఖండం అందురు.

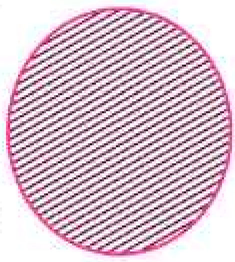
వృత్త సెక్టార్



ప్రక్క చిత్రంలో $\overline{OA}$ మరియు $\overline{OB}$ రెండు వ్యాసార్ధాలు. A మరియు B బిందువు ద్వారా $\overset{\frown}{ACB}$ మరియు $\overset{\frown}{ADB}$ రెండు చాపాలు ఏర్పడును. $\overset{\frown}{ACB}$ చాపం, $\overline{OA}$ వ్యాసార్ధం మరియు $\overline{OB}$ వ్యాసార్ధం ద్వారా ఏర్పడిన దానిని వృత్త సెక్టార్ అని అందురు. $\angle AOB$ దీని యొక్క కేంద్రకోణము అదే విధంగా $\overset{\frown}{ADB}$ చాపం, $\overline{OA}$ వ్యాసార్ధం మరియు $\overline{OB}$ వ్యాసార్ధం ద్వారా ఏర్పడిన చిత్రంను కూడా ఒక సెక్టార్ అందురు.

ఒక చాపం మరియు దాని చివరి బిందువుల మధ్య నుండి ఏర్పడిన రెండు వ్యాసార్ధాల ద్వారా ఏర్పడిన చిత్రంను ఒక వృత్త సెక్టార్ అందురు.

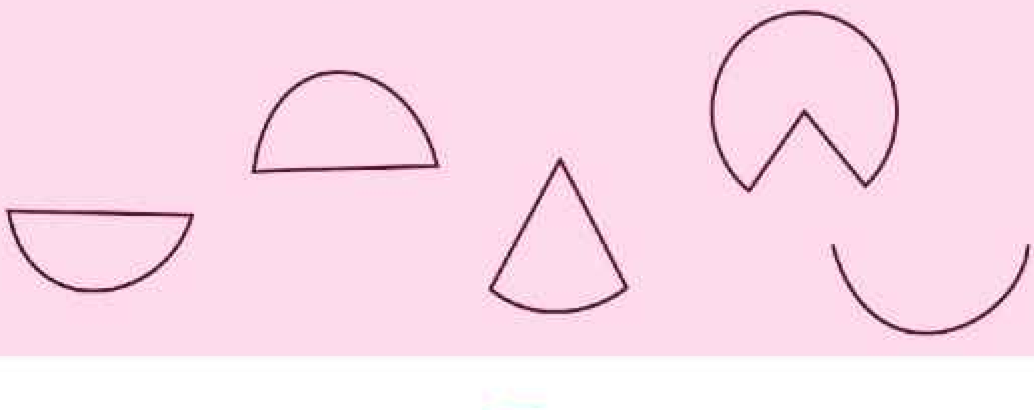
వృత్తాకార క్షేత్రం



త్రిభుజాకార క్షేత్రం మరియు చతుర్భుజాకార క్షేత్రం వలె వృత్తం మరియు వృత్తం లోపల భాగంను కలిపి వృత్తాకార క్షేత్రం ఏర్పడును. ఈ చిత్రంను పరిశీలించండి.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- క్రింది నీయబడిన చిత్రముల వలె ఒక కాగితంపై స్కేల్ మరియు కంపాస్ ద్వారా వివిధ రకాల చిత్రాలను తయారుచేసి వృత్తఖండం, వృత్త సెక్టార్ మరియు అర్ధవృత్తాలను గుర్తించండి.



అభ్యాసం - 9.6

1. C నకు కేంద్ర బిందువుగా తీసుకొని 4.5 సె.మీ. వ్యాసార్థం గల ఒక వృత్తంను నిర్మించండి. P,Q,R బిందువులను గుర్తించండి. P బిందువు వృత్తం యొక్క అంతరభాగంలో, Q బిందువు వృత్తంపై మరియు R బిందువు వృత్తం యొక్క బాహ్యభాగంలో ఉండును.

2. 'O' నకు కేంద్రబిందువుగా తీసుకొని 4 సె.మీ. వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తంను నిర్మించండి. $\overline{AB}$ పేరు గల ఒక జ్యాను నిర్మించండి. చిన్న చాపంపై ఒక బిందువు 'X' గుర్తించండి.

3. క్రింది వాటిలో సరియైన వాటి ప్రక్కన (✓) గుర్తు మరియు తప్పైన వాటి ప్రక్కన (×) గుర్తును పెట్టండి.

క) వృత్తం యొక్క ప్రతీ వ్యాసార్థం ఒక జ్యా అగును.

ఖ) వృత్తం యొక్క ప్రతీ వ్యాసం ఒక జ్యా అగును.

గ) వృత్తం యొక్క ప్రతీ జ్యా కేంద్రం వద్ద సమద్విఖండన అగును.

ఘ) వృత్తం యొక్క ప్రతీ జ్యా ఒక రేఖాఖండ మగును. దాని రెండు చివరి బిందువులు వృత్తంపై ఉండును.

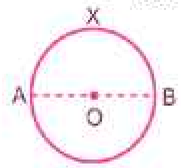
ఙ) ఒక వృత్తం యొక్క ప్రతీ వ్యాసం యొక్క మధ్య బిందువు వృత్తకేంద్ర మగును.

4. 'O' నకు కేంద్రంగా తీసుకొని 3.7 సె.మీ. వ్యాసార్థంతో ఒక వృత్తంను నిర్మించండి. ప్రొట్రాక్టర్‌ను ఉపయోగించి ఒక వృత్త సెక్టార్‌ను నిర్మించండి. దాని కేంద్రకోణ పరిమాణం 72°.

5. ఖాళీలను పూరించండి. (<,> గుర్తులలో సరియైన దానిని ఉపయోగించి)

క) OP ________ PQ, O వృత్త కేంద్రం, P బిందువు వృత్తంపై మరియు Q బిందువు వృత్త అంతర భాగంలో ఉండును.

ఖ) OP ________ PQ వృత్త కేంద్రం, P బిందువు వృత్తంపై మరియు R బిందువు వృత్త బాహ్యభాగంలో ఉండును.



గ) AXB యొక్క పొడవు ________ అర్థవృత్తం పొడవు అగును.

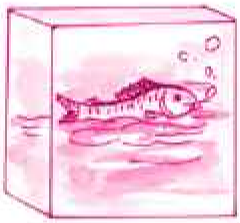
9.4. త్రిమాత్రిక ఆకారం గల పదార్థాలు

మీరు నిత్యజీవితంలో చూస్తున్న కొన్ని పదార్థాల ఆకారం గూర్చి ఆలోచన చేయడమైనది.

పెట్టె లేక ఇటుకను మీరు చూస్తున్నారు. ఇది కుడి ఎడమలకు, క్రిందకు పైకి, ముందు నుండి వెనుకకు వ్యాప్తి చెంది వున్నది. మిగిలిన వస్తువుల చిత్రములలో బాక్సు వలె కుడి ఎడమ, పైకి-క్రిందకి మరియు ముందు వెనుకలకు వ్యాప్తి చెందినవి. అందువలన వాటిని త్రిమాత్రిక వస్తువులు లేక ఘన వస్తువులని అందురు.

9.4.1. దీర్ఘఘనము (CUBOID)

ఘన పదార్థాలను రెండు భాగాలుగా విభజించ వచ్చును. అవి సమతలం గల ఘన పదార్థాలు మరియు వక్రతలం గల ఘన పదార్థాలు, కర్రపెట్టి, అగ్గిపెట్టి, పుస్తకం, అల్మిర, లుడ్డుపిక్క మొదలైనవి ఒకొక్క సమతలం గల ఘన పదార్థాలు. వీటిని దీర్ఘఘనాలు అని అందురు.



వీటికి పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు గలదు. ఒక దీర్ఘఘనం యొక్క కొన్ని భాగాలను క్రింద ఇవ్వడమైనది.

క) తలాలు

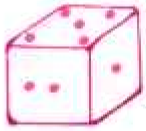
ఒక దీర్ఘఘనంనకు ఆరు దీర్ఘచతురస్రకారపు తలాలు ఉండును. వ్యతిరేక తలాలు ఒకే రకం మరియు సమాన కొలత గలవి.

ఖ) అంచులు

బొమ్మలు చూడండి. రెండు తలాలు కలిసిన స్థానాలను పరిశీలించండి వీటిని దీర్ఘఘనం యొక్క అంచులు అందురు. ప్రతీ అంచు ఒక సరళరేఖ అగును. ఒక దీర్ఘఘనంనకు 12 అంచులు ఉండును.

గ) శీర్షబిందువులు

బాక్సు బొమ్మ యొక్క పై భాగంను చూడండి. దీని యొక్క ప్రతీ శీర్షబిందువు (లేక చివరి బిందువు)లను పరిశీలించండి. ప్రతీ శీర్షబిందువు వద్ద మూడు అంచులు కలియుచున్నవి. ఈ శీర్షబిందువులను దీర్ఘఘనం యొక్క శీర్షబిందువులు అందురు. ఈ విధంగా ఒక దీర్ఘఘనంనకు 8 శీర్షబిందువులు ఉండును.

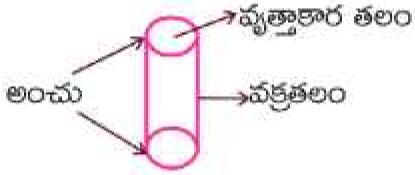


లుడ్డుపిక్కను పరిశీలించండి. ఇది ఒక దీర్ఘఘనం అగును. దీని యొక్క పొడవు వెడల్పు మరియు ఎత్తులు సమానం. ఇది ఒక ప్రత్యేక విధమైన దీర్ఘఘనం. అందువలన ఈ విధమైన దీర్ఘఘనంను ఒక సమఘనం అందురు. దీర్ఘఘనం వలె దీనికి ఆరు తలాలు, 12 అంచులు మరియు 8 శీర్షబిందువలు ఉండును. దీని తలాలు సమచతురస్రకారంలో ఉండును.

ఏ దీర్ఘఘనం యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు సమానంగా ఉండునో దానిని ఒక సమఘనం అందురు.

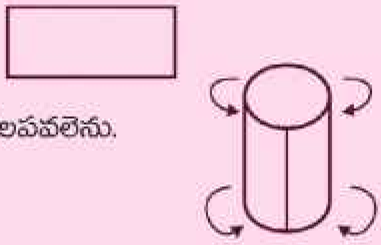
9.4.2. స్థూపము (CYLINDER)

బొమ్మలను పరిశీలించండి. తిన్నని గొట్టం, గాస్ సిలెండర్ మరియు నూనె గల టిన్‌డబ్బా ఒకొక్క సిలెండర్ ఆకారం అగును.



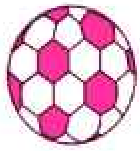
స్థూపము లేక సిలెండర్‌నకు ఒక వక్రతలము మరియు రెండు వృత్తాకార తలాలు ఉండును. సిలెండర్ యొక్క రెండు చివరలందు రెండు వృత్తాకార అంచులు ఉండును. సిలెండర్‌నకు శీర్షబిందువులు ఉండవు.

స్వయంగా చేసి చూడండి



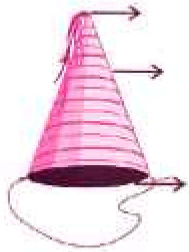
- దీర్ఘచతురస్రకారపు ఒక కాగితంనకు తీసుకొనుము.
- బొమ్మలో చూపినట్లు కాగితంను చుట్టి రెండు అంచులను కలపవలెను.
- రెండు అంచులను అల్పినలతో లేక గమ్ ద్వారా కలపండి.
- ప్రస్తుతం కాగితం ఏ ఆకారం అయ్యెను మరియు అది ఏ రకమైన ఆకృతి అగును ?

9.4.3. గోళము (SPHERE)



ప్రక్కన గల బంతి బొమ్మను పరిశీలించండి. ఈ విధమైన ఆకృతిని గోళము అని అందురు. దీనికి ఒక వక్రతలం ఉండును. గోళమునకు శీర్షబిందువు లేక అంచులు ఉండవు.

9.4.4. శంఖువు (CONE)



ప్రక్క బొమ్మ క కోన్ లేక శంఖువు అగును. దీనికి ఒక వృత్తాకార తలం మరియు ఒక వక్రతలం ఉండును. ఒక వృత్తాకార అంచు కూడా ఉండును. ఒకే ఒక శీర్షబిందువు ఉండును. ధాన్యము, పెసలు మొత్తలైన వాటిని లేక కొంత ఎండిన ఇసుకను ఒక దగ్గర ఉంచినచో అది ఒక శంఖువుగా ఏర్పడును. స్వయంగా చేసి చూడండి.

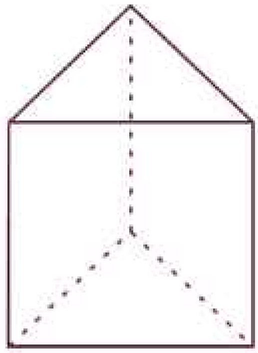
మీ పరిసరాలలో ఎచ్చటెచ్చట శంఖువు ఆకారాలు చూస్తున్నారో రాయండి.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- ఒక కాగితంపై కంపాస్ సహాయంతో వృత్తంను నిర్మించండి. (చిత్రం (క) వలె)

- ఆ వృత్తంలో రెండు వ్యాసార్థాలను నిర్మించండి. (చిత్రం (ఖ) వలె) మరియు ఆ వ్యాసార్థాలను కట్ చేయుము. చిత్రం (ఖ) వలె ఒక సెక్టార్ లభించును.
- సెక్టార్‌ను మెల్లమెల్లగా చుట్టి తిన్నని అంచులను దగ్గరగా చేసి కలపండి. (చిత్రం (గ) వలె)
- రెండు అంచులను గమ్ సహాయంతో జత చేయండి. ప్రస్తుతం ఏ విధమైన ఆకృతము పొందిరి రాయండి.

9.4.3. త్రిభుజాకార పట్టకము (PRISM)

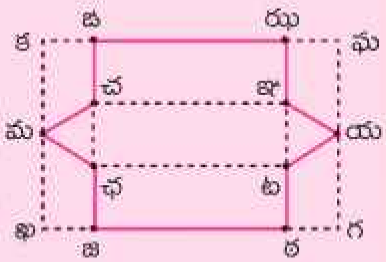


ప్రక్క గల బొమ్మను పరిశీలించండి. ఇది ఒక పట్టకము. దీని యొక్క రెండు తలాలు త్రిభుజాకార తలాలు. అందువలన దీనిని త్రిభుజాకార పట్టకము అని అందురు. రెండు త్రిభుజాకార తలములలో ఏది క్రిందకు ఉండునో దానిని పట్టకము యొక్క భూమి లేక ఆకారం అందురు. పట్టకము యొక్క రెండు త్రిభుజాకార తలాలు సమఆకారం గలవి. మిగిలిన తలాలు దీర్ఘచతురస్రకారపు తలాలు. దీనికి నాలుగు దీర్ఘచతురస్రకారపు తలాలు గలవు.

ఒక త్రిభుజాకారం గల పట్టకమును 6 శీర్షబిందువులు, 3 దీర్ఘచతురస్రకారపు తలాలు, 2 త్రిభుజాకార తలాలు మరియు 9 అంచులు ఉండును.

స్వయంగా చేసి చూడండి

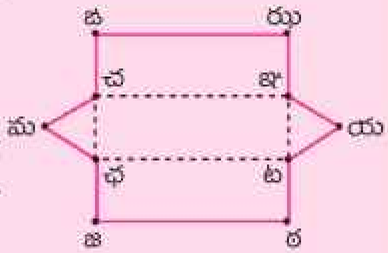
- ప్రక్కన గల బొమ్మను చూడండి. కఖగఘం వలె దీర్ఘచతురస్రకారపు కాగితంను తీసుకొండి.



(A)

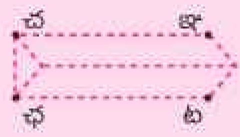
- కఖ చివరల నుండి మరియు గఘ చివరల నుండి సమాన దూరంలో టజ మరియు ఝఠ సరళరేఖలను గీయండి. టజ మరియు ఝఠ రెండింటిని సమాన మూడు భాగాలు చేయాలి. కఖ అంచుపై 'మ' బిందువు మరియు గఘ అంచుపై 'య' బిందువును గుర్తించండి.

  అనగా మచ = మఛ = చఛచ = ఞట = ఞయ = టయ అగును.



(B)

- ప్రస్తుతం జచ మరియు చమ గీతను కట్ చేయండి. మఛ, ఛజ గీతను కట్ చేయండి. ఝఞ మరియుఞయ గీతను కట్ చేయండి మరియు ఠట మరియు ఞయ గీతలను కట్ చేయండి. ప్రస్తుతం చిత్రం (A) వలె ఆకారం మనకు లభించును. ఆ తరువాత చఞ మరియు ఛట గీతల వద్ద కాగితంను మడత పెట్టండి. ఞఝ మరియు జఠ అంచులు రెండు పరస్పరం కలియును. ఆ రెండు చివరలను గమ్ సహాయంతో కలపండి.

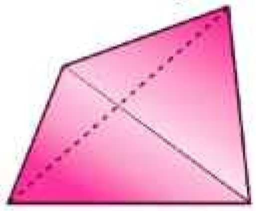


(C)

- ఆ తరువాత మచఛ భాగంను చఛ గీత వద్ద మడత పెట్టండి మరియు ఞటయ భాగంను ఞట గీత వద్ద మడత పెట్టండి.
- చిత్రం (A) వలె ఆకృతి లభించును. ఏ విధమైన ఆకృతిని పొందిరి ?

9.4.6. పిరమిడ్ (PYRAMID)

ప్రక్కన గల బొమ్మ ఒక పిరమిడ్. దీని యొక్క భూమి ఒక త్రిభుజం. అందువలన దీనిని త్రిభుజాకార పిరమిడ్ అందురు. దీనిని టెట్రాహెడ్రాన్ అని కూడా అందురు. కఖగ తలంను పిరమిడ్ యొక్క భూమి అందురు.



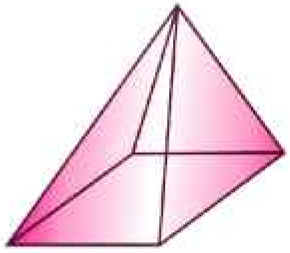
బొమ్మను చూచి చెప్పండి.

క) త్రిభుజాకార పిరమిడ్ యొక్క తలాలు ఎన్ని ?

ఖ) త్రిభుజాకార పిరమిడ్ యొక్క అంచులు ఎన్ని ?

గ) దీని యొక్క శీర్షాలు ఎన్ని ?

ప్రక్క చిత్రంను పరిశీలించండి. ఇది ఒక చతుర్భుజాకారపు పిరమిడ్. దీని యొక్క భూమి ఒక సమచతురస్రం. కఖగఘ తలంను ఈ పిరమిడ్ యొక్క భూమి అందురు. దీనిలో 4 తలాలు, 8 అంచులు మరియు ఒక శీర్షబిందువు ఉండును.



ఈ క్రింది వలె ఒక పట్టికను తయారుచేసి ఖాళీలను జవాబులను రాయండి.

ఆకృతి పేరు	తలాల సంఖ్య	అంచుల సంఖ్య	శీర్షాల సంఖ్య
దీర్ఘఘనం			
సమఘనం			
స్థూపం			
గోళము			
శంఖువు			
పట్టకము			

అభ్యాసం -9.7

1. ప్రతీదానికి రెండేసి ఉదాహరణ లివ్వండి.

   దీర్ఘఘనం, సమఘనం, గోళము, పట్టకము, స్థూపము, శంఖువు

2. ఏ రకమైన ఆకృతి అగునో రాయండి.

   క) మీ యొక్క జ్యామితి బాక్సు ఖ) ఒక ఇటుక

   గ) అగ్గిపెట్టె ఘ) ఒక రూల్‌కర్ర

   ఙ) ఒక లడ్డుపిక్క చ) క్రికెట్ బాల్

పదివ అధ్యాయం

బీజగణిత పరిచయం

10.1 పరిచయం

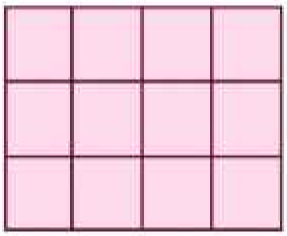
మనం ఇప్పటి వరకు సంఖ్యలను సంబంధించిన వివిధ లెక్కలను చేసాం. సంఖ్యలు తయారగుటకు మూలం అంకెలు. వివిధ ప్రక్రియలను ఉపయోగించుట ద్వారా సంఖ్యలను ఏ విధంగా మనం ఉపయోగించ వచ్చునో తెలుసుకున్నాం.

సంఖ్యలతో పాటు సంకేతాలను (గుర్తులు) ఉపయోగించి వివిధ ప్రక్రియల ద్వారా ఏ విధంగా సంఖ్యలను వాడవచ్చునో ప్రస్తుతం తెలుసుకుందాం. a,b,c .... మొదలైన అక్షరాలను మనం సంఖ్యల ద్వారా గుర్తులుగా ఉపయోగించగలం. సంఖ్యలతో పాటుఅ గుర్తులను ఉపయోగించి వివిధ గణిత ప్రక్రియలను ఉపయోగించు విషయంను బీజగణితం అందురు.

10.1.1. బీజగణితం అనగా నేమి ?

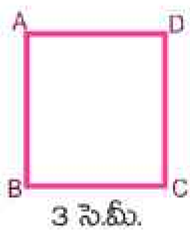
మనక తెలుసు,	5 + 5 = 5 x 2 = 2 x 5
	3 + 3 = 3 x 2 = 2 x 3
అదే విధంగా,	a + a = a x 2 = 2 x a
	3 (4 + 5) = 3 x 4 + 3 x 5
	2 (6 + 4) = 2 x 6 + 2 x 4
అదే విధంగా,	a (b + c) = a x b + a x c

◆ ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 4 యూనిట్లు మరియు వెడల్పు 3 యూనిట్లు అయిన
దాని వైశాల్యం = 4 X 3 చదరపు యూనిట్లు
అదే విధంగా ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు P మరియు వెడల్పు Q యూనిట్లు అయిన
దాని వైశాల్యం = P X Q చ.యూనిట్లు

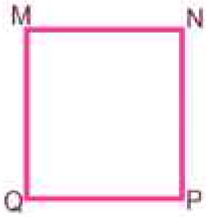


ఉదాహరణ - 1

క) ప్రక్క చిత్రంలో A ఒక సమచతురస్రం, దాని ఒక భుజం పొడవు 3 సెం.మీ.
అయిన దాని చుట్టుకొలత = AB+BC+CD+DA = (3+3+3+3) సె.మీ.
= 4 X 3 సె.మీ. = 12 సె.మీ.



ఖ) అదే విధంగా ఒక సమచతురస్రం యొక్క ఒక భుజం పొడవు 4 సె.మీ. అయిన



MNPQ సమచతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత = MN+NP+PQ+QM

= (4+4+4+4+) సె.మీ.

= 4 X 4 సె.మీ. = 16 సె.మీ.

గ) ఒక సమచతురస్రం యొక్క భుజం పొడవు 6 సె.మీ. అయిన

దాని చుట్టుకొలత = (6+6+6+6) సె.మీ.

= (4 X 6) సె.మీ. = 24 సె.మీ.

ఆలోచించిన పై మూడు ఉదాహరణ నుండి లభించిన ఫలితాలను ఈ క్రింది పట్టికలో రాద్దాం.

భుజం పొడవు	చుట్టుకొలత
3 సె.మీ. 12 సె.మీ.	
4 సె.మీ. 14 సె.మీ.	
6 సె.మీ. 24 సె.మీ.	

పరిశీలించండి

వేరు వేరు ఆకారంలు గల సమచతురస్రంల చుట్టుకొలత దాని భుజంనకు 4 వంతులు.

అనగా, సమచతురస్రం చుట్టుకొలత = 4 X భుజం పొడవు

ఒక సమచతురస్రం యొక్క ప్రతీ భుజం పొడవు a సె.మీ. మరియు చుట్టుకొలత P సె.మీ.గా తీసుకున్నచో, $P = 4 \times a$ గా రాయవచ్చును.

ఈ వాక్యం ఒక సమచతురస్రం యొక్క భుజం పొడవు మరియు దాని చుట్టుకొలత మధ్య గల సంబంధంను తెలుపును.

- ప్రస్తుతం $a = 3$ తీసుకున్నచో, చుట్టుకొలత $P = a \times a$

  $= 4 \times 3 = 12$ సె.మీ. అగును.

- సమచతురస్రం భుజం $a = 4$ తీసుకున్నచో చుట్టుకొలత $P = 4 \times a$

  $= 4 \times 4 = 16$ సె.మీ.

అందువలన పైన గల $P = 4 \times a$ ఒక గణిత సూత్రంను సాధారణంగా లేక విశృతంగా రాయడమైనది.

సంఖ్యా గణితంలో సాధారణ లేక విశృతంగా వ్రాయు దానిని బీజగణితం అని అందురు.

10.2. చలరాశి

ముందు ఆలోచనలో మనం చూశాం, $P = 4 \times a$

దీనిలో 'a' మరియు 'P' రెండింటి విలువలు మారుచుండును. అనగా a విలువ వేరుగా తీసుకున్నచో P విలువ వేరుగా వచ్చును. అందువలన 'a' మరియు 'P' రెండు కూడా మారుచుండును.

ఏ గుర్తులు మారుచుండునో వాటిని 'చలరాశులు' లేక చలనం అందురు.

ఇచ్చట 'a" మరియు 'P' రెండు కూడా ఒకొక్క చలరాశి అగును.

అదే విధంగా మరొక ఉదాహరణను క్రింద ఇవ్వడమైనది.

ఉదాహరణ - 2

ఒక వ్యక్తి గంటకు 30 కి.మీ. వేగంతో స్కూటర్‌ను నడిపించినచో అతను 4 గంటలలో ఎంత దూరంను అతిక్రమించును.

వ్యక్తి 1 గంటలో 30 కి.మీ. దూరం వెల్లును.

4 గంటలలో అతను వెల్లిన దూరం = 30 కి.మీ. X 4 = 120 కి.మీ.

దీనిలో మనం చూశాం వెల్లిన దూరం = గంటకు 30 కి.మీ. X 4 గంటలు

వేరే విధంగా, అతిక్రమించిన దూరం = వేగం X సమయం

వేగం కొరకు 'S' సమయం కొరకు 't' మరియు దూరం కొరకు 'd' గుర్తులను ఉపయోగించినచో పై వాక్యం లేక సంబంధంను మనం ఏ విధంగా రాయగలం ?

$$d = s \times t$$

ఇది కూడా ఒక బీజగణిత సంబంధం యొక్క సాధారణ లేక వికృత రూపం ఇచ్చట s,t మరియు d ప్రతీది. ఒకొక్క చలరాశి అగును.

పై రెండు ఉదాహరణలలో మనం రెండు వేరు వేరు సూత్రాలను పొందాం.

P (సమచతురస్ర చుట్టుకొలత) = 4 X a (భుజం పొడవు)

d (దూరం) = s (వేగం) X t (సమయం)

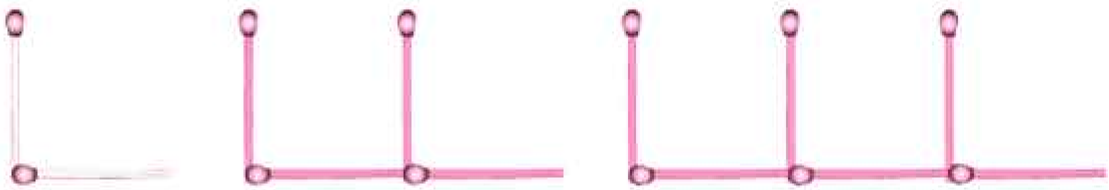
రండి, చలరాశులను తెలుసుకుందాం.

> **తెలుసా ?**
>
> చలరాశులతో ఏ విధమైన ఒక నిర్దిష్ట విలువ ఉండదు. ఆ రాశులకు 1,2,3,4 మొదలైన ఏ విలువలైనా ఇవ్వగలం చలరాశులను సూచించుటకు ఏదైనా అక్షరం m,n,o,p,q,r..... మొదలైనవి తీసుకొవచ్చు.

ఉదాహరణ - 3

అమీనా మరియు సరిత ఒక వరుసలో అగ్గిపుల్లలను అమర్చి 'L' ఆకారంను తయారు చేయుటకు పూనుకొనిరి. L ఆకారంను తయారు చేయుటకు రెండు అగ్గిపుల్లలు అవసరమయ్యెను.

మొదట అమీనా రెండు పుల్లలను ఉపయోగించి ఒక L అకృతి తయారు చేసెను. (మొదటి చిత్రం)



మొదటి చిత్రం　　రెండువ చిత్రం　　మూడువ చిత్రం

అదే విధంగా సరిత మరో రెండు పుల్లలను తీసుకొని మరో L ను మొదటి దానితో జోడించెను. (రెండుఅవ చిత్రం)

తరువాత సరిత యొక్క ఒక స్నేహితుడు మరో రెండు పుల్లలను తీసుకొని రెండువ దానితో జోడించెను. (మూడువ చిత్రం)

ప్రస్తుతం నీవు చెప్పగలవా, ఏడు 'L' బొమ్మలను తయారు చేయుటకు ఎన్ని అగ్గిపుల్లలు అవసరమగును ?

అమీనా, సరిత మరియు అప్పు కలిసి రెండేసి పుల్లలను తీసుకొని అధికంగా 'L' బొమ్మలను తయారు చేసిరి. రండి ఒక పట్టికను తయారు చేసి దానిలో తయారు చేసిన 'L' సంఖ్య మరియు దాని కొరకు ఉపయోగించిన అగ్గిపుల్లల సంఖ్యలను నింపుదాం.

'L' సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7			
ఉపయోగించిన అగ్గిపుల్లల సంఖ్య	2	4	6	8	10	12	14			

- పై పట్టికలో L సంఖ్య మరియు అది తయారగుటకు అవసరమైన పుల్లల సంఖ్య మధ్యలో ఏ సంపర్కమును చూస్తున్నారు ?

ఒకవేల ఉపయోగించిన పుల్లల సంఖ్యను S మరియు తయారయిన L సంఖ్యలను n గుర్తుచేసుకుంచినచో ఇది ఏ గణిత సూత్రమును వాడవచ్చును ?

మీరు తప్పనిసరిగా S = 2n ను వాడెదరు.

'n' విలువ కొరకు 1,2,3,4.... సంఖ్యలలో ఏదైనా తీసుకొని 'S' యొక్క విలువను కనుగొనగలరు.

చెప్పండి చూద్దాం
50 'L' అక్షరాల కొరకు ఎన్ని అగ్గిపుల్లలు అవసరమగును ?

ఇచ్చట 'n' కొరకు ఏ విధమైన నిర్దిష్ట విలువ లేదు లేక 'S' కొరకు కూడా నిర్దిష్ట విలువ లేదు. n కొరకు ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య తీసుకొని S విలువను కనుగొనవచ్చును. అందువలన ఇచ్చట 'n' మరియు 's' ఒకొక్క చలరాశి అగును.

ప్రస్తుతం మనం ముందు గల ఉదాహరణలలో చెప్పిన సంబంధాలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ - 1	$P=4\times a$	(4 X a ని 4a గా రాయవచ్చు)
ఉదాహరణ - 2	$d=s\times t$	(s X t ని st గా రాయవచ్చు)
ఉదాహరణ - 3	$S=2\times n$	(2 X n ని 2n గా రాయవచ్చు)

వీటిని కూడా ఒకొక్క సూత్రం అని అందురు.

పరిశీలించండి, ప్రతీ ఉదాహరణలో చలరాశి ఒక సంఖ్యతో గుణించబడి ఉన్నది. అనగా 4 X a.

ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

క) ఒక సమచతురస్రం యొక్క ఒక భుజం పొడవు 5 సెం.మీ. అయిన, P = 4 X a సూత్రంను ఉపయోగించి సమచతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత కనుగొనుము.

ఖ) ఒక సైకిల్ నడిపేవాడు ఒక నిమిషంలో 220 మీటర్లు సైకిల్‌ను నడపగలడు. అయిన అతను 8 నిమిషములలో ఎంత దూరంను నడపగలడు.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- ఆకారం గల ఒక బొమ్మ కొరకు అవసరమైన అగ్గిపుల్లల సంఖ్యను ఆలోచించి ఒక సూత్రంను రాయండి. దాని ద్వారా ఏదైనా బొమ్మను తయారు చేయుటకు ఎన్ని అగ్గిపుల్లలు అవసరమో నిర్ణయించ వచ్చును.

  (బొమ్మల సంఖ్య కొరకు n మరియు అగ్గిపుల్లల సంఖ్య కొరకు s ఉపయోగించండి.)
- ఆకారం గల ఒక బొమ్మ కొరకు అవసరమైన అగ్గిపుల్లల సంఖ్యను ఆలోచించచి ఒక సూత్రంను రాయండి. దాని ద్వారా ఏదైనా బొమ్మను చేయునపుడు అవసరమైన అగ్గిపుల్లలు సంఖ్యను నిర్ణయించ వచ్చును.

ముందు గల కొన్ని ఉదాహరణలలో చలరాశితో ఒక సంఖ్య గుణించబడి వున్నది. అనగా 4 X a మొదలైనవి. ప్రస్తుతం ఇది కాకుండా మరో రకం పరిస్థితి గూర్చి తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ - 4 :

సరిత చెప్పెను, అమీనా వద్ద గల సొమ్ము కంటె తన వద్ద అధికంగా 10 రూ.లు ఉండును.

అనగా అమీనా వద్ద ఒక వేళ 5 రూ.లు ఉన్నచో, సరిత వద్ద 15 రూ.లు ఉండును.

అదే విధంగా అమీనా వద్ద 20 రూ.లు ఉన్నచో సరిత వద్ద ఎంత ఉండును ?

నిజానికి అమీనా వద్ద ఎంత గలదో మనకు తెలియదు.

ఒకవేల అమీనా వద్ద 'x' రూ.లు ఉన్నచో సరిత వద్ద గల సొమ్ము 'x + 10'

ఇచ్చట 'x' ఒక చలరాశి అగును. x యొక్క విలువ 1,2,3 .... మొదలైన వాటిలో ఏదైనా ఒక సంఖ్య అగును.

ఇచ్చట x + 10 ఒక పదం. దానిలో A ఒక చలరాశి అగును.

x + 10 నకు ఏ విధంగా చదవగలం ?

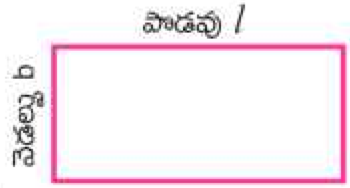
తెలుసా ?

- x + 10 ను సరళము చేయలేం. ఒకవేల x విలువ నిర్ధిష్టంగా వున్న, ఆ పదం విలువ నిర్ధిష్టంగా వచ్చును.
- x + 10 మరియు 10 X x వేరు వేరు పదాలు కారణం xతో 10 కలిపిన x + 10 , కాని xను 10 ద్వారా గుణించిన 10 X x లేక 10x అగును.

జవాబు రాయండి

ఒక విద్యాలయంలో బాలికల సంఖ్య, బాలురు సంఖ్య కంటె 35 అధికం బాలుర సంఖ్య x (చలరాశి) అయిన ఆ విద్యాలయంలో బాలికల సంఖ్య ఎంత అగును ?

- బాలికల సంఖ్యను తెలుసుకొనుటకు సమాసం (సూత్రము)ను రాయండి.
- ఒకవేల బాలుర సంఖ్య 75 అయిన సమాసం (సూత్రము)ను ఉపయోగించి బాలికల సంఖ్యను కనుగొనుము.



10.3. సాధారణ సూత్రము చేయుటలో చలరాశుల ఉపయోగం.

క) రేఖాగణితం మరియు క్షేత్రగణితం

దీర్ఘచతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత = 2 X పొడవు + 2 X వెడల్పు

ఒక చుట్టుకొలతను P, పొడవు మరియు వెడల్పులకు వరుసగా l మరియు b తీసుకొన్నచో, దాని సాధారణ సూత్రం ఏమగును ?

$$P = 2l + 2b$$

ఇచ్చట a మరియు b ఒకొక్క చలరాశి వాటిని ఉపయోగించి ఒక సాధారణ సూత్రంను రాయుట జరిగెను.

ఖ) అంక గణితం

- మీరు ముందు నుండి సంకలన క్రమ వినిమయ, నియమం గూర్చి తెలుసుకున్నారు.

ఈ నియమం ఏవైనా రెండు సంఖ్యల కోసం నిజం. అనగా 8+12=12+8, 25+27=27+25 మొదలైనవి.

ఈ నియమంను సాధారణముగా వ్రాసినచో రెండు చలరాశులు a మరియు bలను ఉపయోగించ వలెను. ప్రస్తుతం ఆ సాధారణ నియమం.

$$a + b = b + a$$

ఇచ్చట a మరియు b రెండు సహజ సంఖ్యలు. సూత్రంను ఈ విధంగా రాయుట ద్వారా ఇది అన్ని సహజ సంఖ్యల జతల కొరకు నిజం అయినది.

- అదే విధంగా గుణఫలం విషయంలో క్రమ వినిమయ నియమంను (స్థిత్యంతర) A గా రాయవచ్చును.
- మీరు ముందుగా సహజ సంఖ్యల యొక్క గుణఫలంలో సహచర ధర్మాలను తెలుసుకున్నారు. ఈ క్రింది దాని ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వడమైనది.

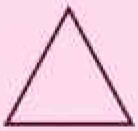
$$3 \times (4 \times 5) = (3 \times 4) \times 5 = 4 \times (3 \times 5),$$

ఇచ్చట 3 కొరకు A, 4 కొరకు A మరియు 5 కొరకు A ఉపయోగించి సహచర నియమాన్ని క్రింది విధంగా రాయవచ్చును.

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = b \times (a \times c)$$

- A మరియు A రెండు సూత్రాలను సాధారణ మరియు విస్తృత విధంగా ఉపయోగించ వచ్చును.

- ఒక సమబాహు త్రిభుజం యొక్క భుజం పొడవును l చలరాశిను తీసుకొని దీని చుట్టుకొలతను l రూపంలో రాయండి.
- ఒక సుసమ షష్ఠభుజం యొక్క భుజం పొడవును l చలరాశిగా తీసుకొని దీని చుట్టుకొలతను 'l' రూపంలో రాయండి.



బీజగణితం యొక్క చరిత్ర

మన భారతదేశం యొక్క పండిత బ్రహ్మగుప్తుడు (అతని జన్మము 598 (క్రీపూ.లో) "బ్రహ్మగుప్త సిద్ధాంతం" అనే పుస్తకము రచించెను. దీనిని ప్రపంచంలో మొదటి బీజగణిత పుస్తకం అని చెప్పవచ్చును. ఈ పుస్తకంలో సంఖ్యల కోస అజ్ఞాత గుర్తుల ఉపయోగం జరిగింది.

బ్రహ్మగుప్తునికి ముందుగా కూడా భారతీయ పండితులలు సంఖ్యల కోసం గుర్తులను ఉపయోగించిరి. వారు సంఖ్యలు కాకుండా అచ్చులు లేక భీజములు ఉపయోగించి బీజగణిత విషయాలను తెలియ జేసెను.

ఉజ్జయినీ యొక్క 'కంఖ' అనే వ్యక్తి పండిత బ్రహ్మగుప్తుని యొక్క పుస్తకమును అరబ్ దేశం యొక్క బాగ్దాద్ రాజునకు చూపించెను.

ఆ తరువాత బాగ్దాద్‌లో అరబ్ పండితుడు మహమ్మద్ ఇబన్ అల్‌కోహరజ్మ అనేవాడు అశ్‌జీబార్ ఉ యిన్ అల్‌ముగాబాలహ అనే పేరు గల ఒక గణిత పుస్తకంను రచించెను. అందులో అతను సంఖ్యలతో సహ అక్షరాల గుర్తులు లేక భీజాలను ఉపయోగించెను. పై దాని నుండి Algebra అనే పదం ఏర్పడినది. భీజములను ఉపయోగించి గణిత పదాలను రాయడం వల్ల దీని పేరు భీజగణితంగా చెప్పబడును.

తరువాత సమయంలో యురోపీయులు (ఐరోపా) అరబ్ వాళ్ల నుండి భీజగణితంను నేర్చుకొనిరి.

అభ్యాసం - 6.1

1. ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసం, దాని వ్యాసార్థంనకు రెండు వంతులు, వ్యాసం కొరకు d మరియు వ్యాసార్థం కొరకు r తీసుకొని సూత్రంను రాయండి.

సమాధానం, వ్యాసం = 2 X వ్యాసార్థం

$\therefore$ d = 2 X r

ఇచ్చట చలరాశులు ఏమిటి ?

2. బీజములు లేక గుర్తులను ఉపయోగించి ఈ క్రింది వాటిని రాయండి. దేని కోసం ఏఏ గుర్తులను ఉపయోగించిరో రాయండి.

క) సమబాహు త్రిభుజం యొక్క చుట్టుకొలత దాని ప్రతీ భుజంనకు మూడు వంతులు.

ఖ) మీ తరగతిలో పిల్లల సంఖ్య ప్రతీ వరుసలో కూర్చొన్న పిల్లల సంఖ్య మరియు మొత్తం వరుసల గుణఫలంతో సమానం.

గ) ఒక దీర్ఘఘనాకార గది యొక్క ఘనఫలం దాని యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తుల గుణఫలంతో సమానం.

10.4. బీజగణితంలో ముఖ్య గణిత ప్రక్రియలు.

పూర్ణసంఖ్యల యొక్క సంకలన, వ్యవకలన, గుణఫల మరియు భాగఫల ప్రక్రియలను చేసాము. అదే విధంగా బీజములు మరియు సంఖ్యలను తీసుకొని ఈ ప్రక్రియలను చేయడం జరుగును. ఈ ప్రక్రియల యొక్క అని ధర్మాలు మరియు నియమాలు బీజగణిత విషయంలో కూడా నిజం అగును.

10.4.1. సంకలనం

3 మరియు 2 యొక్క మొత్తంను కనుగొనుటకు 3 + 2 = 5గా రాస్తాం. కాని a+5 యొక్క మొత్తం ఎంత ?

ఒకవేళ a యొక్క విలువ 4 అయినచో a మరియు 5ల మొత్తం a+5=4+5=9 అగును.

ఒకవేళ a యొక్క విలువ 6 అయినచో a మరియు 5ల మొత్తం a+5=6+5=11 అగును.

అందువలన a యొక్క విలువ తెలిసినచో a మరియు 5ల మొత్తం ఎంత అగునో నిర్ణయించగలం.

ఒకవేళ a యొక్క విలువ తెలియనిచో a మరియు 5ల మొత్తం a+5 అనగా "a కంటె 5 అధికం" అదే విధంగా "a కంటె b అధికం"ను a+b గా రాయవచ్చు.

అదే విధంగా (a+b) కంటె c అధికంను ఏ విధంగా రాయవచ్చు చెప్పండి. అనగా

ఏదైనా సంఖ్యతో 0ను కలిపిన ఆ మొత్తం ఆ సంఖ్య వచ్చును.

3+3=0, 7+0=7, అదే విధంగా a+0=a

ఈ క్రింది వాటిని ఏ విధంగా రాయగలం ?

a మరియు 4ల మొత్తం

5 కంటె x అధికం

x కంటె y అధికం

$(x+y)$ కంటె 6 అధికం

తెలుసా ?

మనకు తెలుసు 3+4=4+3 దీనిని సంకలన స్థిత్యంతర లేక వినిమయ ధర్మం అందురు.

ఒకవేళ a మరియు b రెండు చలరాశులు అయిన a+b=b+a

10.4.2. వ్యవకలనం

6 నుండి 4ను తీసివేయునపుడు మనం 6-4=2గా రాస్తాం. తీసివేత ఫలితం 2 అగును.

కాని x నుండి 4ను తీసివేసి తీసివేత ఫలితంను మనం x - 4 గా రాయగలం.

x యొక్క విలువ తెలిసినచో మనం x - 4 ఎంత అగునో తెలుసుకోగలం. కాని x విలువ ఇవ్వని యడల "x నుండి 4 తీసిన దాని ఫలితంను x - 4 గా రాయవచ్చును. x - 4 యొక్క అర్థం "x కంటె 4 తక్కువ"

చెప్పండి చూద్దాం
a-b మరియు b-a లు సమానం అగునా ? ఎందుచేత ?

అదే విధంగా a నుండి b ని తీసిన ఫలితం a - b గా రాయవచ్చును.

(a-b)-c రాసినచో తెలుస్తుంది a నుండి b ని తీసి ఆ మొత్తం తీసివేత నుండి మరల c తీసివేయబడెను.

అభ్యాసం - 10.2

1. సంకలన మరియు వ్యవకలన గుర్తులను ఉపయోగించి ఈ క్రింది వాటిని రాయండి.

క) 10 కంటె t తక్కువ

ఖ) m మరియు n ల భేదము (m > n)

గ) z కంటె w తక్కువ

ఘ) p కంటె q అధికం మరియు దాని కంటె r అధికం

ఙ) b కంటె 3 తక్కువ మరియు దాని కంటె c అధికం

చ) m కంటె l తక్కువ మరియు దాని కంటె k అధికం

ఛ) x కంటె y తక్కువ మరియు దాని కంటె z తక్కువ

2. బాబు వద్ద m రూపాయలు గలవు.

బేబి వద్ద అతని కంటె 10 రూపాయలు అధికం కలవు.

అయిన బేబి వద్ద గల మొత్తం సొమ్ము ఎంత ?

3. సీత యొక్క వయసు 15 సంవత్సరాలు గీత ఆమె కంటె y సంవత్సరాలు ఎక్కువ.

రీత వయసు వాళ్ళిదరి మొత్తం వయసు నుండి z సంవత్సరాలు తక్కువ.

అయిన రీత వయసు కొరకు సమానం రాయండి.

y విలువ 5 మరియు z విలువ 2 అయినచో రీత వయసు ఎంత అగును ?

10.4.3. గుణఫలం

మీకు తెలుసు, గుణఫలం అనగా వరుస సంకలనం. 3+3+3+ లేక 4 సంఖ్య గల 3ల మొత్తం = 4 X 3

అదే విధంగా, a+a+a+a లేక 4 సంఖ్య గల a ల మొత్తము = 4 X a

కాని "4 X a" రాసినచో గుణఫలం గుర్తు భీజం 'x' తో కలసి పోవుటచే "4 X a" ను 4a గా రాయవలెను.

అదే విధంగా - b + b + b + b = 4b

c + c + c = 3c

$x + x + x + x + x = 5x$

సంకలన మరియు వ్యవకలన ప్రక్రియలలో రాశుల విలువలు తెలిసినచో సంకలనం మరియు వ్యవకలనం నిర్ణయించగలమో అదే విధంగా ఇచ్చట కూడా భీజముల విలువలను తెలిసినచో గుణఫల విలువలను నిర్ణయించగలం.

వరుసగా a = 5 అయిన 4a = 4 X 5 = 20

y = 2 అయిన 11y = 11 X 2 = 22

p = 10 అయిన 8p = 8 X 10 = 80

ప్రస్తుతం ఒక సంఖ్య మరియు ఒక దాని యొక్క గుణఫలం ఏ విధంగా రాయగలమో మనం తెలుసుకున్నాం. రెండు కూడా భీజములు అయినచో వాటి గుణఫలంను ఏ విధంగా రాయగలం ?

x మరియు y ల గుణఫలం ఎంత ?

x మరియు y ల గుణఫలంను xy లేక yx గా రాయగలం.

xyలో x మరియు y రెండు కూడా xy యొక్క ఉత్పాదనాలు లేక గుణీజాలు.

x మరియు y ల గుణఫలంను xy లేక yx గా రాసినచో a మరియు 4ల గుణఫలంను 4a గా రాయగలం.

> **తెలుసా ?**
>
> 4a ను a4 గా రాయరాదు అదే విధంగా 1 X x ను 1x గా రాయరాదు. దీనిని x గా రాయాలి. x అనగా 1x అని తెలియజేయును.

10.4.4. భాగఫలం

భాగక్రియ, గుణనక్రియనకు వ్యతిరేక ప్రక్రియ కనుక 6 = 2 X 3, వ్యతిరేకముగా మనం రాయవచ్చును.

6 ÷ 2 = 3 మరియు 6 ÷ 3 = 2

అదే విధంగా 2x ÷ 2 = x మరియు 2x ÷ x = 2

$xy \div x = y \qquad xy \div y = x$

మనం 2 ÷ 3ను $\frac{2}{3}$ ఇగా రాస్తాం మరియు "2 బై 3" గా చదువాతం. అదే విధంగా a ÷ 3 ను కూడా $\frac{a}{3}$ గా రాస్తాం. $\frac{a}{3}$ ను "a బై 3"గా లేక a యొక్క మూడువ భాగంగా కూడా చదువుతాం. అందువలన $\frac{x}{4}$ ను x యొక్క నాల్గవ భాగంగా $\frac{b}{9}$ ను b యొక్క తొమ్మిదవ భాగంగా మరియు $\frac{2}{3}$a ను a యొక్క 2 బై 3 భాగంగా అంటాం:

అదే విధంగా x ÷ y ను $\frac{x}{9}$ గా రాస్తాం మరియు "x బై y" గా చదువుతాం.

10.4.5. నాలుగు ప్రక్రియలను సంబంధించిన ప్రశ్న

ఉదాహరణ - 1

మీ వద్ద m రూపాయలు గలవు. మీ అన్నయ్య వద్ద దాని కంటె 5 వంతులు కంటె n రూపాయలు అధికం గలవు. అయిన మీ అన్నయ్య వద్ద గల రూపాయలు ఎన్ని ? అందులో అతను p రూపాయలు ఖర్చు చేసినచో అతని వద్ద ఇంకా ఎన్ని రూపాయలు ఉండును ?

సమాధానం :

మీ వద్ద m రూపాయలు గలవు

దానిని 5 మరియు = m X 5 రూ.లు = 5m రూ.లు

మీ అన్నయ్య వద్ద దాని కంటె n రూ.లు అధికం గలవు.

అయిన అన్నయ్య వద్ద (5m+n) రూ.లు గలవు.

వాటి నుండి అతను p రూ.లు ఖర్చు చేసినచో

అతని వద్ద మిగిలినవి (5m+n-p) రూపాయలు.

ఉదాహరణ - 2 :

సంక్షిప్తంగా రాయండి, a యొక్క 3 బై 5వ భాగం కంటె b యొక్క రెండు బై మూడువ భాగం తక్కువ.

సమాధానం : a యొక్క మూడు బై 5వ భాగం = $\frac{3}{5}a$

b యొక్క రెండు బై మూడువ భాగం = $\frac{2}{3}b$

a యొక్క $\frac{2}{3}$ కంటె b యొక్క $\frac{2}{3}$ భాగం తక్కువ = $\frac{3a}{5} - \frac{2b}{3}$

అభ్యాసం - 10.3

1. బీజముల రూపంలో రాయండి. దేని కొరకు ఏ బీజమును ఉపయోగించినచో రాయండి.

క) ఒక వస్తువు యొక్క అమ్మిన వెల దాని కొన్న వెల మరియు లాభాల మొత్తంతో సమానం.

ఖ) ఒక దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత దాని పొడవును రెండు వంతులు మరియు వెడల్పునకుఅ 2 వంతులు మొత్తంతో సమానం.

గ) ఒక దీర్ఘఘనం యొక్క ఘనఫలం దాని పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తుల గుణఫలంతో సమానం. సూత్రంను రాయండి. ఈ సూత్రతం సహాయంతో 4 మీ. పొడవు, 3 మీ. వెడల్పు మరియు 2 మీ. ఎత్తు గల దీర్ఘఘనం యొక్క ఘనఫలం కనుగొనండి.

2. బీజములు (రాశులు) మరియు సంఖ్యలను ఉపయోగించి ఈ క్రింది సమాసాలలను రాయండి.

క) b యొక్క రెండు వంతులు కంటె c యొక్క 5 వంతులు ఎక్కువ గల సమాసం ఎంత ?

ఖ) x యొక్క మూడు వంతుల కంటె p యొక్క $\frac{1}{4}$ వ భాగం తక్కువ గల సమాసం ఎంత ?

గ) p యొక్క $\frac{5}{6}$ భాగాల కంటె 7 అధికం గల సమాసంను రాయండి.

ఘ) m మరియు n ల మొత్తం కంటె z యొక్క 3 వంతులు తక్కువ గల సమాసంను రాయండి.

ఙ) b మరియు 4ల భాగఫలం కంటె c యొక్క $\frac{3}{4}$ భాగాలు తక్కువ గల సమాసంను రాయండి.

3. బీజములలో గల క్రింది సమాసాలను వాక్యాలలో రాయండి.

క) $3x + 2y$ ఖ) $2a - 7$ గ) $2p + 3q - r$ ఘ) $\frac{3c}{5} + d$

4. ఒక దీర్ఘచతురస్రపు వరండా యొక్క వెడల్పు b మీటర్లు మరియు పొడవు వెడల్పునకు రెండు వంతులు అయిన దాని వైశాల్యం ఎంతో ఆ సూత్రంను ఉపయోగించి 8 మీటర్ల వెడల్పు గల వరండా యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

స్వయంగా చేసి చూడండి

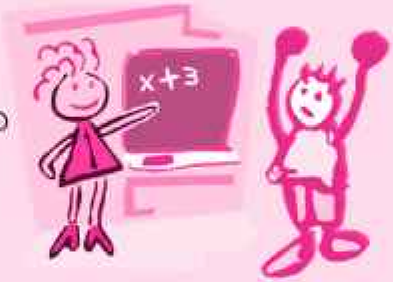
టన్ను మరియు మిన్ను ఒక ఆట ఆడిరి.

- వారం ఒక చలరాశి x మరియు ఒక సంఖ్య 3ను తీసుకొని (ఎన్ని అగునో) సమాసాలను రాయుటకు ఆలోచన చేసిరి. ఆట యొక్క నియమం ఏమనగా నాలుగు గణిత ప్రక్రియలలో ప్రతీసారి కేవలం ఒక ప్రక్రియను ఉపయోగించాలి మరియుఅ ప్రతీ సమాసంలో తప్పని సరిగా ఉండాలి.

  నీవు వారికి సహాయం చేయగలమా ?

  టన్ను ఆలోచించెను $(x+3)$, మిన్ను వెంటనే $(x - 3)$ అని చెప్పెను. టన్ను మళ్ళీ చెప్పెను $3x$ మిన్ను చెప్పెను $\frac{x}{3}$ అని.

  ఈ విధంగా కేవలం నాలుగు సమాసాలు అగునా ?



- దీని తరువాత వారు x, 3 మరియు 5లను తీసుకొని ఆడిరి. దీనిలో నియమం ఏమనగా ప్రతీసారి వారు సంకలన మరియు వ్యవకలన ప్రక్రియలలో ఒకటి లేక గుణఫలం మరియు భాగఫలం మధ్యలో ఒకటి తీసుకోవాలి మరియు ప్రతీ సమాసంలో తప్పని సరిగా x ఉండాలి. $x+5$ వలే ఈ సూత్రం వలన ఎన్ని సమాసాలు సంభవం అగును ?

10.5 రాశుల యొక్క ఘాతాలు

మీకు తెలుసు $3 \times 3 = 3^3$ మరియు $4 \times 4 \times 4 = 4^3$ ను మనం 3 యొక్క పరం లేక 3 యొక్క రెండువ ఘాతం మరియు 4^3ను 4 యొక్క మూడు ఘాతం అంటాం. అదే విధంగా

$a \times a = a^2$

$a \times a \times a = a^3$

$a \times a \times a \times a = a^4$

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^8$

$a \times a \times a \times$ .... (20 బిఢ) $= a^{20}$

తెలుసుకొండి

a^2, a^3, a^4 లను ఒకొక్క ఘాతరాశులు అందురు.
a^2, లో a, ను ఆధారం మరియు 2ను ఘాతాంకం అందురు.
a^3, లో a, ఆధారం, 3 ఘాతం మరియు a^{20}, లో a, ఆధారం 20 ఘాతాంకం అగును.

మనం తెలుసుకున్నాం,

- x^a లో x ఆధారం (భూమి) మరియు a ఒక ఘాతాంకం అగును.
- $a^1=a$ ఏదైనా బీజం యొక్క ఘాతం 1 అయినచో ఆ 1 ని రాయకూడదు.

ఉదాహరణ-1 :

ఏది ఆధారం మరియు ఏది ఘాతం అగునో రాయండి.

క) y^7 ఖ) $2x^3$ గ) $\frac{3}{5}b^m$

సమాధానం :

క) y^7 లో ఆధారం y మరియు ఘాతం 7

ఖ) $2x^3$ లో ఆధారం x మరియు ఘాతం 3

గ) $\frac{3}{5}b^m$ లో ఆధారం b మరియు ఘాతం m

చెప్పండి చూద్దాం
ఆధారం a మరియు ఘాతంకం 8 గల రాశి ఎంత ?

ఉదాహరణ-2 :

ఘాతాంక రాశిలోనికి మార్చండి.

క) $x \times x \times x \times z \times z$

ఖ) $7 \times a \times a \times a \times a \times p \times p \times p \times q \times q$

గ) $4 \times m \times m \times$ .... 15 సార్లు $\times n \times n \times$ ..... a సార్లు

సమాధానం :

క) మనకు తెలుసు $x \times x \times x = x^3$

మరియు $z \times z = z^2$

$\therefore x \times x \times x \times z \times z = x^3 \times z^2 = x^3 z^2$

చెప్పండి చూద్దాం
x^3z^2 మరియు z^2x^3 సమానమా ? కారణం చెప్పండి.

ఖ) మనకు తెలుసు $a \times a \times a \times a = a^4$

$p \times p \times p = p^3$

మరియు $q \times q = q^2$

$\therefore 7 \times a \times a \times a \times a \times p \times p \times p \times q \times q = 7 \times a^4 \times p^3 \times q^2 = 7a^4p^3q^2$

గ) మనకు తెలుసు $m \times m \times$ ....15 సార్లు $= m^{15}$

మరియు $n \times n \times$ ......a సార్లు $= n^a$

$\therefore 4 \times m \times m \times$ ..... 15 సార్లు $\times n \times n \times$ ...... a సార్లు

$= 4 \times m^{15} \times n^a = 4m^{15}n^a$

ఉదాహరణ-3

మౌళిక గుణిజాల లబ్ధం రూపంలో రాయండి.

క) $3x^4$ ఖ) $7a^8$ గ) $5p^2q^3$

సమాధానం :

క) $3x^4 = 3 \times x \times x \times x \times x$

ఖ) $7a^8 = 7 \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$

గ) $5p^2q^3 = 5 \times p \times p \times q \times q \times q$

ఉదాహరణ-4

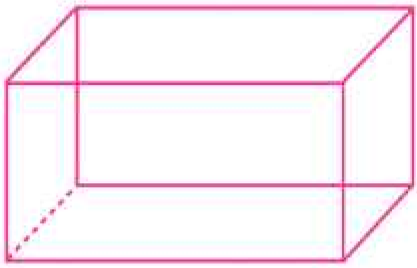
దీర్ఘఘనం యొక్క ఘనఫలం దాని పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తుల లబ్ధంలో సమానం. ఒక దీర్ఘఘనం యొక్క వెడల్పు x సె.మీ., పొడవు, వెడల్పునకు 3 వంతులు మరియు ఎత్తు వెడల్పులో సగం అయిన దాని ఘనఫలం ఎంత ?

సమాధానం :

ఇచ్చిన దీర్ఘఘనం యొక్క వెడల్పు = x సెం.మీ.

పొడవు = 3 X వెడల్పు = 3 X x సె.మీ. = $3x$ సె.మీ.

ఎత్తు = $\frac{1}{2}$ X వెడల్పు = $\frac{1}{2}$ X x సె.మీ. = $\frac{x}{2}$ సె.మీ.



∴ దాని ఘనఫలం = పొడవు X వెడల్పు X ఎత్తు

= $(3x \times x \times \frac{x}{2})$ ఘనపు సె.మీ.

= $\frac{3x^3}{2}$ ఘనపు సె.మీ.

అభ్యాసం - 6.1

1. ఖాళీలను పూరించండి.

క) x^4 లో ఆధారం ______ మరియు ______ ఘాతం

ఖ) $3y^{10}$ లో ఆధారం ______ మరియు ఘాతం ______

గ) m^n లో ఆధారం ______ మరియు ఘాతం ______

ఘ) $\frac{2}{5}p^4q^3$ లో ఆధారం ______ మరియు ఘాతం ______ మరియు ఆధారం ______ యొక్క ఘాతం ______

చెప్పండి చూద్దాం
x^5 ఒక ఘాతం అయిన దీని ఆధారం ఎంత ? మరియు ఘాతం ఎంత ?

2. మౌళిక గుణిజాల లబ్ధం రూపంలో రాయండి.

క) $8a^3$ ఖ) a^5x^3 గ) $9xy^3$ ఘ) $25a^2x^4y^2$

3. ఘాతరాశిలోనికి మార్చండి.

క) $x \times x \times x \times x$

ఖ) $a \times a \times a \times b \times b \times b$

గ) $p \times p \times p \times$ ...... 10 సార్లు

ఘ) $20 \times$ ($m \times m \times$ ...... 7 సార్లు) X (n X n X .... 25 సార్లు)

ఙ) $32 \times$ ($x \times x$ x .... 5 సార్లు) X (y X y X ....8 సార్లు)

4. $4a^3$ మరియు $3a^4$ మధ్య భేదమును చూపించండి.
5. ప్రస్తుతం ఒక రకమైన కీటకాల సంఖ్య x. వారం తరువాత వాటి సంఖ్య y వంతులగును. ఆ విధంగా సంఖ్య పెరిగినచో మూడు వారాల చివరకు కీటకాల సంఖ్య ఎంత అగును ?

10.6. బీజగణిత రాశులు మరియు పదాలు

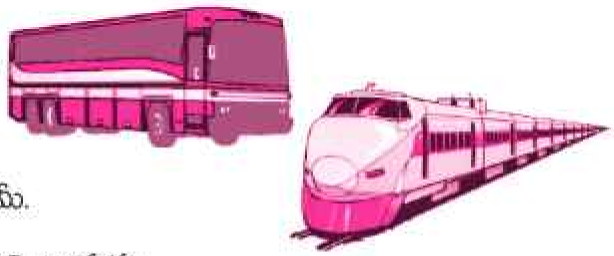
ఆరువ తరగతిలో పిల్లలు తమ విద్యాలయం నుండి బయలుదేరి ఢిల్లీ యాత్రకు వెళ్లిరి. వారు 4 కి.మీ. నడిచి, 3y కి.మీ. బస్సులో మరియు $2x$ కి.మీ. రైల్లో వెళ్లిరి. వారికి మొత్తం ఎంత దూరం వెళ్ల వలసి వచ్చెను ?

నడిచిన దూరం = 4 కి.మీ.

బస్సులో వెళ్లిన దూరం = 3y కి.మీ.

రైల్లో వెళ్లిన దూరం = $2x$ కి.మీ.

మొత్తం దూరం = $(4+3y+2x)$ కి.మీ.



ఇచ్చట $4+3y+2x$ ను ఒక బీజగణిత రాశి అని అందురు.

4, 3y, 2x లను ఆ రాశి యొక్క ఒకొక్క పదం అని అందురు.

అందువలన $4+3y+2x$ ఒక రాశి. దీనిలో 3 పదాలు గలవు.

3a+b ఒక రాశి. దీనిలో రెండు పదాలు గలవు.

a కూడా ఒక రాశి. దీనిలో ఒక పదం గలదు. దీనిని ఏక పదరాశి అని అందురు.

ఈ క్రింది పట్టికలో ఏకపదరాశి, ద్విపదరాశి మరియు బహుపద రాశులను పరిశీలించండి.

ఏకపద రాశులు	ద్విపద రాశులు	బహుపద రాశులు
a	$a+b$	$a+b+c$
$4x$	$4+3x$	$4+3x+7y$
$3m$	$3m+p$	$3m+p-q$

మీరు అదే విధంగా ఏక పదం గల రాశులు, ద్విపద రాశులు, బహుపద రాశులను రెండేసి ఉదాహరణ లివ్వండి.

బీజగణిత రాశులు మరియు వాటి పదాల గూర్చి కొన్ని విషయాలు

- ఒక రాశిలో ఒక పదం ఉండును. ఈ పదం ఒక సంఖ్య లేక ఒక బీజం అగును. 1,2,3,4 మొదలైన సంఖ్యల ధృవ సంఖ్యల కారణం వీటి యొక్క విలువలు నిర్దిష్టంగా ఉండును.
- ఒక రాశిలో ఎక్కువ పదాలు వున్నచో వాటి మధ్య '+' లేక '-' గుర్తులను ఉంచాలి.
- ఒక రాశి కేవలం ధృవ సంఖ్యలను తీసుకొని ఏర్పడ వచ్చును.
- ఒక రాశి కేవలం బీజములు ద్వారా ఏర్పడ వచ్చును.
- ఒక రాశి ధృవ సంఖ్య మరియు బీజముల ద్వారా ఏర్పడ వచ్చును.
- 3, a, a^2, $\frac{a}{2}$ (లేక a ÷ 2), ab (లేక a X b), $\frac{1}{a}$ (లేక 1 ÷ a) మొదలైన రాశులు ఒకొక్క పదంతో ఏర్పడినవి. a X b లేక a ÷ 2 ను రెండుపదాలు గల రాశులని చెప్పలేం.
- పదాల సంఖ్యను అనుసరించి రాశులను ఏకపద రాశి, ద్విపద రాశి, త్రిపద రాశి, చతురపద రాశి మొదలైన పేర్లు పెట్టవచ్చును.
- a - b లో a మొదటి పదం మరియు -b రెండువ పదం. అనగా పదంతో దాని గుర్తు (+ లేక -)ను తీసుకొవలెను. a+c లో మొదటి పదం a మరియు రెండుఅవ పదం +c లేక c అగును. అనగా పదం యొక్క గుర్తు + ఉన్నచో + గుర్తును విడిచి పదమును చెప్పవచ్చును.

అభ్యాసం - 10.5

1. ఏ వాక్యము సరియైనది మరియు ఏ వాక్యము తప్పు అయినదో బ్రాకెట్లలో రాయండి.

క) a X b + c లో
- a X b ఒక పదం [ ]
- b ఒక పదం [ ]
- c ఒక పదం [ ]
- a X b + c ఒక పదం [ ]

ఖ) a ÷ b - p లో
- a ÷ b ఒక పదం [ ]
- b - p ఒక పదం [ ]
- a ఒక పదం మరియు -p మరొక పదం [ ]
- a ÷ b ఒక పదం మరియు -p మరొక పదం [ ]
- a ÷ b మొదటి పదం మరియు p రెండువ పదం [ ]

2. ప్రతీ రాశిలో గల పదాలను వేరు చేసి రాయండి.

క) p + q　　ఖ) -p + r　　గ) p x b + c

ఘ) p + q ÷ r　　ఙ) a ÷ x x b - c x d ÷ y　　చ) $a^2b + 2xy - bc^2$

10.7. పదం యొక్క సహకారి

- మనం 2ab పదం గూర్చి ఆలోచన చేద్దాం.

  2ab = 2 x a x b

  2ab పదంలో

  2, ab యొక్క సహకారి (కారణం [2ab = 2 x ab]

  a, 2b యొక్క సహకారి [కారణం 2ab = a x 2b]

  b, 2a యొక్క సహకారి [కారణం 2ab = b x 2a]

  2a, b యొక్క సహకారి [కారణం 2ab = 2a x b]

  2b, a యొక్క సహకారి [కారణం 2ab = 2b x a]

- అదే విధంగా, $-8xy$ పదంలో $-8y, x$ యొక్క సహకారి

  $-8, xy$ యొక్క సహకారి

  $-8x, y$ యొక్క సహకారి

అనేక సమయాలలో పదంలో గల సంఖ్యను పదం యొక్క సహకారిగా తీసుకొనుట జరుగును. అందుచేత 2ab పదంలో సహకారి 2 అగును మరియు $-8xy$ పదంలో సహకారి -8 అని చెప్పవచ్చును.

> **తెలుసా ?**
>
> ఏదైనా పదం యొక్క సహకారి 1 లేక -1 అయినచో 1ని పదంలో రాయబడదు. అనగా 1a నకు a గా మరియు -1b ను -b గా రాయవచ్చును.

ఒక పదంను రెండు గుణిజాలు లబ్ధం రూపంలో రాసినచో, ఒకటి మరొక దాని యొక్క సహకారి అగును.

ఉదాహరణ- 1 :

$8x^4y - 7x^3yz + \frac{4}{3}x^2yz^2 - 5xyz$

ఈ రాశిలో గల $\frac{4}{3}x^2yz^2$ పదంలో గల సహకారి ఎంత ?

సమాధానం : మనకు తెలుసు $\frac{4}{3}x^2yz^2$ పదం యొక్క సహకారి $\frac{4}{3}$ (సంఖ్యాత్మక గుణిజం)

$\frac{4}{3}x^2yz^2$ పదంలో x^2 యొక్క సహకారి $\frac{4}{3}yz^2$

కారణం $\frac{4}{3}x^2yz^2$ ను $\frac{4}{3}yz^2x^2$ గా రాయవచ్చును.

✎ $3x - y + 5b$ లో గల వేరు వేరు పదాల సహకారి రాయండి.

10.8. సమ మరియు అసమ పదాలు

బీజగణితంలో సమ మరియు అసమ పదాలను గుర్తించుట చాలా అవసరము. క్రింది ఉదాహరణను చూడండి.

క) 2a, 5a, $\frac{2}{7}$aపదాలు సమ పదాలు కారణం ప్రతీదానిలో ఒకే రకమైన బీజం a గలదు మరియు దీని ఘాతం 1 అగును. (సదృశ్య పదాలకు సమ పదాలుగా రాయడం జరిగింది)

ఖ) $xy, 10xy, \frac{5}{11}xy$ ఈ పదాలు సమపదాలు కారణం ప్రతీ పదంలో ఒకే రకమైన బీజము x మరియు y గలదు. x మరియు y ప్రతీ దాని ఘాతం అన్ని పదాలలో 1 అగును.

గ) $3a^2b, \frac{2}{3}a^2b, a^2b$ ఈ పదాలు కూడా సమపదాలు కారణం ప్రతీ దానిలో ఒకే రకమైన బీజము a మరియు b ఉండును. అన్ని పదాలలో a యొక్క ఘాతం 2 మరియు b యొక్క ఘాతం 1 అగును.

పదాలలో రెండు లేక అంతకంటె అధిక సంఖ్య బీజములు వుండి వాటి వరుసలు వేరువేరుగా ఉన్నచో వాటిని కూడా సమ పదాలు అందురు.

క) $ab, -3ba, \frac{1}{5}ba$ సమ పదాలు

ఖ) $2pqr, 15qrp, \frac{5}{3}rpq$ సమ పదాలు

గ) $x^2yz, 3yzx^2, -5yx^2z$ సమ పదాలు

తెలుసుకోండి

ఏ పదాలలో ఒకే రకమైన బీజం లేక ఒక బీజం యొక్క ఒకే రకమైన ఘాతం ఉండునో వాటిని సమపదాలు అందురు. వాటి సంఖ్య సహకారి వేరు కావొచ్చు.

క్రింది అసమ పదాలు పరిశీలించండి.

అసమ పదాలు	కారణం
$x, 2a, \frac{3}{5}p, -4m$	ఈ పదాలలో ఒకే రకమైన బీజములు లేవు.
ab, bc, ca	ఈ పదాలలో ఒకే రకమైన బీజములు లేవు.
xyz. 2axy, 5ayz	ఈ పదాలలో ఒకే రకమైన బీజములు లేవు.
x^2, x^3, x^4	ఒకే రకమైన బీజాలు అయినప్పటికి వాటి ఘాతాలు వేరు.

ఏ పదాలలో వివిధ రకాల బీజములు లేక ఒకే రకమైన బీజం యొక్క వేరు వేరు ఘాతాలు ఉన్నచో వాటిని అసమ పదాలు అని అందురు.

రండి సమ మరియు అసమ పదాలను గుర్తించుటకు కొన్ని ప్రశ్నలను సమాధానం చేద్దాం.

ఉదాహరణ-1

క్రింది బీజగణిత రాశులలో సమపదాలను ఎంచి ప్రతీ దాని యొక్క సంఖ్య సహకారిని రాయండి.

$2x - xy + 3yx + 8x - 3x + xyz$

సమాధానం : ఇచ్చిన బీజగణిత రాశిలో

$2x, 8x, -3x$ సమ పదాలు, వాటి సంఖ్య సహకారినిలు వరుసగా 2,8 మరియు -3.

మరల $-xy, 3yx$ సమ పదాలు వాటి సంఖ్య సహకారినిలు వరుసగా -1 మరియు 3

ఈ రాశిలో $2x, -xy$ అసమపదాలు xyz మిగిలిన వాటికి అసమ బీజాలు.

ఉదాహరణ-2 : బీజగణిత రాశులలో గల సమ మరియు అసమ పదాలను ఒకటిగా చేసి అమర్చండి.

$$a + 2b - ab - \frac{1}{2}a + 3ba + 5a - b$$

సమాధానం : ఇచ్చిన బీజగణిత రాశిలో

$a, -\frac{1}{2}a, 5a$ సమపదాలు

$2b, -b$ సమపదాలు

మరియు $-ab, 3ba$ సమపదాలు

> తెలుసా ?
> ab మరియు ba పదాలు సమపదాలు abc, bca మరియు cab పదాలు కూడా సమపదాలు అందురు.

సమపదాలను ఒకటి చేసి అమర్చి రాసినచో, ఆ రాశి $a + 5a - \frac{1}{2}a + 2b - b - ab + 3ba$ అగును.

అభ్యాసం - 10.6

1. ఈ క్రింది పదాల యొక్క సంఖ్యాత్మక సహకారి రాయండి.

   $3y, \quad \frac{5}{7}p, \quad -4ab, \quad y^2, \quad -abc, \quad 23x^3y^2$

2. ఈ క్రింది బీజగణిత రాశులలో గల వేరు వేరు పదాల యొక్క సంఖ్య సహకారి రాయండి.

   క) $ab - 2bc + 7ca$ ఖ) $x - \frac{xy}{3} + \frac{3yz}{4}$

3. కారణంతో సహ ఏ జత పదాలు సమ మరియు అసమ పదాలగునో రాయండి.

   క) $3x, 7x$ ఖ) $5y, 5z$ గ) $2ab, \frac{2}{3}ba$

   ఘ) $6pq, 6q$ ఙ) $\frac{1}{2}a^3, a^3$

4. సమపదాలను ఒకటి చేసి ఈ క్రింది రాశులను అమర్చి రాయండి.

   క) $a-3b-4a+2b+7a$

   ఖ) $5p + 2pq - 4p + 7qr - 3pq + 5rq - \frac{1}{2}qp$

   గ) $xyz - xy + yz + zxy - 35yzx - 3zy$

10.9. బీజగణిత రాశుల విలువ కనుగొనుట

ఒక బీజగణిత రాశిలో ఒకటి లేక అంత కంటె ఎక్కువ బీజాలు ఉండును. అందువలన రాశి యొక్క నిర్దిష్ట విలువ పొందుటకు అందులో గల ప్రతీ బీజం యొక్క విలువను తెలుసుకొనుట అవసరం. ఆ తరువాత రాశిలో ప్రతీ బీజం బదులుగా దాని విలువను ప్రయోగించినచో రాశి కేవలం ధృవ సంఖ్యలను తీసుకొని ఏర్పడును. ఈ రాశిని సరళం చేసినచో దాని విలువను పొందగలరు.

బీజములు బదులుగా వాటి స్థానాలలో వాటి యొక్క నిర్ధిష్ట విలువలను వేయు పద్ధతిని స్థానభ్రంశ పద్ధతి లేక కేవలం స్థానభ్రంశం అందురు.

ఉదాహరణ-1

$x = 4,\ y = 2,\ z = 5$ అయిన క్రింది రాశుల విలువలను కనుగొనుము.

(a) $2x + 5y - 3z$ (b) $x^2 - 3xy + z^2$

సమాధానం :

క) $2x + 5y - 3z$

$= 2 \times 4 + 5 \times 2 - 3 \times 5$ (ప్రతీ దాని విలువను వేసినచో)

$= 8 + 10 - 15$

$= 18 - 15 = 3$

ఖ) $x^2 - 3xy + z^2$

$= 4^2 - 3 \times 4 \times 2 + 5^2$ (ప్రతీ దాని విలువను వేసినచో)

$= 16 - 24 + 25$

$= 16 + 25 - 24$ (ఒక గుర్తు గల పదాలను ఒకటిగా చేయగా)

$= 41 - 24 = 17$

అభ్యాసం - 10.7

1. $a=3$ మరియు $b=5$ అయిన ఈ క్రింది రాశుల విలువలను కనుగొనుము.

(i) $2a+b$ (ii) $2b-3a$ (iii) $1+ab$ (iv) $\frac{a+3b}{6}$

2. $x=8,\ y=3$ మరియు $z=4$ అయిన ఈ క్రింది రాశుల విలువలను నిర్ణయించండి.

(i) $x+2y+3z$ (ii) $2x+3y-5z$ (iv) $7z-4y-2x$

3. $x=2$ మరియు $y=3$ అయిన

ఒక పిల్లవానికి xy యొక్క విలువను కనుగొనుటకు చెప్పడమైనది.

అతను xy విలువను 23గా రాసెను.

అతను సరిగ్గా రాసెనా ? ఎందుకు ?

4. $a=4,\ b=3$ మరియు $c=5$ అయిన

$2a+3b+6c$ యొక్క విలువను కనుగొనుటకు గీత 24+33+45 గా రాసెను. అది సరియైనదా ? కారణం రాయండి.

పదకొండవ అధ్యాయం

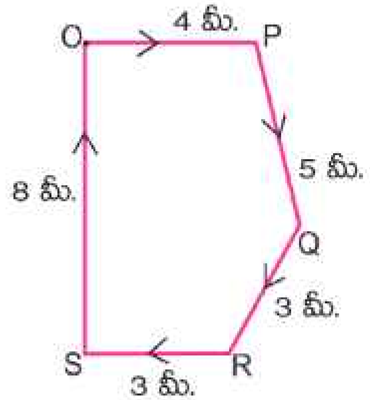
క్షేత్రగణితం

11.1. పరిచయం

వ్యవసాయం చేయు పొలం గూర్చి ఆలోచన చేయునపుడు సాధారణంగా పండు పండు ప్రాంతం మరియు దీని పరిమితి గూర్చి గుర్తుకు వచ్చును. పంట పండు ప్రాంతంను కంచెతో చుట్టబడి వుండును. పండు పండు ప్రాంతం మరియు దాని కంచెను కలిపి ఒక క్షేత్రం అందురు. ఈ పొలం కంచెనకు కొంత వెడల్పు ఉండెను. కాని మన జ్యామితిలో పరిమిత రేఖకు వెడల్పు ఉండదు. ఆ రేఖల పొడవుల మొత్తంను క్షేత్రం యొక్క చుట్టుకొలత అందురు. పరిమితి రెండు ద్వారా చుట్టబడి వున్న ప్రాంతంను ఆ క్షేత్రం యొక్క క్షేత్రఫలం లేక వైశాల్యము అందురు. ఇది మీకు ముందుగా తెలుసు.

11.2. చుట్టుకొలత

ఒక రైతు తన పొలం చుట్టు కంచెను వేయుటకు బయలు దేరెను. అతను ముందుగా O నుండి ఆరంభించి P వరకు, P నుండి Q వరకు, Q నుండి R వరకు, R నుండి S వరకు మరియు S నుండి O వరకు వరుసగా కంచె వేసెను. అయిన ఆ కంచె పొడవు ఎంత ?



ఆ పొలం యొక్క O బిందువు నుండి ఆరంభించి P,Q,R మరియు S బిందువుల నుండి మరల O బిందువు వద్దకు నడిచినచో ఎంత దూరం అగునో అది ఆ పొలం యొక్క చుట్టుకొల అగును.

మనం తెలుసుకున్నాం,

ఒక కలుపబడియున్న స్థలం చుట్టుకొలత అనగా దీని పరిమిత రేఖల పొడవుల మొత్తం అగును.

మనం మన నిత్య జీవితంలో చుట్టుకొలను ఎక్కువగా ఉదాహరణలను ఇవ్వడమైనది.

- విద్యాలయం యొక్క స్థలం చుట్టు (గోడను కట్టుక) కంచె వేయుట
- ఏదైనా స్థలం చుట్టుప్రక్కల తీగెజాలి పెట్టుట.
- ఒక పాటోను కట్టుటకు దాని చుట్టుప్రక్కలను కొలచి కర్రను తయారుచేయుట.

అదే విధంగా రెండు ఉదాహరణలను రాయండి వాటిలో చుట్టుకొలత గూర్చి ఆలోచన ఉండవలెను.

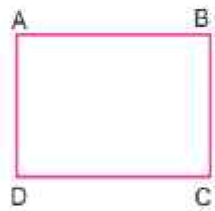
స్వయంగా చేసి చూడండి

- 3 సె.మీ., 4 సె.మీ., 5 సె.మీ. మరియు 6 సె.మీ. కొలతలతో నాలుగు తిన్నని కర్రపుల్లలను తీసుకొండి.
- సైకిల్‌నకు ఉపయోగించిన వాల్వుట్యూబును ఉపయోగించి కర్రపుల్లలను కలిపి ఒక చతుర్భుజాకారమును తయారు చేయండి.
- ఇప్పుడు ఈ చతుర్భుజం యొక్క ఒక శీర్షం వద్ద గల ట్యూబ్‌ను విడదీయండి మరియు పుల్లలను ఈ క్రింది విధంగా బొమ్మలో చూపినట్లు ఒక సరళరేఖలో అమర్చండి.

- మనం ముందు ఉపయోగించిన నాలుగు పుల్లలను కలుపుట వలన ఒక రేఖాఖండం ఏర్పడెను. ఈ రేఖాఖండం పొడవు మరియు ఏర్పడిన చతుర్భుజం యొక్క చుట్టుకొలత అగును.

11.2.1. చుట్టుకొలత యొక్క సూత్రం :

క) దీర్ఘచతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత-



దీర్ఘచతురస్రం ABCD యొక్క చుట్టుకొలత = AB+BC+CD+DA

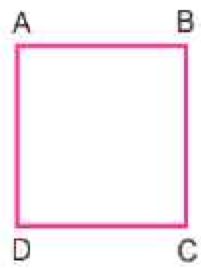
= పొడవు + వెడల్పు + పొడవు + వెడల్పు

= పొడవు + పొడవు + వెడల్పు + వెడల్పు

= 2 X పొడవు + 2 X వెడల్పు

= 2 X (పొడవు + వెడల్పు)

ఖ) సమచతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత -



సమచతురస్రం ABCD యొక్క చుట్టుకొలత = AB+BC+CD+DA

= పొడవు + పొడవు + పొడవు + పొడవు

= 4 X పొడవు

> దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత = 2 X (పొడవు + వెడల్పు)
>
> = 4 X (పొడవు)

చెప్పండి చూద్దాం :
ఒక సమబాహు త్రిభుజ చుట్టుకొలత ఏ విధంగా వచ్చును ?

అభ్యాసం - 11.1

1. మీ తరగతిలో గల టేబుల్ యొక్క పైభాగంనకు గల నాలుగు అంచుల యొక్క పొడవులను కొలవండి మరియు లభించిన కొలతలను ఈ క్రింది ఖాళీలందు రాయండి.

మొదటి అంచు పొడవు = ________ సె.మీ.

రెండవ అంచు పొడవు = ________ సె.మీ.

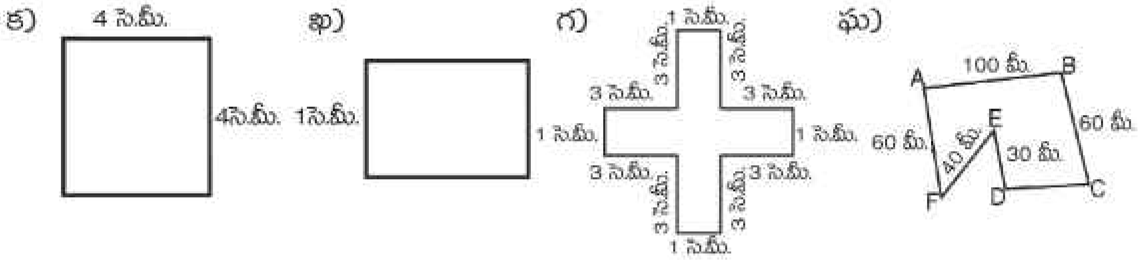
మూడవ అంచు పొడవు = ________ సె.మీ.

నాల్గవ అంచు పొడవు = ________ సె.మీ.

దీని నాలుగు అంచుల మొత్తం = _____ సె.మీ. + _____ సె.మీ. + _____ సె.మీ. + _____ సె.మీ.

టేబుల్ పై భాగం యొక్క చుట్టుకొలత ఎంత ?

2. ఈ క్రింది బొమ్మల యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.



3. ఒక దీర్ఘచతురస్రకారపు, పార్క్ యొక్క పొడవు 50 మీ. మరియు వెడల్పు 35 మీ. ఒక ఆటగాడు ఈ పార్క్ చుట్టు 10 సార్లు పరిగెత్తెను. అయిన అతను మొత్తం ఎంత దూరం పరిగెత్తెను ?

4. ఒక చతుర్భుజాకారంలో గల పొలం యొక్క నాలుగు ప్రక్కల పొడవులు వరుసగా 15 మీ., 12 మీ., 17 మీ. మరియు 11 మీ. దీని చుట్టు ప్రక్కల కంచె వేయుటకు మీటర్‌కు 6 రూ.లు ప్రకారం ఎంత ఖర్చు అగును ?

5. 3 మీటర్ల పొడవు గల దీర్ఘచతురస్రకారపు టేబుల్ యొక్క పై భాగం పొడవు మరియు వెడల్పులు వరుసగా 3 మీ. మరియు 1 మీ. 50 సె.మీ. దీని నాలుగు అంచులందు సన్నని రంగు జాలీ పేపరు అంటించబడును. అయిన ఎన్ని మీటర్ల పొడవు గల రంగు జాలీ పేపరు అవసరమగును ?

6. ఒక సమచతురస్రకారపు టేబుల్ యొక్క చుట్టుకొలత 3 మీ. 25 సె.మీ. అయిన దీని ప్రతీ భుజం పొడవు ఎంత ?

తెలుసా ?

సమచతురస్రం యొక్క అన్ని భుజాల పొడవులు సమానం

7. ఈ క్రింది నిచ్చిన ఏఏ విషయాలలో చుట్టుకొలతను కనుగొనుట అవసరమగును ?

క) ఒక పంట పొలం యొక్క పంట పండు స్థలం పరిమాణంను నిర్ణయించుట.

ఖ) ఒక ఆటస్థలం చుట్టు సైకిల్‌పై తిరిగి వచ్చుట.

గ) ఒక గది యొక్క వరండా నేలపై మార్బల్స్‌ను వేయుట.

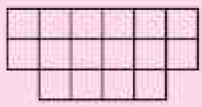
ఘ) ఒక ఫొటో ప్రేమును కట్టుటకు అవసరమైన కర్ర పొడవు తెలుసుకొనుట.

8. ఒకవేల 30 మీటర్ల పొడవు గల సన్నని ఇనుప తీగెను తెచ్చి దానిని అవసరమైనట్లు ఈ క్రింది ఆకృతులుగా తయారు చేసిన, వాటి ప్రతీ భుజం పొడవును కనుగొనుట.

క) సమచతురస్రం ఖ) సుసమషడ్భుజం గ) సమబాహు త్రిభుజం

స్వయంగా చేసి చూడండి

- మీరు ఒక దలసరి కాగితంను తీసుకొనుము.
- దీని నుండి 1 సె.మీ. పొడవు మరియు 1 సె.మీ. వెడల్పు గల 16 సమచతురస్ర ఆకారాలను తయారు చేయండి.
- 16 ముక్కలను తీసుకొని వివిధ ఆకారాలుగా అతికించండి. వాటి మధ్య ఖాళీలు ఉండరాదు. అనగా



- ఏ ఆకారాలను తయారు చేసిరో వాటి చుట్టుకొలతలను కనుగొనుము.
- మీ నోట్‌బుక్‌లో ఆకృతులను నిర్మించి ప్రతీ దాని యొక్క కుడి ప్రక్క దాని చుట్టుకొలతను రాయండి.

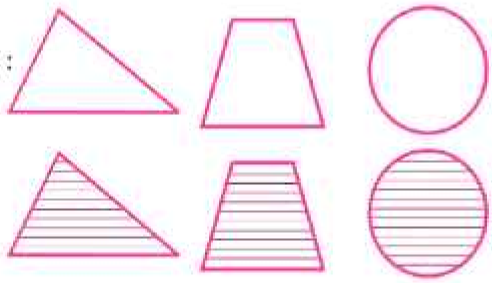
మీ కొరకు చిన్న పని

మీ చుట్టుప్రక్కల మీరు చూస్తున్న దీర్ఘఆకారాలు గల వస్తువుల పేర్లుతో ఒక పట్టికను తయారు చేయండి. ప్రతీ దాని చుట్టుకొలత నిర్ణయించి ఒక పట్టికను తయారు చేయండి మరియు దానిని తరగతిలో గల పిల్లలను చూపించండి.

11.3. వైశాల్యము

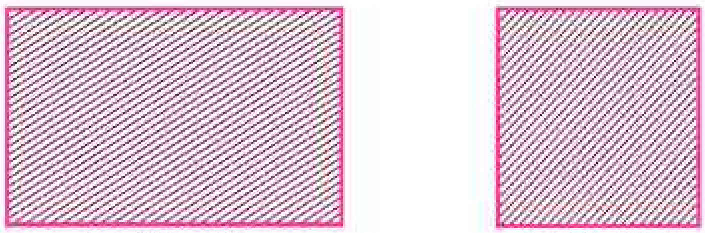
ప్రక్క పేజీలో గల బొమ్మలను పరిశీలించండి. ప్రతీ బొమ్మ ద్వారా పేజి యొక్క కొంత భాగం కలుపబడి వున్నది. బొమ్మ మరియు పేపరు ద్వారా కలిపిన ప్రాంతాల మొత్తంను స్థలం లేక క్షేత్రం అందురు. ఈ స్థలంల పరిమాణంను ఆ స్థలం యొక్క వైశాల్యము అని అందురు.

ఈ క్రింద గల బొమ్మలు మరియు సంబంధించిన స్థలాలను చూడండి.



> **తెలుసా ?**
>
> ఏదైనా కలుపబడివున్న బొమ్మ ద్వారా కలిసిన స్థలం పరిమాణంను వైశాల్యం అందురు.

క్రింది ఇవ్వబడిన రెండు బొమ్మలను పరిశీలించండి. మొదటి బొమ్మ మరియు రెండువ బొమ్మ ద్వారా కలిసిన స్థలంను రేఖల ద్వారా గుర్తించడ మైనది.



మొదటి బొమ్మ   రెండవ బొమ్మ

ఒక పంట పొలంలో పంటను పండించు స్థలం యొక్క పరిమాణం ఆ పొలం వైశాల్యం అగును. నాలుగు గోడల ద్వారా పరిమితమైన ఒక నేల పరిమాణం దాని వైశాల్యం అగును.

వైశాల్యమును చదరపు సె.మీ. చదరపు మీ. మొదలైన కొలత యూనిట్లతో కొలుచుదురు.

మీ నిత్య జీవితంలో ఏఏ విషయాలలో వైశాల్యము కొలుచు అవసరం వచ్చునో, అటువంటి మూడు పరిస్థితులను రాయండి.

11.3. కొన్ని జ్యామితీయ ఆకృతుల వైశాల్యాలు

క) దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వైశాల్యము

మీరు ముందు తరగతిలో దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం ఏ విధంగా నిర్ణయించ వచ్చునో తెలుసుకున్నారు. వైశాల్యంనకు సంబంధించిన పద్ధతిని సూత్ర రూపంలో రాద్దాం.

- దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము = (పొడవు X వెడల్పు) చ.యూ.

  పొడవు = (వైశాల్యం ÷ వెడల్పు) యూ.

  వెడల్పు = (వైశాల్యం ÷ పొడవు) యూ.

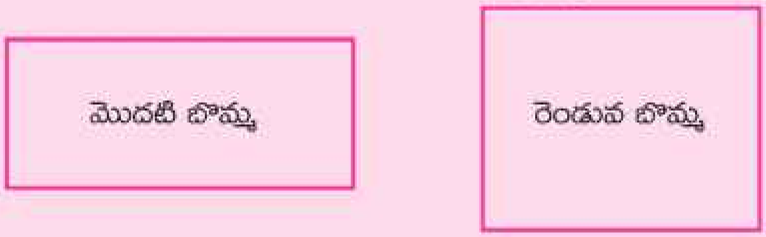
- సమచతురస్ర వైశాల్యము = (భుజం పొడవు X భుజం పొడవు)

  భుజం పొడవు = వైశాల్యము వర్గమూలం

  $= \sqrt{\text{వైశాల్యము}}$

స్వయంగా చేసి చూడండి

క్రింద నిచ్చిన రెండు బొమ్మలను పరిశీలించండి. దేని వైశాల్యము అధికమో రండి చూద్దాం.



- దలసరి కాగితంను తీసుకొని 1 సె.మీ. పొడవు గల కొన్ని సమచతురస్రమాలను తయారు చేయండి. (సుమారుగా 30)
- మొదటి బొమ్మ పరిమిత రేఖ లోపల దానిని ఉంచండి. అవి బొమ్మ అంచులను సమానంగా ఉండును.
- అదే విధంగా రెండువ బొమ్మపై సమచతురశ్రాకారపు కాగితంను ముందు వలే అమర్చండి.
- ఏ బొమ్మపై అధికంగా కాగితపు ముక్కలు ఉండును ?
- ఏ స్థలం యొక్క వైశాల్యము అధికం అని తెలుసుకున్నారు ?

ఉదాహరణ-1 :

ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు 8 సె.మీ. మరియు వెడల్పు 6 సె.మీ. అయిన దాని వైశాల్యము ఎంత ?

సమాధానం :

దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు = 8 సె.మీ.

వెడల్పు = 6 సె.మీ.

దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యము = (పొడవు X వెడల్పు) చ.యూ.

= 8 X 6 చ.సె.మీ.

= 48 చ.సె.మీ.

∴ దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము 48 చ.సె.మీ.

తెలుసా ?

దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు సె.మీ. మరియు వెడల్పు సె.మీ. యూనిట్లయిన దీని వైశాల్యం చదరపు సె.మీ.లలో రాయాలి.

క్రింది పట్టికలో గల ఖాళీలను పూరించండి.

వరుస సంఖ్య	దీర్ఘచతురస్రం పొడవు	దీర్ఘచతురస్రం వెడల్పు	చుట్టుకొలత	వైశాల్యం
1	5 సె.మీ.	4 సె.మీ.		
2		7 సె.మీ.	30 సె.మీ.	
3	7 సె.మీ.			28 చ.సె.మీ.
4	12 సె.మీ.		42 సె.మీ.	

స్వయంగా చేసి చూడండి

- ఒక గ్రాఫ్ కాగితంను తీసుకొవలెను. (తెల్లని కాగితంను గ్రాఫ్ కాగితం వలె తయారు చేయవచ్చును)
- దళసరి కాగితంను కట్ చేసి ఒక సమచతురస్రంను తయారు చేయండి.
- మీరు తయారు చేసిన సమచతురస్రంను గ్రాఫ్ కాగితంపై ఉంచండి. సమచతురస్రం యొక్క ప్రతీ అంచు గ్రాఫ్ కాగితం యొక్క ఏదైనా గీతతో కలిసి ఉండవలెను.
- సమచతురస్రం యొక్క అంచు చుట్టు గీరను గీయండి. గ్రాఫ్ కాగితంపై మీరు సమచతురస్రంను పొందగలరు.
- గ్రాఫ్ కాగితంపై నిర్మించిన సమచతురస్రం యొక్క పరిమిత రేఖ మధ్యలో గ్రాఫ్ కాగితం ఎన్ని ఒక సమభుజాలు గల వరములు గలవో లెక్కించండి.
- ఒక సమభుజం గల సమచతురస్రంల సంఖ్య తెలిసినచో సమచతురస్రకారపు, కాగితం యొక్క వైశాల్యంను నిర్ణయించగలం.

ఉదాహరణ-2 :

ఒక సమచతురస్రకారపు స్థలం యొక్క ప్రతీ భుజం పొవు 6 సె.మీ. అయిన ఈ స్థలం యొక్క వైశాల్యం ఎంత ?

సమాధానం :

సమచతురస్రకారపు స్థలం భుజం పొడవు = 8 సె.మీ.

దీని వైశాల్యం = (భుజం పొడవు X భుజం పొడవు) చ.సె.మీ.

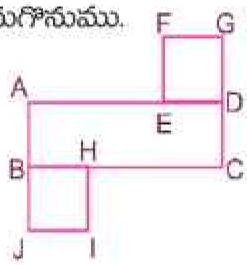
= 6 X 6 చ.సె.మీ.

= 36 చ.సె.మీ.

చెప్పండి చూద్దాం.
6 X 6 6గా రాయవచ్చు మరియు 6 యొక్క వర్గం అని అందురు. మీరు 8 మరియు 10ల వరంను నిర్ణయించగలరా ?

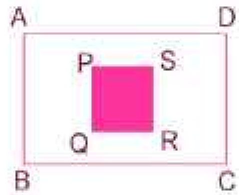
అభ్యాసం - 11.2

1. ఒక సమచతురస్రం యొక్క ప్రతీ భుజం పొడవు 7 సె.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?
2. ప్రక్క బొమ్మలో ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం మరియు EDGF మరియు BJIH ఒకొక్క సమచతురస్రం. AD = 20 సె.మీ., AB = 9 సె.మీ., ED = 7 సె.మీ. మరియు BJ = 8 సె.మీ. అయిన మొత్తం స్థలం యొక్క చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యమును కనుగొనుము.



3. ఒక సమచతురస్రకారపు స్థలం వైశాల్యము 64 చ.మీ. అయిన దీని ప్రతీ భుజం పొడవు ఎంత ?
(సూచన : ఇచ్చట 64ను మౌళిక గుణిజాల రూపంలో మార్చి 64ను రెండు సమసంఖ్యల లబ్ధం రూపంలో మార్చ వచ్చును. ఆ రెండు సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్య 64 యొక్క వర్గమూలం అగును.)

4. ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రకారపు తోట. దీనిలో తీసిన ఒక సమచతురస్రకారపు చెరువు పేరు PQRS .
AB = 40 మీ., AD = 50 మీ. మరియు PQ = 22 మీ.
అయిన తోటలో గల మిగిలిన స్థలం వైశాల్యంను కనుగొనుము.



5. ఒక దీర్ఘచతురస్రకారపు పొలం యొక్క పొడవు 30 మీ. మరియు వెడల్పు 25 మీ. ఒక చదరపు మీ. పొలం ఖరీదు 275 రూ.లు అయిన ఆ పొలంను అమ్మి యజమాని ఎంత సొమ్ము పొందురు ?

6. ఒక టేబుల్ యొక్క పైభాగము ఒక సమచతురస్రం. దీని ప్రతీ అంచు పొడవు 1 మీ. 20 సె.మీ. అయిన దీని పైభాగం యొక్క వైశాల్యం ఎంత ?

7. క్రింద మూడు దీర్ఘచతురస్రంల పొడవు మరియు వెడల్పులను ఇవ్వడమైనది.

క) 9 మీ. మరియు 6 మీ. ఖ) 17 మీ. మరియు 3 మీ. గ) 15 మీ. మరియు 4 మీ.

- ఏ దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వైశాల్యం అన్నిటి కంటె ఎక్కువ ?
- ఏ దీర్ఘచతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత అన్నిటి కంటె ఎక్కువ ?

8. ఒక దీర్ఘచతురస్రకారపు కార్డ్‌బోర్డు యొక్క వైశాల్యము 36 చ.సె.మీ. దీని పొడవు 7 సె.మీ. అయిన దీని వెడల్పు ఎంత ?

పై ప్రశ్నను బాగా చదవండి. క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు ఇవ్వండి.

- దీర్ఘచతురస్రకారపు కార్డ్‌బోర్డ్ యొక్క వైశాల్యం ఎంత ?
- దీని పొడవు ఎంత ?
- ఏదైనా దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం మరియు పొడవు తెలిసినచో దాని వెడల్పు ఏ విధంగా వచ్చును.
- ఇచ్చట దీర్ఘచతురస్రకారపు కార్డ్‌బోర్డు యొక్క వెడల్పు ఎంత ?

9. 16 మీ. పొడవు మరియు 12 మీ. వెడల్పు గల ఒక గది నేలపై టైల్స్ పేర్చడమైనది. దీని కొరకు ఎన్ని 2 మీ. పొడవు భుజం గల సమచతురస్రకారపు టైల్స్ అవసరమగును ?

10. ఒక సమచతురస్రకారపు పొలం చుట్టుకొలత 120 మీ. ఈ పొలంను పండించుటకు ప్రతీ చదరపు మీటర్‌కు 4 రూపాయాల ప్రకారం మొత్తం ఎంత సొమ్ము అవసరమగును ?

11. 12 మీటర్ల పొడవు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రకారపు పొలం వైశాల్యం 125 చ.మీ. దీని చుట్టు కంచె వేయుటకు 1 మీటర్‌కు 10 రూపాయలు అవసరమగును. అయిన పొలం చుట్టు కంచె వేయుటకు మొత్తం ఎంత సొమ్ము అవసరమగును.

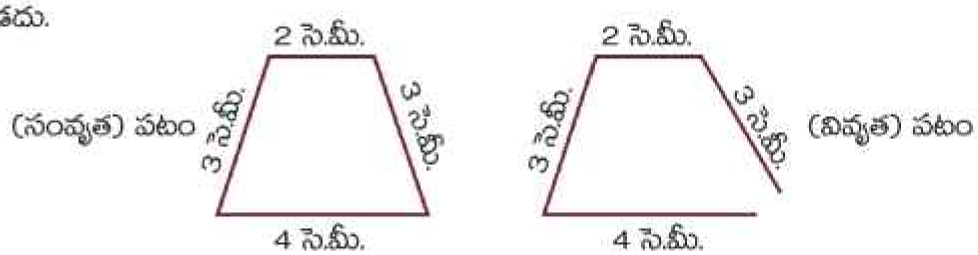
12. 20 సె.మీ. పొడవు గల ఒక తీగెను తీసుకొని వక్రముగా చేసి వివిధ కొలతలు గల దీర్ఘచతురస్రంలుగా చేయడం జరుగును. (ప్రతీ దాని పొడవు మరియు వెడల్పు ఒక పూర్ణ సంఖ్య గల సె.మీ. అగును) తీగెను ఎన్ని వేరు వేరు దీర్ఘచతురస్రముగా చేయగలం ? వాటి మధ్యలో ఎన్ని సమచతురస్రాలు ఆకారాలు గలవు ? ప్రతీ దాని యొక్క చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యము నిర్ణయించండి.

మీ కొరకు పని !

ఒక కాగితంను కట్ చేసి మూడు దీర్ఘచతురస్రంలను తయారు చేయండి. వాట పొడవు మరియు వెడల్పు క్రింద ఇవ్వడమైనది. 4 సె.మీ. మరియు 3 సె.మీ., 5 సె.మీ. మరియు 2 సె.మీ. 4 సె.మీ. మరియు 2 సె.మీ. వాటిని గమ్‌తో అతికించి వేరు వేరు ఆకారాల క్షేత్రాలను తయారు చేయండి మరియు ఆ స్థలాల వైశాల్యాలను కనుగొనుము.

11.4. చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యంనకు సంబంధించిన కొన్ని అసత్య అవగాహనలు

దీర్ఘచతురస్రకారపు మరియు సమచతురస్రకారపు స్థలాల యొక్క చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యాలు సంబంధించిన సమధానాలను చేయు సమయంలో అప్పుడప్పుడు మనం సందేహంలో పడుతుంటాం, ఇచ్చట దాని ఒక ఉదాహరణను ఇవ్వడమైనది పరిశీలించండి - చుట్టుకొలత అనగా ఏదైనా ఒక పరిమిత బొమ్మ యొక్క చుట్టుకొలత అని అర్థం. కాని అప్పుడప్పుడు పరిమిత రేఖ గల బొమ్మను తీసుకోకుండా దాని భుజాల మొత్తంను నిర్ణయించి చుట్టుకొలత వచ్చిందని మనం అంటుంటాం. నిజంగా ఈ విధమైన వాటిన చుట్టుకొలత ఉండదు.



మొదటి చిత్రం   రెండవ చిత్రం

ఇచ్చట మొదటి బొమ్మ ఒక పరిమిత రేఖ గల చిత్రం, దీని నాలుగు భుజాల పొడవులు 2 సె.మీ, 3 సె.మీ, 4 సె.మీ. మరియు 3 సె.మీ.

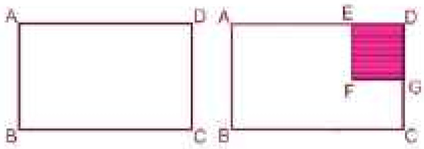
దీని చుట్టుకొలత = 2 సె.మీ. + 3 సె.మీ. + 4 సె.మీ. + 3 సె.మీ. = 12 సె.మీ.

రెండువ బొమ్మ ఒక పరిమిత రేఖ లేనిది. కనుక దీనికి ఎటువంటి చుట్టుకొలత ఉండదు.

మరొక ఉదాహరణ :

ABCD ఒక దీర్ఘఘనాకార కాగితం దీని పొడవు 8 సె.మీ. మరియు వెడల్పు 15 సె.మీ. దీని D మూల నుండి 2 సె.మీ. భుజం గల సమచురస్రకారపు కాగితం ముక్కను కట్ చేయడమైనది. మిగిలిన భాగం యొక్క చుట్టుకొలత ఎంత ?

మిగిలిన కాగితం చుట్టుకొలత = ముందు గల దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత - కట్ చేసిన సమచతురస్రం చుట్టుకొలత



= 2 (8+5) సె.మీ. - 4 X 2 సె.మీ.

= 26 సె.మీ. - 8 సె.మీ.

= 18 సె.మీ.

కాని సరియైన సమాధానం

కాని CG = CD - AG = 5 సె.మీ. - 2 సె.మీ. = 3 సె.మీ.

AE = AD - DE = 8-2 = 6 సె.మీ.

అందువలన మిగిలిన కాగతం చుట్టుకొలత = AB + BC + CG + GF + FE + EA

= 5 + 8 + 3 + 2 + 2 + 6 = 26 సె.మీ.

అభ్యాసం - 11.3

క్రింద కొన్ని ప్రశ్నలను ఇవ్వడమైనది ఆ ప్రశ్నలను కొంతమంది పిల్లలు ఏ విధంగా సమాధానం చేసిరో వాటిని రాయడమైనది. వాటిలో ఏ తప్పు గలదో గుర్తించండి. ఈ విధంగా తప్పు చేయుటకు కారణమేమిటో రాయండి.

1. ఒక దీర్ఘచతురస్రపు ఆకారపు గల తోట యొక్క బొమ్మను గీసి దాని చుట్టుకొలతను గుర్తించండి.
   రంజిత బొమ్మలో ఏ విధంగా రంగు వేసి చుట్టుకొలతను గుర్తించినచో దానిని క్రింద చూపించడమైనది.

2. ఒక దీర్ఘచతురస్రకారపు రుమాలు యొక్క పొడవు 24 సె.మీ. మరియు వెడల్పు 18 సె.మీ. అయిన దాని చుట్టుకొలత ఎంత ?

దీని చుట్టుకొలత = 24 సె.మీ. + 18 సె.మీ. = 42 సె.మీ.

3. ఒక సమచతురస్రం యొక్క భుజం పొడవు 3 మీటర్లు అయిన దీని యొక్క వైశాల్యం ఎంత అగును ?

సమచతురస్ర వైశాల్యం = భుజం X భుజం

= 3 మీ. X 3 మీ.

= 9 మీటర్లు

4. ప్రక్క ఇవ్వబడిన బొమ్మ యొక్క చుట్టుకొలత ఎంత అగును ?

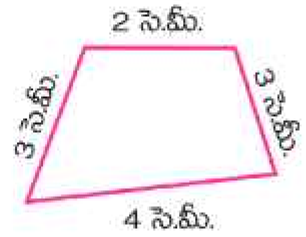
దీని పొడవు = 2 సె.మీ.

దీని వెడల్పు = 3 సె.మీ.

చుట్టుకొలత = పొడవు మరియు వెడల్పుల మొత్తం యొక్క రెండు వంతులు

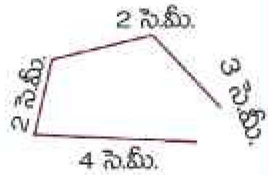
= (2 సె.మీ. + 3 సె.మీ.) X 2

= 5 సె.మీ. X 2 = 10 సె.మీ.



5. ఒక సారి మధుమతి చెప్పెను. నేను నా నోట్‌బుక్‌లో ఒక బొమ్మను గీసాను మరియు దాని చుట్టుకొలతను నిర్ణయించును.

చుట్టుకొలత = 2 సె.మీ. + 3 సె.మీ. + 3 సె.మీ. + 4 సె.మీ. = 12 సె.మీ.



6. ఒక దీర్ఘచతురస్రకారపు కాగితం పొడవు 1 మీటరు మరియు వెడల్పు 80 సె.మీ. అయిన దీని చుట్టుకొలత ఎంత అగును ?

రాధిక ప్రశ్న యొక్క సమాధానం క్రింది విధంగా రాసెను.

పొడవు = 1 మీటరు, వెడల్పు = 80 సె.మీ.

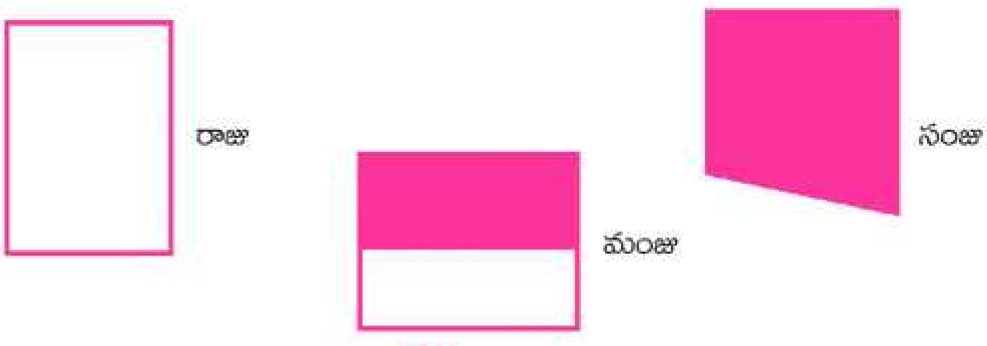
చుట్టుకొలత = 2 X (పొడవు + వెడల్పు)

= 2 X (1 మీ. + 80 సె.మీ.)

= 2 X 81 మీ.

= 162 మీటర్లు

7. ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పటంను గీసి దాని వైశాల్యంను ఎరుపు రంగుతో గుర్తించుటకు ముగ్గురు పిల్లలను చెప్పడం జరిగింది. వారు ఏ విధంగా చేసిరో రండి చూద్దాం.



8. ఒక దీర్ఘచతురస్రకారపు బొమ్మను గీసి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.
రమేష్ ఏ విధంగా బొమ్మను గీసి, దాని వైశాల్యము నిర్ణయించెనో చూడండి.

పొడవు = 4 సె.మీ., వెడల్పు = 2 సె.మీ.
వైశాల్యం = 4 సె.మీ. X 2 సె.మీ. = 8 సె.మీ.

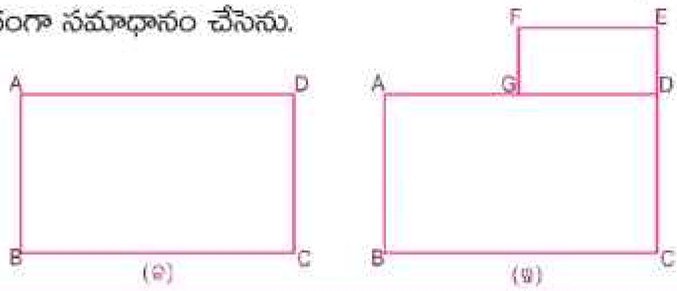
9. ఈ క్రింద ఒక సంవృత చిత్రంను చూపించడమైనది. దీని చుట్టుకొలత ఎంత అగును ?

దీని యొక్క చుట్టుకొలత = 4 X 3 X 6 X 5 చ.సె.మీ.
= 360 చ.సె.మీ.

10. ఒక దీర్ఘచతురస్రకారపు స్థలం యొక్క పొడవు 1 మీటరు మరియు వెడల్పు 40 సె.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం ఎంత ?

దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వైశాల్యం = పొడవు X వెడల్పు
= 1 మీటరు X 40 సె.మీ.
= 40 చ.మీటర్లు

11. 12 సె.మీ. పొడవు మరియు 8 సె.మీ. వెడల్పు గల ఒక దీర్ఘచతురస్రం ABCD నిర్మించడమైనది. (చిత్రం-క) దీనిలో పాటు తగిలించి 6 సె.మీ. పొడవు మరియు 3 సె.మీ. వెడల్పు గల మరొక దీర్ఘచతురస్రం నిర్మించబడినది. (చిత్రం-ఖ) అయిన చిత్రం-ఖ లో గల స్థల చుట్టుకొలత ఎంత ? భావన క్రింది విధంగా సమాధానం చేసెను.



(క) (ఖ)

ABCD యొక్క చుట్టుకొలత = 2 (పొడవు + వెడల్పు) = 2 (12 + 8) సె.మీ.
= 2 X 20 సె.మీ. = 40 సె.మీ.

DEFG యొక్క చుట్టుకొలత = 2 (పొడవు + వెడల్పు) = 2 (6 + 3) సె.మీ.
= 2 X 9 సె.మీ. = 18 సె.మీ.

సమగ్ర స్థలం యొక్క చుట్టుకొలత = ABCD యొక్క చుట్టుకొలత + DEFG యొక్క చుట్టుకొలత
= 40 సె.మీ. + 18 సె.మీ. = 58 సె.మీ.

పన్నెండవ అధ్యాయం

విషయ పరిచలనం మరియు సంరచన

12.1 పరిచయం

మన నిత్య జీవితంలో వివిధ రకాల దత్తాంశం (విషయాల) గూర్చి ఆలోచన చేస్తుంటాం. ఈ దత్తాంశ (విషయా) లన్ని వేరు వేరు ఉపాయాలతో తెలియజేయుట మనకు తెలుసు. రోజు వారి దినపత్రికలు, టెలివిజన్‌లో కూడా వివిధ రకాల దత్తాంశా (విషయా)లను బొమ్మల గ్రాఫ్ మరియు జరుగును. దీనికి ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వడమైనది. పరిశీలించండి.

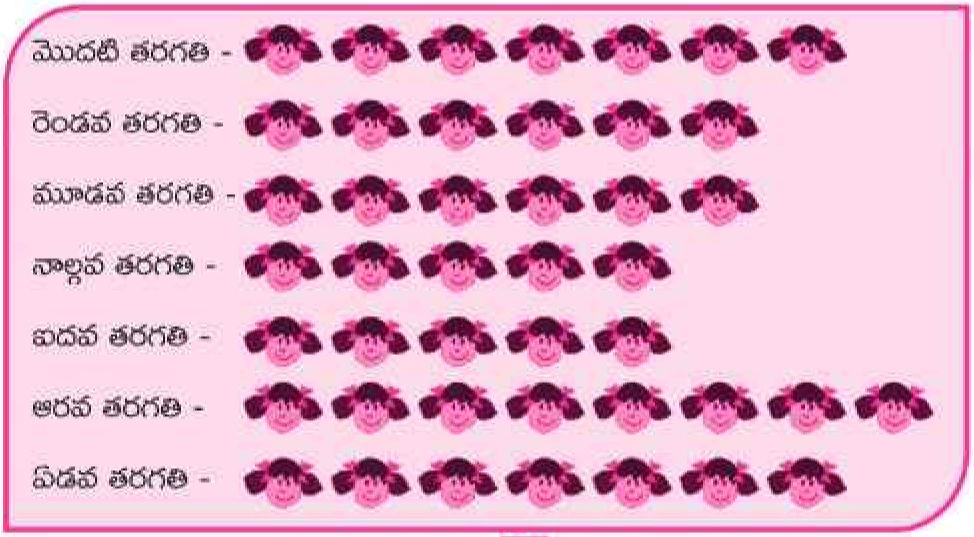
ఉదాహరణ-1

ఒక విద్యాలయంలో వివిధ తరగతులలో చదువుచున్న పిల్లల సంఖ్యను ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వడమైనది. దానిని బొమ్మల గ్రాఫ్‌లో తెలియ జేయండి.

మొదటి తరగతి	రెండవ తరగతి	మూడవ తరగతి	నాల్గవ తరగతి	ఐదవ తరగతి	ఆరవ తరగతి	ఏడవ తరగతి
35	30	30	25	25	40	35

సమాధానం :

ఒకవేళ 5 గురు పిల్లలు కొరకు చిత్రంను ఉపయోగించినచో విద్యాలయంలో వివిధ తరగతుల పిల్లల సంఖ్యకు బొమ్మల గ్రాఫ్‌లో ఈ విధంగా (వాడవచ్చును) తెలియజేయవచ్చు.



ఒక దుఖాణదారుడు ఐదు దినములలో వరుసగా 12, 16, 14, 18 మరియు 20 గాలి పటాలకు

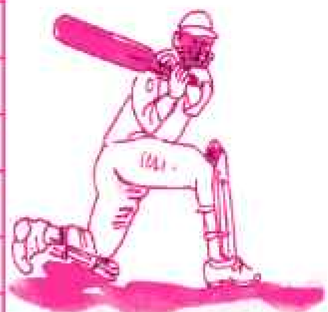
అమ్మెను. ఒకవేల రెండు గాలి పటాలను ఉపయోగించబడును. అయిన ప్రతీ దినం అమ్మబడుచున్న గాలి పటాల సంఖ్యను బొమ్మల గ్రాఫ్‌లో మరియు స్థంబాల గ్రాఫ్‌లో ఏ విధంగా చూపించగలరు ?

12.2. దత్తాంశం

20 ఓవర్లు గల క్రికెట్ మ్యాచ్‌లో ఒక టీమ్ యొక్క పరుగుల వివరాలను క్రింద చూపించడమైనది. దానిని పరిశీలించండి.

బ్యాటింగ్ వివరాలు **పురుషియ టీమ్ (దలం)**

బ్యాట్స్‌మెను పేరు	ఆడిన బంతులు	చేసిన పరుగులు	పోర్లు	సిక్సులు
దవళ	24	30	2	2
విభూతి	35	21	3	0
హరప్రసాద్	28	27	3	1
సంజయ్	3	2	0	0
సత్యప్రకాశ్	12	24	2	2
రమేష్	18	17	2	0
కలిసిన పరుగులు 2		మొత్తం - 123 (4 వికెట్లలో)		



బౌలింగు వివరాలు **మహాదేవవస్త టీమ్ (దలం)**

బౌలర్ పేరు	ఓవర్లు	మెడెన్ ఓవర్	పరుగులు	వికెట్లు
జతిన్	4	0	22	1
సులేమాన్	4	0	31	0
ఇక్‌బాల్	4	1	16	2
మహేష్	4	0	29	0
చందన్	4	0	25	1

క్రికెట్ ఆటలో ఏ టీమ్ గెలిచిందో లేక ఓడిందో తెలుసుకొనుట ముఖ్యం కాదు. స్కోర్‌బోర్డును చూచి దాని వల్ల మ్యాచ్ గూర్చి అనేక దత్తాంశాలు తెలుసుకొగలం. ఎవరు అధిక పరుగులు చేసారు, వరు అధికం బంతులు ఆడారు, ఎవరు ఎక్కువ వికెట్లు తీసిరి మొదలైన విషయాలు తెలియును.

పైన గల బ్యాటింగ్ మనకు బౌలింగ్ వివరాలను చూసి మీరు దాని నుండి ఏఏ దత్తాంశాలను పొందిరో రాయండి.

మన నిత్య జీవితంలో అదే విధంగా మనం అనేక రకాల పట్టికల వల్ల సంఖ్యలు, బొమ్మలు మరియు పేర్లు గూర్చి తెలుసుకోగలం.

దత్తాంశం అనగా ఒక నిర్ణయం తీసుకొనుటకు సహాయపడు సంఖ్యాత్మక లేక వివరణాత్మక సమాచారము అను అర్థం.

ఉదాహరణ-2

వార్షిక పరీక్ష గూర్చి చున్నికి అడుగుటవల్ల, చున్ని తన మార్కులతో పాటు చిక్కు యొక్క మార్కులు కూడా చెప్పెను.

చున్నికి లభించిన మార్కులు	
లెక్కలు-	85
సాహిత్యం-	65
విజ్ఞానం-	75
ఇంగ్లీషు-	84
భూగోళం-	42
చరిత్ర-	38

చిక్కుకి లభించిన మార్కులు	
లెక్కలు-	97
సాహిత్యం-	75
విజ్ఞానం-	75
ఇంగ్లీషు-	91
భూగోళం-	40
చరిత్ర-	27

ఇద్దరి మధ్యలో ఎవరు ఎక్కువ మార్కులు పొందిరి మరియు ఎన్ని మార్కులు అధికంగా పొందారు ? ఈ విధమైన అనేక దత్తాంశాలు ఈ పట్టిక వల్ల లభించును. అదే విధంగా మనం ఫోన్ నెంబర్ బండి నెంబర్ మరియు అనేక మంది పేర్లను గుర్తుస్తాం. అనేక సార్లు ఈ విషయాలను ఎక్కువ దినముల వరకు గుర్తుంచ లేక పోవుట వల్ల అనేక ఇబ్బందులు అవుతుంటాము.

దత్తాంశములను గుర్తుంచలేక పోవుట వల్ల మీరు ఎప్పుడైనా ఇబ్బంది పడ్డారా ? ఇటువంటి పరిస్థితికి ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

12.3. దత్తాంశం మరియు దాని విశ్లేషణ

గోపబంధు యు.పి. స్కూల్లో గల ఆరవ తరగతి పిల్లలు వార్షిక పరీక్షలో లెక్కల్లో పొందిన మార్కులను ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వడమైనది.

	పేరు	మార్కులు		పేరు	మార్కులు
1	సంగ్రామ సేనాపతి	95	6	అనిల్ అగ్రవాల్	59
2	నిర్మలా బెహర	75	7	సయినా ప్రధాన్	90
3	రణవీర్ కపూర్	97	8	వాసిం అక్రమ్	55
4	వనిత మహంతి	98	9	మమతఖర	60
5	సయ్యద్ అలీ	65	10	మధన్ గొరాన్	49

ఈ క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి -

క) ఎంత మంది పిల్లలు లెక్కల్లో 90 కంటె అధిక మార్కులు తెచ్చిరి ?

ఖ) ఎంత మంది పిల్లలు లెక్కల్లో 60 కంటె తక్కువ మార్కులు తెచ్చిరి ?

గ) ఏ పిల్లలు 90 కంటె అధిక మార్కులు తెచ్చిరో, ఎక్కువ మార్కులు తెచ్చుటకు వారు ఏమి చేసారని అనుకుంటున్నారు ?

ఘ) 60 కంటె తక్కువ తెచ్చారని అనుకుంటున్నారు ?

ప్రశ్న (గ) మరియు (ఘ)లో మీరు ఏ సమాధానం రాసారో అది ఎంత వరకు సరియైనదో తెలుసుకొనుటకు క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి. ఈ పట్టికలో పిల్లలు లెక్కల పుస్తకం కాకుండా వేరే దేనిని చదివారు మరియు ఇంట్లో ఎంత సమయం లెక్కలు చేసారు వాటి వివరాలు ఇవ్వడమైనది

వరుస సంఖ్య	పిల్లల పేర్లు	మార్కులు	చదివే పుస్తకాలు	ఇంట్లో చదివే సమయం (గంటల్లో)	
				ఉదయం	సాయంకాలం
	సంగ్రామ సేనాపతి		టెస్ట్ పేపర్, గణిత విచిత్ర		
	నిర్మలా బెహర		ప్రశ్న బ్యాంక్		
	రణవీర్ కపూర్		టెస్ట్ పేపర్, గణిత విచిత్ర, ప్రశ్న బ్యాంక్		
	వనిత మహంతి		టెస్ట్ పేపర్, ప్రశ్న బ్యాంక్		
	సయ్యద్ ఆలీ		—		
	అనిల్ అగ్రవాల్		—		
	సయినా ప్రధాన్		టెస్ట్ పేపర్, గణిత విచిత్ర,		
	వాసిం అక్రమ్		—		
	మమతఖర		—		
	మధన్ గొరాన్		—		

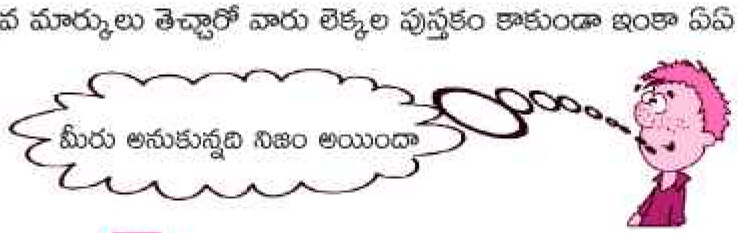
ఈ పట్టికను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలను రాయండి.

క) ఎవరు లెక్కలలో 90 కంటె ఎక్కువ మార్కులు తెచ్చారో, వారిలో ఎవరు ప్రతీ దినం ఎంత సమయం లెక్కలు చేస్తారు ?

ఖ) లెక్కలలో 90 కంటె ఎక్కువగా మార్కులు తెచ్చిన పిల్లలు ఇంకా ఏఏ పుస్తకాలను చదివారు ?

గ) ఏ పిల్లలు లెక్కలలో 60 కంటె తక్కువ మార్కులు తెచ్చారో, వారు ప్రతీ దినం ఎంత సమయం లెక్కలను చేసిరి ?

ఘ) ఎవరు లెక్కలలో 60 కంటె తక్కువ మార్కులు తెచ్చారో వారు లెక్కల పుస్తకం కాకుండా ఇంకా ఏఏ పుస్తకాలు చదివిరి ?



దీని నుండి మనం ఏం తెలుసుకున్నాం ?

ఈ విద్యాలయంలో లెక్కలలో అధిక మార్కులు తెచ్చిన పిల్లలు ఇంట్లో ప్రతీ దినం ఎక్కువ సమయం లెక్కలు చేసిరి మరియు లెక్కల పుస్తకం కాకుండా వేరే పుస్తకాలను కూడా వారు చదివిరి.

దీనికి సంబంధించిన దత్తాంశం (విషయం) పట్టికలో ఉండుట వల్ల మనం సులువుగా సిద్ధాంతంలో వచ్చాం. అందువలన విషయ సేకరణ ముందు మనం దీని ఉపయోగంను గూర్చి ఆలోచించి దత్తాంశంను సేకరించుట వలన అవసరమైన సమాధానాలు యొక్క నిజాయితీని పరీక్షించుట సులువగును.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- ఈ క్రింది నీయబడిన పరిస్థితిని చదవండి.
  విద్యాధరపురం అనే ఊరిలో సగం పురుషులు వ్యవసాయం చేయుదురు. మరి కొందరు పురుషులు దినకూలీలు మరియు మిగిలిన వారు ఉద్యోగం చేయుదురు. కాని తక్కువ మంది స్త్రీలు ఉద్యోగం చేస్తారు, కొందరు మహిళలు దినకూలీలు, మరి కొందరు ఇంటి పని సహా పిండోడాలు, అప్పడాలు తయారు చేసి కొంత డబ్బు సంపాదించెదరు. మరి కొంతమంది మహిళలు అడవి నుండి ఎండిన కర్రలు లేక ఆకులు సంగ్రహించి అమ్ముదురు. కొంతమంది స్త్రీలు వేరే ఇంట్లో పని చేసి సంపాదించెదరు.
  ఒక దినం ఆ ఊరి సీమాదేవి అందరి మహిళల్ని పిలిచి ఒక సభ ఏర్పాటు చేసెను మరియు సభలో ఒక బాలికల విద్యాలయం చేయుటకు ప్రస్తావించెను. అందరూ ఆనంద పడిరి. విద్యాలయం కొరకు డబ్బును సంగ్రహించుటకు అందరూ పూనుకొనిరి. ప్రతీవారు చేసిన పని అనుసరించి కొంత పరిమాణంలో డబ్బులు ఇచ్చుటకు నిష్పత్తి తీసుకొనిరి.
- దీని కొరకు సీమాదేవి ఊరిలో గల మహిళల పేర్లు, పని మరియు వారికి సంబంధించిన దత్తాంశంనను పొందుటకు ఏ విధమైన పట్టిక చేసెను ? మీరు తయారు చేసిన పట్టికను నీ స్నేహితుని పట్టికతో పోల్చండి.

తెలుసా ?

మన నిత్య జీవితంలో అనేక సంఘటనలు జరుగుతుంటాయి. ఇవి మనకు చాలా అవసరం. వాటికి సంబంధించిన విషయాలను మొదట రాసినచో తరువాత వాటినని చదువుట వల్ల మనకు అనేక సదుపాయాలు కలుగుతాయి.

12.4. దత్తాంశ సేకరణ మరియు వ్యవస్థీకరణ

విద్యాలయంలో స్వాతంత్ర్య దినోత్సవంను జరుపుట కొరకు ప్రధాన ఉపాధ్యాయుడు ఒక సభ ఏర్పాటు చేసెను. స్వాతంత్ర్య దినోత్సవం కొరకు వివిధ పనులకు పిల్లలకు బాధ్యత ఇవ్వడం జరిగెను.

మొదట ఆలోచన చేసి పనులను స్థిర పరిచిరి. అవి విద్యాలయ స్థలం తుడుచుట, పేర్డే నిర్వహణ, ఆటల పోటీలు, మధ్యాహ్న భోజనం పంచుట. ఏ పిల్లలు ఏ పనులు చేయుదురో దానిని క్రింది పట్టికలో ఇవ్వడమైనది

అతిథ	—	పేరడే	అర్పిత	—	తుడడం	శేషదేవ్	—	తుడడం
ఆకుల	—	తుడడం	జీవన్	—	తుడడం	అమిత	—	తుడడం
ఇనా	—	ఆటలు	ఝూన్సీ	—	పేరడే	అక్తర్	—	పేరడే
ఉర్మిళా	—	తుడడం	అశోక్	—	తుడడం	గుంగుర్	—	తుడడం
కమల	—	భోజనం	శఫాలి	—	పేరడే	చర్య	—	పేరడే
ఐశ్వర్య	—	తుడడం	ఆఫ్రిద్	—	తుడడం	గగన్	—	తుడడం
మానిని	—	ఆటలు	మరియు	—	తుడడం	భయన్	—	తుడడం

ఉపాధ్యాయుడు అడిగెను - "ఏ పనులలో ఎంత మంది పిల్లలు గలరు ?

- పమి పట్టికను చదివి లెక్కించి చెప్పెను -

ఆటల పోటీలు	6
భోజనం పంచుట	3
పేరడే నిర్వహణ	4
తుడడం	8

ప్రతీ పనిలో గల పిల్లల సంఖ్యను తెలుసుకొనుటకు పమి 3 సార్లు లెక్కించి పిల్లల సంఖ్యలను చెప్పెను.

- సరళ నేలపై 4 గంటలను గీసి అందులో పనుల పేర్లు రాసెను. ప్రతీ గదిలో ఆ పని కొరకు ప్రతీ పిల్లడికి ఒకొక్క రాయిని ఉంచెను.

పేరడే భోజనం ఆటలు తుడడం

ఉపాధ్యాయుడు అడిగిన వెంటనే సరళ కేవలం ప్రతీ పని కొరకు గదులలో గల రాయి చుక్కలను లెక్కించి వెంటనే పని అనుసరించి పిల్లల సంఖ్యలను చెప్పగలిగెను. ముందు పట్టికలో వెదికినట్లు ఆలస్యం కాలేదు.

- మారియా హఠాత్తుగా నిలబడి చెప్పెను - నేను మరొక విధంగా దీనిని తెలుసుకున్నాను. ఆమె తయారు చేసిన పట్టికను అందరికి చూపించెను.

తుడడం	✔ ✔ ✔ ✔ ✔ ✔ ✔ ✔	8
పేరడే నిర్వహణ	✔ ✔ ✔ ✔	4
ఆటల పోటీలు	✔ ✔ ✔ ✔ ✔ ✔	6
భోజనం పంచడం	✔ ✔ ✔	3

మారియా తయారు చేసిన పట్టిక వల్ల మీరు ఏమి అర్థం చేసుకొనిరి ?

ఈ పట్టికలో గల ✔ గుర్తులు దేనిని సూచించును ?

నలుగురు పిల్లలను పేరడే నిర్వహణ పనిలో ఉంచడమైనది అందువలన పేరడే నిర్వహణ కుడిప్రక్క నాలుగు ✔ గుర్తులు పెట్టడం జరిగింది.

చెప్పండి చూద్దాం

పమి, సరళ మరియు మారియ వివిధ ఉపాయాలతో దత్తాంశంను తెలియజేసిరి. ఎవరి ఉపాయం మీకు బాగా అనిపించింది మరియు ఎందుకు ?

స్వయంగా చేసి చూడండి

- మీ తరగతి పిల్లల యొక్క పేర్లను ఒక పట్టికగా చేయండి.
- ప్రతీ వారి యొక్క తల్లిదండ్రులు ఏఏ పనులు చేసి డబ్బు సంపాదిస్తున్నారో దానిని తెలుసుకొండి.
- ఒక పట్టికను తయారు చేసి దానిని చూపించండి.

రండి మరొక పరిస్థితిని గూర్చి ఆలోచన చేద్దాం -

ఉపాధ్యాయుడు మీనాకు చెప్పెను -

మీ తరగతి పిల్లలు ఉదయం ఏమేమి తింటారో, దీనికి ఒక పట్టికను చేయండి.

❖ మితా దానిని ఏ విధంగా పట్టికలో చూపించెనో పరిశీలించండి.

ఆహారం పేరు	పిల్లల సంఖ్య
అన్నం	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII
టిఫిన్	IIIIIIIIIIIIIIII
పండ్లు	IIIIII

ఆమె ఆహార పదార్థాల పేర్లు క్రింది రాసి ప్రతీ ఆహార పదార్థం కుడి ప్రక్కలలో గుర్తు రాసెను. ఒక పిల్లవానికి (I) గుర్తు పెట్టి చూపించెను.

ఈ పట్టికను చూసి క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

- ఎంత మంది పిల్లలు ఉదయం అన్నం తిని వచ్చారు ?
- ఎంత మంది పిల్లలు ఉదయం టిఫిన్ చేసి వచ్చారు ?
- ఎంత మంది పిల్లలు ఉదయం పండ్లు తిని వచ్చారు ?

❖ మితా యొక్క పట్టికను చూసి జిత్తు మరో విధంగా అమర్చెను. దానిని పరిశీలించండి.

ఆహారం పేరు	గుర్తు	పిల్లల సంఖ్య
అన్నం	(IIIIIIIIII) (IIIIIIIIII) III	23
టిఫిన్	(IIIIIIIIII) IIIIII	16
పండ్లు	IIIIII	6

జిత్తు 10 లెక్క (I) గుర్తులను రాసి వృత్తం గీసెను.

మితా మరియు జిత్తు అమర్చిన పద్ధతులలో ఏ పద్ధతి మీకు నచ్చింది మరియు ఎందుకు ?

❖ దిలీప్ దీనిని అధికంగా సరళంగా చేయుటకు 5 లెక్కగా (|) గుర్తులను ఒకటిగా వృత్తం చుట్టెను.

ఆహారం పేరు	గుర్తు	పిల్లల సంఖ్య
అన్నం	(||||) (||||) (||||) (||||) |||	
టిఫిన్	(||||) (||||) (||||) |	
పండ్లు	(||||) |	

❖ దిలీప్ యొక్క పట్టికను చూచి ఉపాధ్యాయుడు చెప్పెను. ప్రతీ కుండలిలో గల 5 ఒకట్లను 𝍸 ఈ విధంగా రాసినచో లెక్కించుటకు సహజంగా ఉండును. వీటిని టాలీ గుర్తు అందురు. (గణన చిహ్నాలు). అందువలన 𝍸 ||| నకు 5 + 3 అనగా ఎనిమిది అని అర్థము. అదే విధంగా 𝍸 𝍸 ను పదిగా తెలియును.

దీని తరువాత పట్టికను క్రింది విధంగా కనిపించును.

ఆహారం పేరు	గుర్తు	పిల్లల సంఖ్య
అన్నం	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	23
టిఫిన్	𝍸 𝍸 𝍸 |	16
పండ్లు	𝍸 |	6

చెప్పండి చూద్దాం :

ఉపాధ్యాయుడు చెప్పిన పద్ధతిలో పట్టికను తయారు చేసినచో ఏఏ సదుపాయాలు ఉండును ?

అభ్యాసం - 12.1

1. ఒక స్కూల్లో ఆరవ తరగతి పిల్లల యొక్క ఎత్తులను క్రింది పట్టికలో సె.మీ.లలో ఇవ్వడమైనది.

120	135	125	120	145	125	135
125	120	135	145	120	135	145
135	145	120	135	125	135	125
145	120	145	120	135	145	145
145	135	125	120	135	125	135

- పై దత్తాంశంను తీసుకొని టాలీ గుర్తులను ఉపయోగించి ఒక పట్టికను తయారు చేయండి.
- ఎన్ని సె.మీ. ఎత్తు గల పిల్లలు తరగతిలో ఎక్కువ గలరు ?
- ఎన్ని సె.మీ. ఎత్తు గల పిల్లలు తరగతిలో తక్కువ గలరు ?

2. మీ తరగతిలో ప్రతీ పిల్లల యొక్క అన్ని పిల్లల సంఖ్య (మిమ్మల్ని విడిచి) అడిగి తెలుసుకొండి. దీనిని తీసుకొని టాలీ గుర్తులు ఉపయోగించి ఒక పట్టికను మీ నోట్‌బుక్‌లో తయారు చేయండి.

అన్నా చెల్లెలు వున్న పిల్లలుటాలీ గుర్తులు	సంఖ్య	
పూర్తిగా అన్నా చెల్లెలు లేని పిల్లలు		
ఒక అన్నా చెల్లెలు		
ఇద్దరు అన్నా చెల్లెలు		
ముగ్గురు అన్నా చెల్లెలు		
నలుగురు అన్నా చెల్లెలు		
4 గురు కంటె ఎక్కువ అన్న చెల్లెలు		

ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబు లివ్వండి.

- ఎంత మంది పిల్లలకు పూర్తిగా అన్న చెల్లెలు లేరు ?
- ఎంత మంది పిల్లలకు 4గురు కంటె ఎక్కువ అన్న చెల్లెలు గలరు ?
- అదే విధంగా మీరు ఈ పట్టికను చూసి దాని నుండి& కొన్ని ప్రశ్నలను తయారు చేయండి మరియు మీ స్నేహితులకు చూపించండి.

3. అర్పిత స్కూలు ముదు నిలుచొని స్కూల్లో జరిగే సభకు వివిధ రకాల బట్టలు వేసుకొని వస్తున్న పురుషులను వారి బట్టల ననుసరించి లెక్కించి ఒక పట్టిక చేసెను.

బట్టల రకం	టాలీ గుర్తులు	ప్రజల సంఖ్య
లుంగీ మరియు షర్టు వేసుకున్నవారు	𝍸 𝍸 I	
పంచె మరియు తువ్వాల్ వేసుకున్నవారు	𝍸 𝍸 𝍸 III	
పంచె మరియు లాల్చి వేసుకున్నవారు	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	
పేంటు మరియు షర్టు వేసుకున్నవారు	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	

క్రింది ప్రశ్నల సమాధానాలు రాయండి.

- ఏ రకమైన బట్టలు ధరించి ఎంత మంది వచ్చిరి ?
- అధికంగా పురుషుల ఏ రకమైన బట్టలు ధరించిరి ?
- మొత్తం ఎంత మంది తల్లిదండ్రులు విద్యాలయంనకు వచ్చిరి ?
- పేంటు షర్టు ధరించిన వారి సంఖ్య, లుంగీ షర్టు ధరించిన వారి కంటె ఎంత అధికం ?
- ఈ విధంగా కొన్ని ప్రశ్నలను తయారు చేయండి మరియు మీ స్నేహితునికి అడగండి.

12.5 బేసి సంఖ్యల మజా

- మొదటి రెండు బేసి సంఖ్యలను రాయండి.
- ఆ రెండింటిని కలపండి. మొత్తం ఎంత వచ్చింది ?

మొదటి రెండు బేసి సంఖ్యలు 1 మరియు 3. వీటి మొత్తం 4 అగును.

$1 + 3 = 4 = 2 \times 2$

పరిశీలించండి, మొదటి రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం ఒక సరిసంఖ్య మరియు ఒక పూర్ణవర్గ సంఖ్య.

> **తెలుసా ?**
>
> 4,9,16 .... మొదలైన సంఖ్యలను పూర్ణవర్గ సంఖ్యలందురు. ఏదైనా సంఖ్యను ఆ సంఖ్యచే గుణించినచో గుణఫలం పూర్ణవర్గ సంఖ్య అగును.

- ఇప్పుడు మొదటి మూడు బేసి సంఖ్యలను తీసుకొని వాటి మొత్తంను కనుగొనుము.

$1 + 3 + 5 = 9 = 3 \times 3$

ఈ విధంగా తరువాత వరుసలో గల మరొక బేసి సంఖ్యను తీసుకొని మీరు ఏమి పొందారో చూడండి.

$1 + 3 = 4 = 2 \times 2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3 \times 3$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 \times 4$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = __ = __ \times __$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = __ = __ \times __$

మీరు ఈ విధంగా ఎంత వరకు వెళ్లగలరో వెళ్లండి.

12.6. పూర్ణవర్గ సంఖ్యల మజా

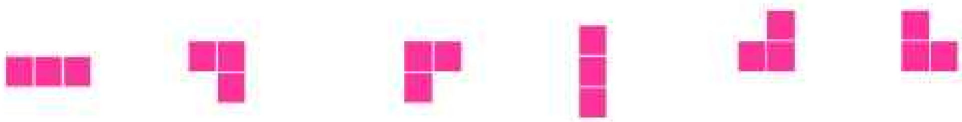
మనకు ముందుగా తెలుసు, 1,4,9,16 ... మొదలైనవి ఒకొక్క పూర్ణవర్గ సంఖ్య

రండి ఈ సంఖ్యలను బొమ్మలలో తెలియజేద్దాం

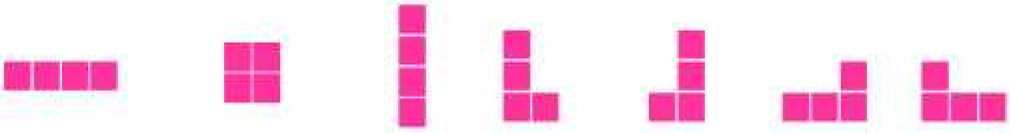
■ బొమ్మ ఒక యూనిట్‌ను సూచించును. అందువలన 1ని సూచించుటకు ■ ఉపయోగించుదురు.

అదే విధంగా, సంఖ్య 2ను సూచించుటకు ■ ఉపయోగించ వచ్చును.

సంఖ్య 3ను సూచించుటకు మూడు ఒకొక్క యూనిట్ల ■ అవసరం. దీనిని వివిధ రకాలలో చూపించవచ్చును.



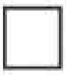
- అదే విధంగా 4నకు బొమ్మల రూపంలో వేరు వేరు ఉపాయాలతో తెలియ జేయగలం.

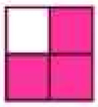


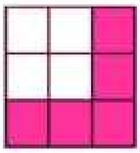
మీరు అదే విధంగా 5,6,7,8 మరియు 9లను వివిధ ఉపాయాలతో బొమ్మలలో తెలియ జేయండి.

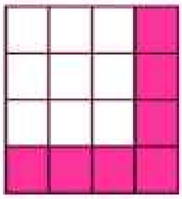
పరిశీలించండి, 4 మరియు 9 వంటి పూర్ణవర్గ సంఖ్యలను తెలియజేయ వచ్చును. కాని వేరే సంఖ్యలను సమచతురస్రమంలో తెలియ జేయలేము.

వరుస సంఖ్య వర్గమును సమచతురస్రంలో తెలియ జేయుటకు చూడండి -

$(1)^2$ =  = **0** + **1** = 1

$(2)^2$ =  = **1** + **3** = 4

$(3)^2$ =  = **4** + **5** = 9

$(4)^2$ =  = **9** + **7** = 16

పరిశీలించండి, ప్రతీ పూర్ణవర్గ సంఖ్యను రెండు సంఖ్యల మొత్తంగా తెలియజేయడమైనది.

ఈ క్రమంలో $(5)^2$ మరియు $(6)^2$లను సమచతురస్రంలో చూపించి ఒక పూర్ణవర్గ సంఖ్య మరియు బేసి సంఖ్యల మొత్తంగా చూపించండి.

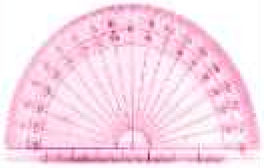
పదమూడవ అధ్యాయం

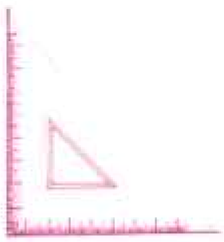
ప్రాయోగిక జ్యామితి

13.1. పరిచయం

మీ జ్యామితి బాక్సులో గల అన్ని వస్తువుల పేర్లు మీకు తెలుసా. రండి వాటి యొక్క కొన్ని ఉపయోగాల గూర్చి తెలుసుకుందాం.

స్కేలు


ప్రొట్రాక్టర్


సెట్‌స్క్వేయర్

వస్తువు పేరు	ఉపయోగం
స్కేల్	• సరళరేఖలు మరియు రేఖాఖండాల నిర్మాణం • రేఖాఖండాల పొడవులు నిర్ణయించుట • నిర్ధిష్ట కొలత గల రేఖాఖండాల నిర్మాణం
ప్రొట్రాక్టర్	• కోణం యొక్క కొలత తెలుసుకొనుట • నిర్ధిష్ట కొలత గల కోణంను నిర్మించుట
సెట్‌స్క్వేయర్	• రేఖాఖండంపై గల ఏదైనా బిందువుపై లంబంను నిర్మించుట
కంపాస్	• వృత్తంను నిర్మించుట నిర్ధిష్ట కొలత గల రేఖాఖండం నిర్మించుట

కంపాస్

సెట్‌స్క్వేయర్

డివైడర్

చెప్పండి చూద్దాం :
డివైడర్‌ను ఏ ఏ పనులందు ఉపయోగించ వచ్చును ?

ముందు తరగతిలో మీరు స్కేల్‌ను ఉపయోగించి ఒక నిర్ధిష్ట కొలత గల రేఖాఖండంను నిర్మించుట గూర్చి నేర్చుకున్నారు. కంపాస్‌ను ఉపయోగించి ఒక నిర్ధిష్ట పొడవు గల రేఖాఖండం ఏ విధంగా నిర్మించాలి అనే దానిని నేర్చుకుందాం రండి.

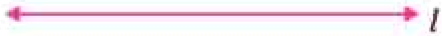
కంపాస్ = వృత్తలేఖిని, స్కేలు = కొలబద్ద
డివైడర్ = విభాగిని, ప్రొట్రాక్టర్ = కోణమాని

ఉదాహరణ - 1

కంపాస్ ఉపయోగించి 5 సె.మీ.ల పొడవు గల ఒక రేఖాఖండంను నిర్మించండి.

మొదటి సోపానం :

మొదట ఒక సరళరేఖను నిర్మించుట

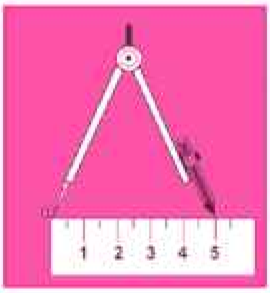


రెండవ సోపానం :

ఈ సరళరేఖపై ఒక బిందువును గుర్తించండి. దాని పేరు C పెట్టండి.

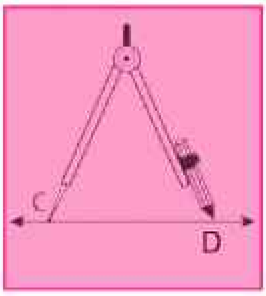
మూడవ సోపానం :

ఒక స్కేల్‌ను తీసుకొండి. స్కేల్‌పై గల 'O' గుర్తుపై కంపాస్ యొక్క సూదిని ఉంచి దానిని వెడల్పు చేసి పెన్సిల్ వాడిని స్కేల్‌పై గల 5 పై ఉంచండి.



నాల్గవ సోపానం :

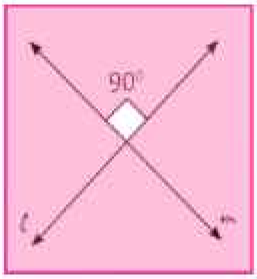
ఇప్పుడు కంపాస్‌ను తీసి మీరు ముందు నిర్మించిన సరళరేఖపై గల 'C' బిందువుపై కంపాస్ సూదిని ఉఉంచండి. పెన్సిల్ నుండి సరళరేఖపై ఎచ్చట ఉండునో దాని పేరు A పెట్టండి. ఇప్పుడు $\overline{CD}$ రేఖాఖండం పొడవు 5 సె.మీ. అగును.



అభ్యాసం - 13.1

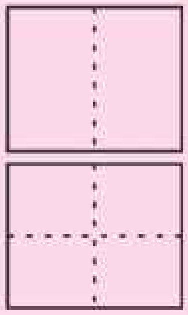
1. కేవలం స్కేల్‌ను ఉపయోగించి 4.2 సె.మీ మరియు 6 సె.మీ కొలతతో రేఖాఖండాలను నిర్మించండి.
2. స్కేల్ మరియు కంపాస్‌ను ఉపయోగించి 6.8 సె.మీ.ల పొడవు గల రేఖాఖండమును నిర్మించండి.
3. స్కేల్‌ను ఉపయోగించి 8 సె.మీ. పొడవు గల $\overline{AB}$ రేఖాఖండంను నిర్మించండి. ఆ $\overline{AB}$ రేఖాఖండం నుండి 4.5 సె.మీ. పొడవు గల $\overline{AC}$ రేఖాఖండంను తీసివేయండి. $\overline{BC}$ యొక్క పొడవును కొలవండి.
4. కేవలం స్కేల్‌ను ఉపయోగించి 5 సె.మీ.ల పొడవు గల రేఖాఖండంను నిర్మించునపుడు ఏఏ సోపానాలు మీదుగా నిర్మాణం చేయాలో రాయండి.

13.2. లంబం మరియు సమద్విఖండ లంబం



రెండు రేఖాఖండాలు ఎప్పుడు పరస్పరం లంబంలగును ?

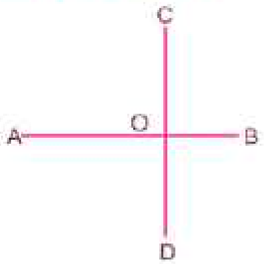
ఒకవేల రెండు రేఖాఖండాలు పరస్పరం ఖండించినచో ఖండన బిందువు వద్ద 90°ల కోణం ఏర్పడును. కనుక ఆ రేఖాఖండాలు పరస్పరం లంబంలగును. ఈ బొమ్మలో *l* మరియు m రెండు సరళరేఖలు పరస్పరం లంబాలు.



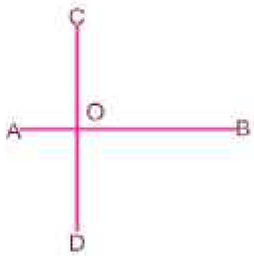
- ఒక కాగితం ముక్కను తీసుకొనుము.
- దీనిని మొదట రెండు మడతలుగా చేసి, నొక్కి మడత కనబడునట్లు చేయండి.
- దీనికి సరిగ్గా మధ్యలో వేరే ప్రక్కగా మడత పెట్టండి మరియు నొక్కి మడత కనబడునట్లు చేయండి.
- ఇప్పుడు కాగితంను విడదీయండి.
- కాగితంపై ఏర్పడిన రెండు మడతలు పరస్పరం లంబం లగును.

మీ దగ్గర పరిసరాలలో ఎచ్చటెచ్చట లంబములు ఏర్పడుట పరిశీలిస్తున్నారో రాయండి.

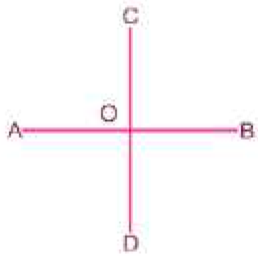
13.2.1. సమద్విఖండ లంబం



మొదటి చిత్రం



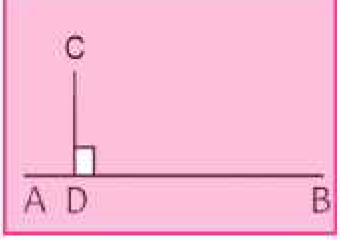
రెండవ చిత్రం



మూడవ చిత్రం

పైన ఇవ్వబడిన మూడు బొమ్మలను చూడండి. ప్రతీ బొమ్మలో $\overline{AB}$ మరియు $\overline{CD}$ లను పరిశీలించండి. $\overline{AB}$ పై $\overline{CD}$ లంబం నిర్మించుట ద్వారా 'O' బిందువు $\overline{AB}$ నకు $\overline{AO}$ మరియు $\overline{OB}$ గా రెండు భాగాలు చేయుచున్నది. మొదటి మరియు రెండువ బొమ్మలలో $\overline{AO}$ మరియు $\overline{OB}$ ల పొడవులు సమానం కావు (కొలిచి చూడండి). కాని మూడువ బొమ్మలో $\overline{AO}$ మరియు $\overline{OB}$ కొలత సమానం. మూడువ బొమ్మలో $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ యొక్క సమద్విఖండ లంబం. రండి సమద్వఖండ లంబం ఏ విధంగా నిర్మించాలి నేర్చుకుందాం.

13.2.2. రేఖాఖండంపై సమద్విఖండ లంబం నిర్మించుట



ఇచ్చిన బొమ్మను పరిశీలించండి.

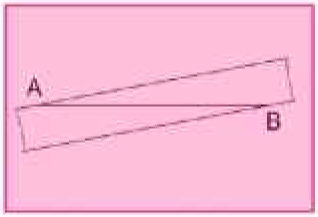
ఇచ్చట $\overline{AB}$ ఒక రేఖాఖండం. $\overline{AB}$ రేఖాఖండంపై 'D' ఒక బిందువు. D బిందువు వద్ద $\angle CDB$ ఏర్పడినది. $\angle CDB$ యొక్క కొలత 90°, ఇచ్చట $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ పై లంబం. దీనిని ఈ విధంగా రాయుదురు. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

మొదటి సోపానం :

$\overline{AB}$ రేఖాఖండంను నిర్మించుము.

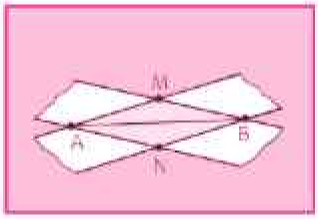
రెండవ సోపానం :

ఒక స్వచ్ఛమైన దీర్ఘచతురస్రకారపు టేపును నిర్మించిన రేఖాఖండంపై ఉంచండి. రేఖాఖండం రెండుఅ చివరి బిందువులు A మరియు B టేపు యొక్క రెండు వ్యతిరేక అంచులను తాకును. (టేప్ బదులుగా నూనె కాగితంను కూడా ఉపయోగించ వచ్చును).



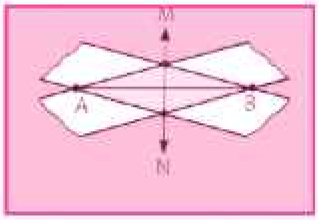
మూడువ సాపానం :

మరొక దీర్ఘచతురస్రకారపు టేప్‌ను తీసుకొనుము. రెండువ సోపానం వలే టేప్‌ను $\overline{AB}$ రేఖాఖండంపై ఉంచండి. దాని రెండు బిందువులు A మరియు B టేప్ యొక్క వ్యతిరేక అంచులకు తాకును. బొమ్మలో చూపినట్లు రెండు టేప్‌లు పరస్పరం M మరియు N బిందువు వద్ద ఖండించును.



నాల్గవ సోపానం :

$\overline{MN}$ ను నిర్మించండి. $\overline{AB}$ మరియు $\overline{MN}$ రెండు ఏ బిందువు వద్ద పరస్పరం ఖండించునో దాని పేరు 'P' పెట్టండి. P బిందువు వద్ద ఏర్పడిన నాలుగు కోణాలు మరియు కోణాలను కొలండి. $\overline{AP}$ మరియు $\overline{BP}$ ల యొక్క పొడవులను కనుగొనండి. ఏమి లభించెను ?

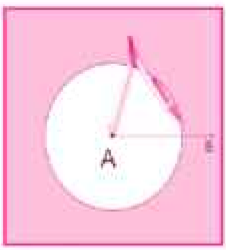


ఇచ్చట $\overline{MN}$, $\overline{AB}$ ల సమద్విఖండన లంబం.

13.2.3. స్కేల్ మరియు కంపాస్ సహాయంతో సమద్విఖండన లంబం నిర్మించుట

మొదటి సోపానం :

ఏదైనా పొడవు గల ఒక రేఖాఖండం $\overline{AB}$ నిర్మించండి.

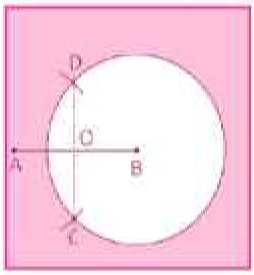


రెండవ సోపానం :

A నకు కేంద్ర బిందువు మరియు $\overline{AB}$ యొక్క పొడవునకు సగం కంటె ఎక్కువ కొలత వ్యాసార్ధంతో ఒక వృత్తంను నిర్మించండి.

మూడువ సోపానం :

మూడు వ్యాసార్ధంను మార్చకుండా B బిందువు వద్ద మరొక వృత్తంను నిర్మించండి. ముందుగా నిర్మించబడిన వృత్తంనకు ఇది C మరియు D బిందువుల వద్ద ఖండించును.



నాల్గవ సోపానం :

$\overline{CD}$ నిర్మించండి. ఇది $\overline{AB}$ నకు 'O' బిందువు వద్ద ఖండించును. 'O' బిందువు $\overline{AB}$ నకు రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించునో లేదో పరీక్షించి చూడండి. 'O' బిందువు వద్ద ఏర్పడిన కోణాల పరిమాణాలను కొలవండి. $\overline{CD}$ కు $\overline{AB}$ యొక్క సమద్విఖండన లంబమని అంటామా ? ఎందుకు ?

పరీక్షించి చూడండి

$\overline{AB}$ పొడవునకు సగం కంటె తక్కువ కొలత గల వ్యాసార్థంతో రెండువ తీసినచో ఏమి జరుగును ?

అభ్యాసం - 13.2

1. 7.6 సె.మీ. పొడవు గల ఒక రేఖాఖండంను నిర్మించి దీనికి సమద్విఖండన లంబం నిర్మించుము.
2. 8.4 సె.మీ. పొడవు గల ఒక రేఖాఖండం $\overline{AB}$ ని నిర్మించండి. దీనిని సమద్విఖండనన చేసి మధ్య బిందువును 'C' పేరు పెట్టండి. ప్రస్తుతం $\overline{AC}$ మరియు $\overline{BC}$ ప్రతీ దానిని సమద్విఖండన చేయండి. రేఖాఖండం ఎన్ని సమాన పొడవులు గల భాగాలుగా అయ్యెను. ప్రతీ భాగం యొక్క కొలత ఎంత అగునో చూపండి.

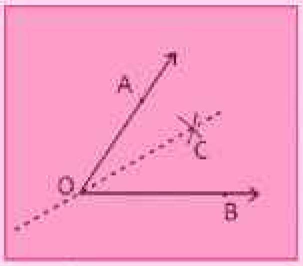
3.క) 4 సె.మీ. వ్యాసార్థం గల ఒక వృత్తంను నిర్మించండి. ఆ వృత్తంలో ఒక జ్యాను నిర్మించండి. ఈ జ్యా యొక్క సమద్విఖండన లంబంను నిర్మించండి. ఇది వృత్తం యొక్క కేంద్ర బిందువు నుండి పోవుచున్నదా ?

ఖ) ఏదైనా ఒక కొలతతో వ్యాసార్థంను తీసుకొని ఒక వృత్తంను నిర్మించండి. దీనికి ఒక జ్యా నిర్మించి దాని సమద్విఖండ లంబం నిర్మించండి. ఈ సమద్విఖండ లంబం వృత్త కేంద్ర బిందువు గూండా పోవుచున్నదా ?

13.3. కోణము యయొక్క సమద్విఖండన

కాగితంను మడత పెట్టి, స్కేల్ మరియు కంపాస్‌ను ఉపయోగించి మనం ఏదైనా కోణం యొక్క సమద్విఖండన రేఖ నిర్మించగలం.

స్వయంగా చేసి చూడండి

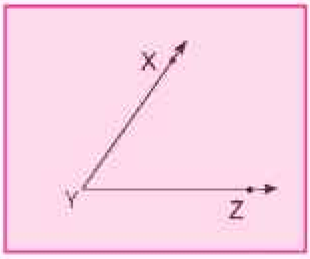


- ఒక దీర్ఘచతురస్రకారపు కాగితంను తీసుకొనుము.
- బొమ్మలో ఇచ్చినట్లు దానిలో 'O' పేరు గల బొమ్మను గుర్తించండి.
- 'O' ను మూల బిందువుగా తీసుకొని రెండు రాశ్మిలు $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{OB}$ లను నిర్మించండి.
- 'O' బిందువు గూండా కాగితంను మడత పెట్టండి. $\overrightarrow{OA}$ మరియు $\overrightarrow{OB}$ పరస్పరం పైన ఉ ండును.
- కాగితంపై బమాగా ఒత్తండి మరియు దాని పేరు $\overrightarrow{OC}$ పెట్టండి.
- ఇప్పుడు చూడండి $\angle AOC$ మరియు $\angle BOC$ ల పరిమాణం సమానమా ?

$\overrightarrow{OC}$, $\angle AOB$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ అగును.

ప్రక్క చిత్రంలో $\angle Y$ నకు చూపించడమైనది.

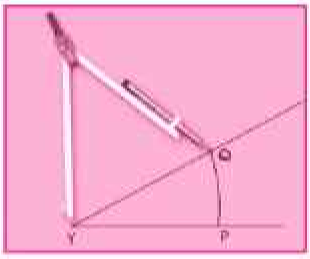
ఇప్పుడు చెప్పండి, $\angle Y$ యొక్క శీర్ష బిందువు మరియు సన్నిహిత భుజాల పేర్లు ఏమిటి ?



రండి ఇప్పుడు స్కేల్ మరియు కంపాస్‌ను ఉపయోగించి కోణం యొక్క సమద్విఖండన నిర్మిద్దాం.

మొదటి సోపానం :

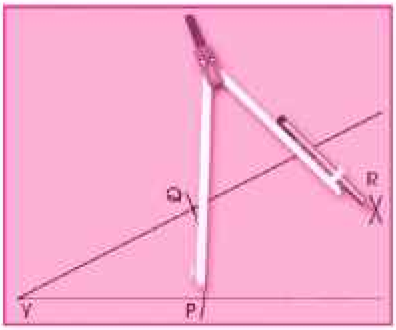
Y బిందువును కేంద్రంగా తీసుకొని కంపాస్ సహాయంతో ఒక చాపంను నిర్మించండి. అది A యొక్క రెండు సన్నిహిత రశ్మిలను ఖండించును. ఈ రెండు బిందువుల పేర్లు P మరియు Q గా పెట్టండి.



రెండవ సోపానం :

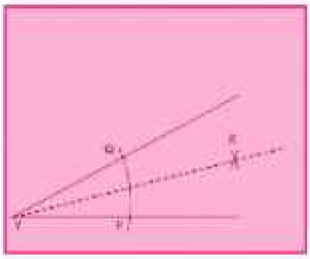
ఇప్పుడు P ని కేంద్రంగా తీసుకొని $\angle Y$ యొక్క అంతఃభాగంలో ఒక చాపంను నిర్మించండి. (గుర్తించండి - ఈ చాపం యొక్క వ్యాసార్థం $\overline{PQ}$ యొక్క పొడవునకు సగం కంటె ఎక్కువ ఉండాలి)

అదే విధంగా Q ని కేంద్రంగా తీసుకొని $\angle Y$ యొక్క అంతఃభాగంలో సమాన వ్యాసార్థంతో మరొక చాపం నిర్మించండి. అని రెండవ సోపానం వలె నిర్మించిన చాపంను ఖండించును.



మూడవ సోపానం :

ఖండన బిందువు పేరు R పెట్టండి. Y మరియు R లను కలపండి. (పరీక్షించి చూడండి : $\overline{YR}$, $\angle Y$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ అగును)



పరీక్షించి చూడండి

P మరియు Q బిందువుల నుండి Y యొక్క అంతఃభాగంలో చాపాలను నిర్మించినపుడు రెండు సార్లు సమాన వ్యాసార్థం గల చాపాలను నిర్మించాలి. వేరు వేరు వ్యాసార్థం గల చాపాలను తీసుకున్నచో కోణం యొక్క సమద్విఖండన రేఖా లభించునో లేదో పరీక్షించి చూడండి.

అభ్యాసం - 13.3

1. ప్రొట్రాక్టర్ సహాయంతో 50° కొలత గల ఒక కోణంను నిర్మించండి. దీని యొక్క సమద్విఖండన రేఖను నిర్మించండి
2. ఒక సమకోణం యొక్క సమద్విఖండన రేఖను నిర్మించండి.
3. 80° పరిమాణం గల ఒక కోణంను నిర్మించి దానికి నాలుగు సమాన భాగాలుగా విభజన చేయండి.

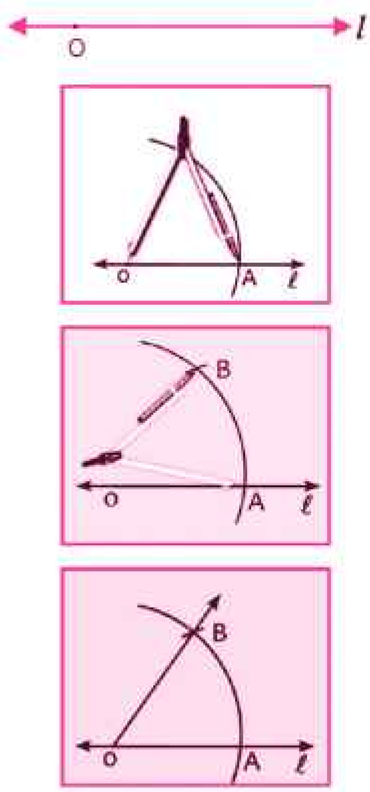
13.4. కంపాస్ సహాయంతో కోణంను నిర్మించుట

ప్రొట్రాక్టర్ సహాయంతో కోణం నిర్మించుట మనం ముందుగా నేర్చుకున్నాం.

ప్రొట్రాక్టర్‌ను ఉపయోగించి 60° కోణమును నిర్మించడానికి అవసరమైన సోపానాలను రాయండి.

13.4.1. కంపాస్ సహాయంతో 60° పరిమాణం గల కోణ నిర్మాణం మొదటి సోపానం :

ఒక సరళరేఖను నిర్మించండి. దాని పేరు 'l' అని పేరు పెట్టండి. 'l' సరళరేఖపై 'O' బిందువును గుర్తించండి.



రెండవ సోపానం :

కంపాస్ యొక్క సూదిని 'O' బిందువు వద్ద ఉంచండి. ఏదైనా వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపంను నిర్మించండి. అది 'l' సరళరేఖను 'A' బిందువు వద్ద ఖండించును.

మూడవ సోపానం :

ఇప్పుడు కంపాస్ సూదిని 'A' వద్ద ఉంచి ఒక చాపంను నిర్మించండి. అది A బిందువు నుండి ముందుగా గల చాపంనకు 'B' బిందువు వద్ద ఖండించును.

నాల్గవ సోపానం :

O మరియు B బిందువులను కలపండి. మీరు $\angle AOB$ ని పొందగలరు. దాని కొలత 60° ఉండును. ప్రొట్రాక్టర్ సహాయంతో కొలిచి చూడండి.

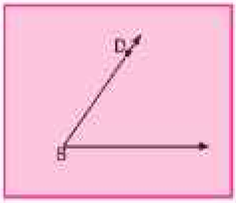
> **తెలుసా ?**
>
> రెండవ సోపానంలో చాపం నిర్మించినపుడు మరియు మూడవ సోపానంలో చాపం నిర్మించినపుడు చాపాల వ్యాసార్ధాలు సమానంగా ఉండాలి.

13.4.2. 120° పరిమాణం గల కోణ నిర్మాణం

మనకు తెలుసు , 120° అనగా 60° యొక్క రెండు వంతులు. అందువలన 60°ల కోణంను నిర్మించి దానిలో మరొక 60° కొలత గల కోణంను నిర్మించినచో రెండు కోణాలు 120° కొలత గల కోణం ఏర్పడును.

మొదట 60° కొలత గల కోణమును నిర్మించండి. అనగా $m\angle CBD = 60^\circ$

◆ ప్రస్తుత $\overline{BD}$ పై గల B బిందువు వద్ద మరొక 60^0 కోణంను నిర్మించినచో మీరు 120^0 కోణమును పొందెదరు.

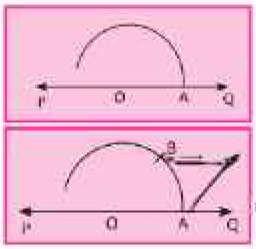


(క)

రండి స్కేల్ మరియు కంపాస్ సహాయంతో నిర్మిద్దాం.

మొదటి సోపానం :

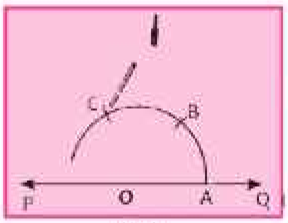
$\overleftrightarrow{PQ}$ ను నిర్మించండి. దీనిపై 'O' బిందువును తీసుకొండి. 'O' బిందువును కేంద్రంగా చేసి ఏదైనా వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపంను నిర్మించండి. అది $\overleftrightarrow{PQ}$ నకు A బిందువు వద్ద ఖండించును. A నకు కేంద్రముగా చేసి ముందు వ్యాసార్ధంతో మరొక చాపంను నిర్మించండి అది మొదటి చాపంను ఖండించును. ఆ బిందువు పేరు B పెట్టండి.



(ఖ)

రెండువ సోపానం :

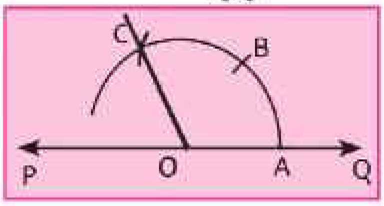
మరల B ని కేంద్రంగా తీసుకొని ఆ పరిమాణంతో మరొక చాపంను నిర్మించండి. అది మొదటి చాపంను ఖండించును. ఆ బిందువు పేరు C పెట్టండి.



(గ)

మూడువ సోపానం :

C మరియు O లను కలిపి $\overline{OC}$ ని నిర్మించండి. $\angle COA$ యొక్క పరిమాణం 120^0 (ప్రొట్రాక్టర్ సహాయంతో పరీక్షించి చూడండి)



(ఘ)

150^0 పరిమాణం గల కోణంను ఏ విధంగా నిర్మించగలరు ?

13.4.3. 900 పరిమాణం గల కోణ నిర్మాణం

మొదటి సోపానం :

$\overline{BY}$ రశ్మిని నిర్మించుట.

(ఙ)

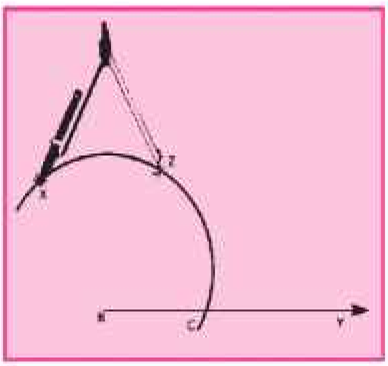
రెండువ సోపానం :

'B' ని కేంద్రంగా తీసుకొని ఏదైనా వ్యాసార్ధంతో రశ్మిపై ఒక చాపంను నిర్మించండి. అది $\overline{BY}$ ని C బిందువు వద్ద ఖండించును.

మూడువ సోపానం :

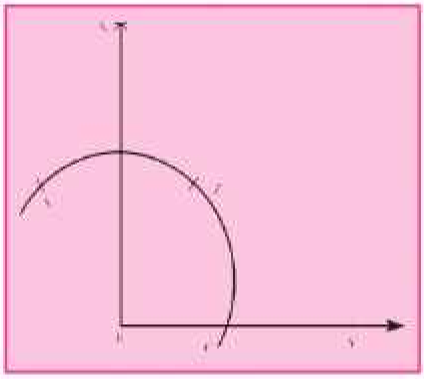
దీని తరువాత C బిందువును కేంద్రంగా చేసుకొని BC వ్యాసార్ధంతో మరో చాపంను నిర్మించండి మరియు అది మొదటి చాపంను ఖండించును. దీని పేరు 'Z' పెట్టండి.

Z బిందువు వద్ద కంపాస్ సూదిని ఉంచి మరల సమాన వ్యాసార్ధంతో మరొక చాపంను నిర్మించండి. అది పెద్ద చాపంను x బిందువు వద్ద ఖండించును.



గమనిక : కంపాస్ = వృత్త లేఖిని, సూది = లోహపు ముల్లు

నాల్గవ సోపానం :



ఇప్పుడు Z బిందువు వద్ద కంపాస్ యొక్క సూదిని ఉంచి ఒక చాపంను నిర్మించండి.

X బిందువు వద్ద కంపాస్ సూదిని ఉంచి మరొక చాపంను నిర్మించండి. రెండు చాపాలు పరస్పరం K బిందువు వద్ద ఖండించును.

ఐదవ సోపానం :

ఇప్పుడు $\overline{KB}$ ని నిర్మించండి. A యొక్క కొలత 90° అగును. $\angle KBY$ యొక్క పరిమాణం 90° ఉండునో లేదో ప్రొట్రాక్టర్ సహాయంతో కొలచి చూడండి.

చెప్పండి చూద్దాం :

$\angle KBY$ యొక్క పరిమాణం 90° ఉండునో లేదో తెలుసుకొనుటకు ప్రొట్రాక్టర్ కాకుండా దేనిని ఉపయోగించగలం.

అభ్యాసం - 13.4

1. క్రింద కొన్ని కోణాలు పరిమాణాలు రాయడమైనది. కేవలం స్కేల్ మరియు కంపాస్ సహాయంతో ఏ కోణాలు నిర్మించగలమో ఎంచి రాయండి.

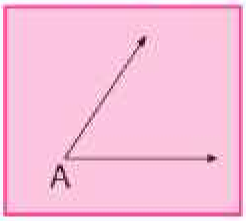
   60°, 35°, 40°, 90°, 30°, 110°, 45°, 20°, 15°, 75°, 100°, 150°

2.క) కంపాస్ సహాయంతో 60° మరియు 120° కోణాలను నిర్మించండి.

ఖ) 60° కోణమును ఏ విధంగా నిర్మించారో దాని సోపానాలను రాయండి.

3. స్కేల్ మరియు ప్రొట్రాక్టర్‌ను ఉపయోగించి 90° కోణమును నిర్మించండి. కంపాస్ సహాయంతో దానిని సమద్విఖండన చేయండి.

13.5. కోణము యొక్క సమపరిమాణం గల మరో కోణ నిర్మాణం : (స్కేలు మరియు కంపాస్ సహాయంతో)

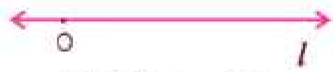


అనుకొనుము, ఒక కోణము ఇవ్వడమైనది (దాని పరిమాణం మనకు తెలియదు). ఆ కోణంనకు సమపరిమాణం గల మరో కోణంను నిర్మిద్దాం. ఏ విధంగా నిర్మించ వచ్చును ?

చిత్రంలో $\angle A$ ఇవ్వడమైనది. దాని పరిమాణం తెలియదు.

మొదటి సోపానం :

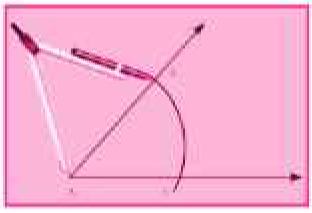
ఒక సరళరేఖ l ను నిర్మిద్దాం. l సరళరేఖపై 'O' బిందువును తీసుకుందాం. (దీని O బిందువు వద్ద $\angle A$ యొక్క సమపరిమాణం గల కోణమును నిర్మిద్దాం)



1వ సోపానం బొమ్మ

రెండవ సోపానం :

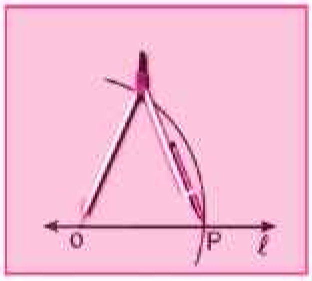
ఇప్పుడు ∠A యొక్క శీర్షబిందువుపై కంపాస్ సూదిని ఉంచి ఒక చాపంను నిర్మిద్దాం. అది ∠A యొక్క రెండు సన్నిహిత రశ్మిలను B మరియు C బిందువుల వద్ద ఖండించును.



2వ సోపానం బొమ్మ

మూడువ సోపానం :

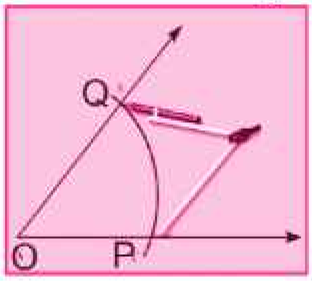
వృత్త లేఖినిని ఆ విధంగా ఉంచి (ఏ మార్పు చేయకుండా) O ను కేంద్రంగా తీసుకొని ఒక చాపంను నిర్మించుము. అది *l* నకు P బిందువు వద్ద ఖండించును.



3వ సోపానం బొమ్మ

నాల్గవ సోపానం :

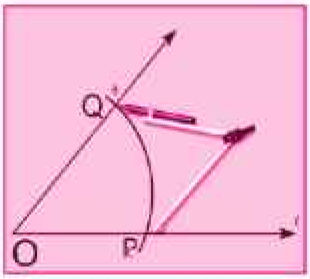
ఇప్పుడు వృత్తలేఖిని లోహపు ముల్లు మరియు పెన్సిల్ యొక్క ముల్లును అమర్చండి. లోహపు ముల్లు B మరియు పెన్సిల్ ముల్లు C పై ఉండును.



4వ సోపానం బొమ్మ

ఐదవ సోపానం :

నాల్గవ సోపానంలో వృత్తలేఖిని ఏ విధంగా గలదో దానిని మార్చకుండా వృత్తలేఖిని లోహపు ముల్లును P పై ఉంచండి. పెన్సిల్ ముల్లు ముందు నిర్మించిన చాపంను ఏ బిందువు వద్ద ఖండించునో దాని పేరు Q పెట్టండి.



5వ సోపానం బొమ్మ

ఆరవ సోపానం :

Q మరియు O ను కలపండి. ఇప్పుడు ∠POQ యొక్క పరిమాణం ∠BAC యొక్క పరిమాణంతో సమానం అగును.

స్వయంగా చేసి చూడండి

- ఒక తెల్లని కాగితం ముక్కను తీసుకొని దానిపై ఒక కోణమును నిర్మించండి.
- మరోక నూనెకాగితం తీసుకొని దానిని ఆ కోణంపై వేయండి.
- ప్రస్తుతం మీరు నిర్మించిన కోణం నూనెకాగితంలో కనిపించును.
- ఇప్పుడు నీవు నిర్మించిన కోణంను నూనెకాగితంపై గీయండి. (స్కేలు సహాయంతో)
- ప్రస్తుతం తెల్లకాగితం మరియు నూనె కాగితంపై సమాన పరిమాణం గల కోణాలను పొందిరి.

అభ్యాసం - 13.5

1.క) మీ నోట్‌బుక్‌లో ఒక అల్పకోణం మరియు ఒక అధిక కోణంలను నిర్మించండి. వృత్తలేఖిని సహాయంతో ఆ రెండు కోణాల యొక్క సమ పరిమాణం గల కోణాలను నిర్మించండి.

ఖ) ఇప్పుడు మీరు పొందిన రెండు కోణాలను సమద్విఖండన చేయండి.

2. కాగితంను కోసి ఒక త్రిభుజంను తయారు చేయండి దాని పేరు ABC అని పెట్టండి. ఈ త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాల సమపరిమాణం కోణాలను వేరు వేరుగా మీ నోట్‌బుక్‌లో నిర్మించండి.

13.6. వృత్తలేఖిని ఉపయోగించి లంబంను నిర్మించుట

ఏదైనా రేఖాఖండంపై ఒక బిందువు వద్ద నిర్మించుటను నేర్చుకున్నారు. ఇప్పుడు ఒక నిర్దిష్ట బిందువు నుండి ఒక రేఖాఖండం లంబం నిర్మించు ఉపాయం తెలుసుకుందాం. ఆ బిందువు సరళరేఖపై గల బిందువు కావొచ్చును లేక సరళరేఖ వెలుపల గల బిందువు కావచ్చును.

13.6.1. రేఖాఖండంపై గల బిందువు నుండి లంబ నిర్మాణం

క) కాగితం మడత పెట్టు పద్ధతి

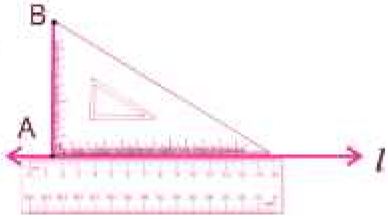
స్వయంగా చేసి చూడండి

- ఒక తెల్లని కాగితం (నూనెకాగితం)ను తీసుకొనుము.
- దీనిపై ఒక రేఖాఖండంను నిర్మించుము. దీని పేరు 'l' అని పెట్టుము.
- 'l' పై ఒక బిందువు 'A' తీసుకొనుము.
- ఇప్పుడు 'A' బిందువుపై కాగితంను మడత పెట్టు. ఇది రెండు ప్రక్కల గల రేఖాఖండ భాగాలు పరస్పరం పైన ఉండును.
- ఇప్పుడు కాగితంను విడదీయండి.
- కాగితంలో పడిన మడత రేఖాఖండంపై లంబరేఖ.
- ఇది లంబరేఖ అవునో కాదో పరీక్ష చేసి చూడండి.

ఖ) సెట్‌స్క్వేయర్‌ను ఉపయోగించి లంబ నిర్మాణం

- రండి, ఇప్పుడు స్కేలు మరియు సెట్‌స్క్వేయర్లను ఉపయోగించి రేఖాఖండంపై లంబం నిర్మిద్దాం.
- దీని కొరకు ఒక తెల్లకాగితం ముక్క స్కేలు మరియు సెట్‌స్క్వేయర్ మరియు పెడల్పును తీసుకొనుము.
- మొదటగా తెల్లకాగితంపై l అను పేరు గల సరళరేఖ నిర్మించండి. దీనిపై 'A' బిందువును తీసుకొండి.

- ఒక స్కేల్ యొక్క అంచును *l* ను తగిలించి గట్టిగా ఒత్తిడి చేయండి.
- బొమ్మలో చూపినట్లుగా సెట్‌స్క్వేయర్‌ను స్కేల్ యొక్క అంచుతో తగిలించండి. అది సెట్‌స్క్వేయర్ యొక్క సమకోణం స్కేల్‌తో కలిసి ఉండును.
- ఇప్పుడు సెట్‌స్క్వేయర్‌ను అమర్చండి దాని సమకోణం గల శీర్షం A బిందువు వద్ద ఉండును.
- ఇప్పుడు సెట్‌స్క్వేయర్‌ను బాగా ఒత్తిడి చేసి పట్టండి. B బిందువు నుండి A బిందువును కలిపి ఒక రేఖాఖండమును నిర్మించండి.
- $\overline{BA}$ ఒక అవసరమైన లంబరేఖ అగును.



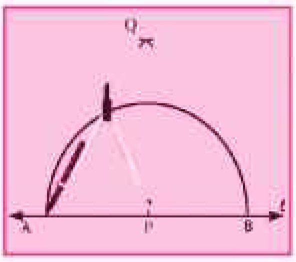
గ) స్కేల్ మరియు వృత్తలేఖిని సహాయంతో నిర్దిష్ట బిందువు వద్ద రేఖాఖండంపై లంబ నిర్మాణం.

మొదటి సోపానం :

l సరళరేఖపై 'P' బిందువును తీసుకొనుము.

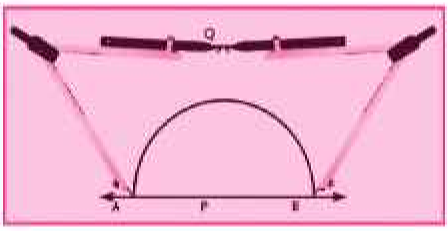
రెండువ సోపానం :

P ని కేంద్ర బిందువుగా తీసుకొని ఏదైనా వ్యాసార్థంతో ఒక చాపంను నిర్మించండి. అది *l* ను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించును. ఖండన బొమ్మల పేర్లు A మరియు B పెట్టండి.



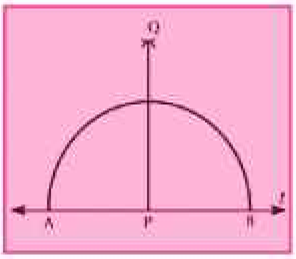
మూడువ సోపానం :

ఇప్పుడు A మరియు B లను కేంద్ర బిందువుగా తీసుకొని బొమ్మలో ఇచ్చినట్లు రెండు చాపాలను నిర్మించండి. అవి పరస్పరం Q బిందువు వద్ద ఖండించును.



నాల్గవ సోపానం :

ఇప్పుడు P మరియు Q కలపండి. ఇచ్చట $\overline{PQ}$ ఒక అవసరమైన లంబరేఖ అగును.



> **పరీక్షించి చూడండి.**
> పైన నాలుగు సోపానాలలో ఏఏ పని చేసారో సరళరేఖనకు క్రింది భాగంలో నాలుగు సోపానాలతో అటువంటి పని చేసి లంబరేఖను నిర్మించండి. ఏమి పరిశీలిస్తున్నారో చెప్పండి.

13.6.2. సరళరేఖ వెలుపల గల బిందువు నుండి సరళరేఖపై లంబ నిర్మాణం

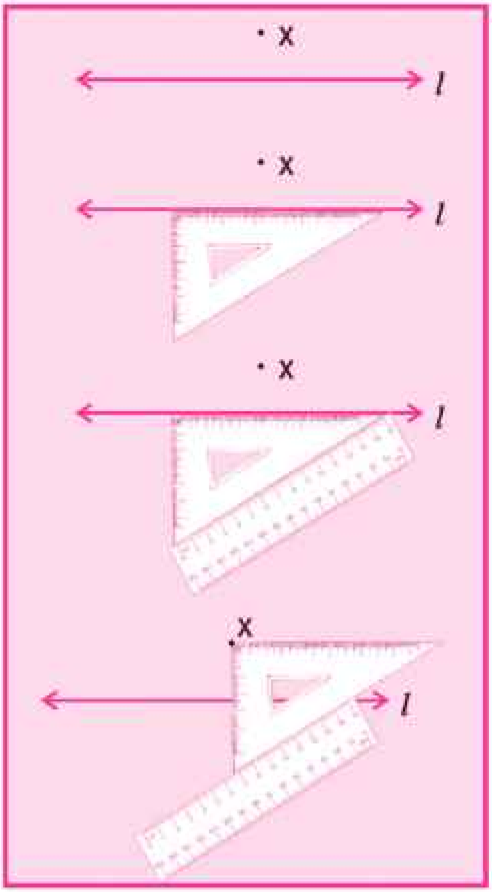
క) కాగితం మడత పెట్టు పద్ధతి :

స్వయంగా చేసి చూడండి

- ఒక తెల్లని కాగితంను తీసుకొనుము. దీనిపై ఒక సరళరేఖను నిర్మించండి. దాని పేరు '*l*' అని పెట్టుము.
- ఆ సరళరేఖకు వెలుపల ఒక బిందువు 'X' తీసుకొనుము.
- ఇప్పుడు కాగితంను 'X' బిందువు గుండా మడత చేయండి. దాని రెండు చివరలు పరస్పరం పైన ఉండును.
- ఎచ్చట కాగితంను మడత పెట్టరో అచ్చట ఒత్తిడి చేయండి.
- ఇప్పుడు కాగితంను విడదీయండి.
- ఇప్పుడు కాగితంపై ఏర్పడిన అంచు *l* సరళరేఖపై లంబం అగును.

ఖ) సెట్‌స్క్వేయర్‌ను ఉపయోగించి లంబం నిర్మించుట

ఇప్పుడు సెట్‌స్క్వేయర్ మరియు స్కేల్‌ను ఉపయోగించి సరళరేఖకు బయట గల ఒక బిందువు నుండి సరళరేఖపై ఏ విధంగా లంబం నిర్మించ గలమో తెలుసుకుందాం.

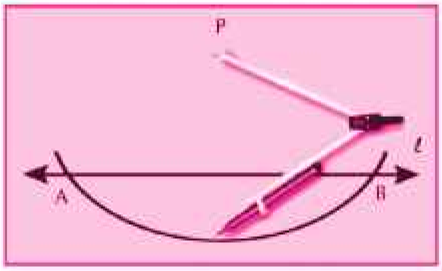


- *l* అను పేరు గల ఒక సరళరేఖను నిర్మించండి. దీనికి వెలుపల 'X' అను పేరు గల బిందువును తీసుకొనుము.
- *l* పై సెట్‌స్క్వేయర్‌ను ఉంచండి. దీని సమకోణ సంలగ్న అంచు *l* నకు తగులును.
- సెట్‌స్క్వేయర్ యొక్క సమకోణంనకు వ్యతిరేక అంచుకు తగిలించి స్కేలును ఉంచండి.
- స్కేల్‌ను స్థిరంగా ఉంచి సెట్‌స్క్వేయర్‌ను స్కేల్ అంచులో తీసుకెళ్లండి. దాని 90° ఏర్పడిన శీర్షము 'X' బిందువును తాకును.
- ఇప్పుడు $\overline{XY}$ నిర్మించండి. అది *l* నకు Y బిందువు వద్ద ఖండించును. ఇప్పుడు $\overline{XY} \perp l$ అగును.

(గ) స్కేల్ మరియు వృత్తలేఖిని ఉపయోగించి సరళరేఖకు వెలుపల గల బిందువు నుండి సరళరేఖపై లంబ నిర్మాణం.

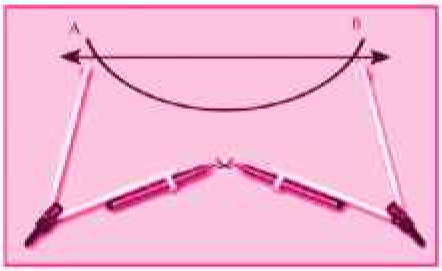
మొదటి సోపానం :

l అనే పేరు గల సరళరేఖను తీసుకొనుము. *l* సరళరేఖకు వెలుపల 'P' బిందువును తీసుకొనుము.



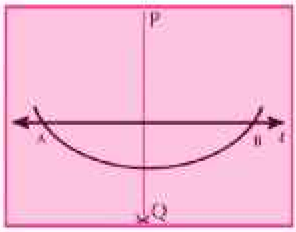
రెండువ సోపానం :

P ని కేంద్ర బిందువుగా తీసుకొని ఒక చాపంను నిర్మించండి. అది *l* కు A మరియు B అను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించును.



మూడువ సోపానం :

వ్యాసార్థమును మార్చకుండా A మరియు B బిందువులను కేంద్రంగా తీసుకొని రెండు చాపాలను నిర్మించండి. అవి పరస్పరం 'Q' బిందువు వద్ద ఖండించును. (బొమ్మలో చూపినట్లు)



నాల్గవ సోపానం :

ఇప్పుడు $\overline{PQ}$ ను కలపండి. $\overline{PQ} \perp l$ అగును.

అభ్యాసం - 13.6

1. $\overline{AB}$ రేఖాఖండంను నిర్మించండి. దీనిపై X అను బిందువును తీసుకొండి. X బిందువు వద్ద $\overline{AB}$ రేఖాఖండంపపై లంబంను నిర్మించండి. (కేవలం వృత్తలేఖిని మరియు స్కేలును ఉపయోగించండి)

2. $\overline{XY}$ రేఖాఖండంను నిర్మించండి. దీనిపై లేని ఒక బిందువు A తీసుకొనుము. A బిందువు నుండి $\overline{XY}$ పై లంబం నిర్మించు సోపానాలను రాయండి.

3. $\overline{PQ}$ రేఖాఖండంను నిర్మించండి. దీనిపై 'S' బిందువును తీసుకొనుము. S బిందువు వద్ద $\overline{PQ}$ పై ఒక లంబంను నిర్మించండి. ఇప్పుడు $\overline{PS}$ మరియు $\overline{QS}$ ల పొడవులను కొలవండి.

4. 9 సె.మీ.ల పొడవు గల ఒక రేఖాఖండంను నిర్మించండి. దీని పేరు $\overline{AB}$ పెట్టండి. $\overline{AB}$ పై లేని ఒక బిందువు S బిందువు నుండి $\overline{AB}$ పై లంబంను నిర్మించండి.

PART IVA
FUNDAMENTAL DUTIES

51A. Fundamental duties.—It shall be the duty of every citizen of India—

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers and wild life, and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence;

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

(k) who is a parent or guardian to provide opportunities for education to his child or, as the case may be, ward between the age of six and fourteen years.